EUR 1623.d

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT - EURATOM

SUBJEKTIVISTISCHE INTERPRETATION DES KONFIDENZSCHLUSSE

von

P. IHM

1965

Gemeinsame Kernforschungsstelle
Forschungsanstalt Ispra — Italien

Zentralstelle für die Verarbeitung wissenschaftlicher Information — CETIS

Vortrag gehalten auf dem Kolloquium der deutschen Region der Biometric Society
Hannover, 25.1.1964

HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und alle in deren Namen handelnden Personen :

1° — keine Gewähr dafür übernehmen, dass die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind oder dass die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstösst ;

2° — keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

Dieser Bericht wird zum Preise von 25 bfrs. verkauft. Bestellungen sind zu richten an : PRESSES ACADÉMIQUES EUROPÉENNES — 98, chaussée de Charleroi, Brüssel 6.

Die Zahlung ist zu leisten durch Ueberweisung :

— an die BANQUE DE LA SOCIÉTÉ GÉNÉRALE (Agence Ma Campagne) — Brüssel — Konto Nr. 964.558 ;

— an die BELGIAN AMERICAN BANK AND TRUST COMPANY — New York — Konto Nr. 121.86 ;

— an die LLOYDS BANK (Foreign) Ltd. — 10 Moorgate, London E. C. 2,

als Bezug ist anzugeben : « EUR 1623.d — Subjektivistische interpretation des konfidenzschlusses ».

Gedruckt von Vaillant-Carmanne, S. A., Lüttich.
Brüssel, Juni 1965.

EUR 1623.d

SUBJECTIVISTIC INTERPRETATION OF CONFIDENCE REGIONS by P. IHM

European Atomic Energy Community — EURATOM
Joint Nuclear Research Center — Ispra Establishment (Italy)
Scientific Data Processing Center (CETIS)
Paper presented at the « Kolloquium der deutschen Region der Biometric Society » — Hannover (Germany), 25.1.1964
Brussels, June 1965, 7 pages

In 1928 Jerzy Neyman defined the confidence intervals on the basis of an objectivistic probability theory in order to be independent of the subjectivistic components in Bayes' theorem. Practical experience on the one hand and theoretical knowledge on the other have led to the realization that the probability of error concept, on which confidence inference is based, is inadequate for the formation of judgements in scientific research. If, however, confidence intervals are interpreted as quantiles of standardized likelihood functions, which is possible with a certain family of distributions, they can then be explained in terms of a subjectivistic theory.

EUR 1623.d

SUBJECTIVISTIC INTERPRETATION OF CONFIDENCE REGIONS by P. IHM

European Atomic Energy Community — EURATOM
Joint Nuclear Research Center — Ispra Establishment (Italy)
Scientific Data Processing Center (CETIS)
Paper presented at the « Kolloquium der deutschen Region der Biometric Society » — Hannover (Germany), 25.1.1964
Brussels, June 1965, 7 pages

In 1928 Jerzy Neyman defined the confidence intervals on the basis of an objectivistic probability theory in order to be independent of the subjectivistic components in Bayes' theorem. Practical experience on the one hand and theoretical knowledge on the other have led to the realization that the probability of error concept, on which confidence inference is based, is inadequate fort he formation of judgements in scientific research. If, however, confidence intervals are interpreted as quantiles of standardized likelihood functions, which is possible with a certain family of distributions, they can then be explained in terms of a subjectivistic theory.

EUR 1623.d

SUBJECTIVISTIC INTERPRETATION OF CONFIDENCE REGIONS by P. IHM

European Atomic Energy Community — EURATOM
Joint Nuclear Research Center — Ispra Establishment (Italy)
Scientific Data Processing Center (CETIS)
Paper presented at the « Kolloquium der deutschen Region der Biometric Society » — Hannover (Germany), 25.1.1964
Brussels, June 1965, 7 pages

In 1928 Jerzy Neyman defined the confidence intervals on the basis of an objectivistic probability theory in order to be independent of the subjectivistic components in Bayes' theorem. Practical experience on the one hand and theoretical knowledge on the other have led to the realization that the probability of error concept, on which confidence inference is based, is inadequate for the formation of judgements in scientific research. If, however, confidence intervals are interpreted as quantiles of standardized likelihood functions, which is possible with a certain family of distributions, they can then be explained in terms of a subjectivistic theory.

EUR 1623.d

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT - EURATOM

SUBJEKTIVISTISCHE INTERPRETATION DES KONFIDENZSCHLUSSES

von

P. IHM

1965

Gemeinsame Kernforschungsstelle
Forschungsanstalt Ispra — Italien

Zentralstelle für die Verarbeitung wissenschaftlicher Information — CETIS

Vortrag gehalten auf dem Kolloquium der deutschen Region der Biometric Society
Hannover, 25.1.1964

INHALTSVERZEICHNIS

1 — EINLEITUNG 0

2 — DER KONFIDENZSCHLUSS 11

3 — DIE DUALISTISCHE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE 33

4 — DIE ANWENDUNG DES KONFIDENZSCHLUSSES 22

SUBJEKTIVISTISCHE INTERPRETATION DES KONFIDENZSCHLUSSES

1 — EINLEITUNG

Der Konfidenzschluss und die Neyman-Pearsonsche Testtheorie beruhen auf dem Konzept der Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Verfeinerung des ersteren durch die sog. simultanen Konfidenzintervalle, d. h. mehrdimensionale Konfidenzbereiche, hat aber gezeigt, dass das logische Konzept, das der Irrtumswahrscheinlichkeit zugrunde liegt, keinesfalls dazu ausreicht, um ein Modell eines Menschen aufzustellen, der aus Versuchsergebnissen lernt, oder — anders ausgedrückt —, es ist nicht möglich, eine induktive Logik auf diesem Konzept aufzubauen. Ich beschränke mich hier zum Zwecke der Demonstration der grundlegenden Ideen auf den Fall der Normalverteilung mit bekannter Varianz. Eine Verallgemeinerung für Verteilungen auf lokal kompakten topologischen Gruppen wird anderswo veröffentlicht.

2 — DER KONFIDENZSCHLUSS

Der Konfidenzschluss sei am Beispiel einer vereinfachten Varianzanalyse erklärt. Es werde angenommen, man habe n Werte $\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n)$ beobachtet, die unabhängig normalverteilt seien mit Varianz eins und Erwartungswerten $\mathbf{m} = (m_1, \ldots m_n)$. Dann ist

2.1 $$S_m = \sum_{j=1}^{n} (x_j - m_j)^2 = \chi_n^2$$

wie χ^2 für n Freiheitsgrade verteilt. Man kann für die Hypothese eines $\mathbf{m}$ einen Annahmebereich $\mathbf{A}_m$ vermöge

2.2 $$\mathbf{A}_m = \{\mathbf{x} : S_m < \chi_{n,\gamma}^2\}$$

definieren derart, dass

2.3 $$p(\chi_n^2 < \chi_{n,\gamma}^2) = \gamma$$

ist. Für γ nimmt man gewöhnlich 0.95 oder 0.99. Mit der Wahrscheinlichkeit γ liegt $\mathbf{x}$ in $\mathbf{A}_m$, geschrieben $\mathbf{x} \varepsilon \mathbf{A}_m$. Definiert man einen Konfidenzbereich $K_{\mathbf{x}}$ für festes $\mathbf{x}$ durch

2.4 $$\sum_{j=1}^{n} (m_j - x_j)^2 < \chi_{n,\gamma}^2,$$

d. h.

$$K_{\mathbf{x}} = \{m : \mathbf{x} \varepsilon \mathbf{A}_m\},$$

so überdeckt dieser mit Wahrscheinlichkeit γ das wahre $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}$. Will man also nach Erhalt von $\mathbf{x}$ etwas über $\hat{\mathbf{m}}$ wissen, so gibt man $K_{\mathbf{x}}$ an und weiss, dass $\hat{\mathbf{m}}$ mit der Wahrscheinlichkeit γ darin enthalten ist. γ heisst Konfidenzkoeffizient.

Aus (2.4) folgt für jede Linearfunktion der m_j,

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$$

mit

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1,$$

die Ungleichung

2.5 $$| \lambda_i - l_i | < \chi_{n,\gamma},$$

wofür man $\lambda_i \varepsilon K_{l_i}$ schreiben kann mit

$$K_{l_i} = \{\lambda_i : | \lambda_i - l_i | < \chi_{n,\gamma}\} \cdot$$

Dies lässt sich auch so ausdrücken : Wählt man *marginale* Konfidenzintervalle K_{l_i}, so ist die Konjunktion der Konfidenzaussagen über die λ_i richtig mit Wahrscheinlichkeit $p \geqslant \gamma$ und damit jede davon implizierte Verbindung von Aussagen mit Wahrscheinlichkeit $p \geqslant \gamma$, d. h.

2.6 $$p(| \lambda_i - l_i | < \chi_{n,\gamma}) \geqslant \gamma.$$

Die Intervalle Kl_i werden in ihrer Gesamtheit simultane Konfidenzintervalle genannt.

Obwohl simultane Konfidenzintervalle immer wieder beschrieben werden, werden sie doch nur wenig angewendet. Gewöhnlich sucht man sich das nach Erhalt von **x** interessierende $\lambda_j = \lambda^*$ heraus und definiert ein Konfidenzintervall durch

2.7 $$| \lambda^* - l^* | < \chi_{1,\gamma}$$

mit $\chi^2_{1,\gamma}$ für einen Freiheitsgrad statt wie in (2.5) mit n. Dieses Verfahren der Auswahl eines optimalen λ^* lässt sich bei $n > 1$ mittels des Konzepts der Irrtumswahrscheinlichkeit nicht begründen. Nimmt man dagegen (2.5), so ist die Konjunktion aller Konfidenzaussagen über die λ_j richtig mit Wahrscheinlichkeit $p \geqslant \gamma$, folglich auch die über λ^*.

3 — DIE DUALISTISCHE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Bei einer dualistischen Wahrscheinlichkeitstheorie, die im Wesen eine subjektivistische ist, unterscheidet man eine objektive und eine subjektive Wahrscheinlichkeit. Erstere ist eine in der Natur feststehende Grösse, die zweite hängt vom Wissen des Experimentators ab, ist also möglicherweise individuell verschieden. Der Philosoph Carnap zeigte, dass nur letztere zu einem System induktiver Logik führen kann.

Im vorliegenden Falle habe **x** die objektive Wahrscheinlichkeitsdichte

3.1 $$f(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m_j)^2}$$

Auf der Menge M der **m** definiert man eine subjektive Wahrscheinlichkeitsdichte $g(\mathbf{m})$. Nach Erhalt von **x** geht diese nach einem Satz der dualistischen Wahrscheinlichkeitstheorie Richters in ein

3.2 $$g^*(\mathbf{m}) = l(\mathbf{m}, \mathbf{x}) g(\mathbf{m}) / \int_M l(\mathbf{m}, \mathbf{x}) g(\mathbf{m}) dm_1 \dots dm_n$$

über. Dabei ist $l(\mathbf{m}, \mathbf{x})$ die Likelihoodfunktion von $\mathbf{m}$:

3.3 $$l(\mathbf{m}, \mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{m})$$

(3.3) ist also (3.1) als Funktion von $\mathbf{m}$ statt von $\mathbf{x}$. (3.2) steht formal in Analogie zum Bayesschen Theorem.

Für den Konfidenzbereich ,$\mathbf{K_x}$ jetzt als Teilmenge von M betrachtet, gilt offenbar

3.4 $$\varphi(\mathbf{K_x}) = \int_{\mathbf{K_x}} l(\mathbf{m}, \mathbf{x}) dm_1 \ldots dm_n = \gamma.$$

Somit ist nach einer bekannten Definition $\mathbf{K_x}$ γ-Quantil der Likelihoodfunktion (3.3) bezw. der subjektiven Wahrscheinlichkeitsdichte $g^*(\mathbf{m})$ bei auf M konstantem $g(\mathbf{m})$. Daher ist (3.4) unter der gleichen Voraussetzung die subjektive Wahrscheinlichkeit von $\mathbf{m} \varepsilon \mathbf{K_x}$. Daraus folgt : *Ist* $g(\mathbf{m})$ *auf* M *konstant, so ist* $\mathbf{K_x}$ *γ-Quantil der subjektiven Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* $g^*(\mathbf{m})$. Hier entsteht sogleich der Verdacht, der Mensch könnte $g^*(\mathbf{m})$ nach (3.2) direkt verwenden statt einen Konfidenzbereich $\mathbf{K_x}$ anzugeben. Der Konfidenzschluss verlangte nämlich, dass man alle $\mathbf{m} \varepsilon \mathbf{K_x}$ gleichmässig bewertet, wohingegen $l(\mathbf{m}, \mathbf{x})$ den Werten von $\mathbf{m}$ ein umso geringeres Gewicht geben, je weiter sie von $\mathbf{x}$ entfernt sind, was eher einem natürlichen Verhalten des Menschen entspricht. Der Verdacht wird erhärtet durch die Tatsache, dass sich der Konfidenzschluss in der Forschung als unanwendbar erweist.

4 — DIE ANWENDUNG DES KONFIDENZSCHLUSSES

Für den Konfidenzschluss gilt :

(I) Er berücksichtigt das Vorwissen nicht.

(II) Die Angabe eines Konfidenzbereiches stellt einen Abschluss dar, d. h. es gibt kein allgemeines Verfahren, um die Ergebnisse aus einem Konfidenzschluss zu einem neuen zu verwenden.

(III) Um die Schwierigkeit (II) zu umgehen, muss man in den wichtigen praktischen Fällen n so gross wählen, dass die simultanen Konfidenzintervalle so lang werden, dass sie kaum noch Information liefern.

Verlangte man für alle λ_i (2.7), so wäre der Erwartungswert der relativen Häufigkeit richtiger Konfidenzaussagen über die λ_i gleich γ. Da man aber in der Forschung die Richtigkeit einer Verbindung von Konfidenzaussagen verlangen muss, damit eine bestimmte Theorie gestützt werde, kann man die Forderung (2.4) bzw. (2.5) nicht umgehen, somit taucht die Schwierigkeit (III) auf. Die subjektivistische Interpretation gilt aber auch für marginale Likelihoodfunktionen, erlaubte also die Umgehung der Forderung nach Richtigkeit der Konjunktion von Aussagen und führte unter der Annahme eines konstanten $g(m)$ zu K_{l_i} als γ-Quantil, rechtfertigte also das sich in (2.7) ausdrückende bei $n > 1$ im Sinne des Konfidenzschlusses falsche Verhalten. (II) spielt bei der subjektivistischen Interpretation keine Rolle, da (3.2) eine beliebige Fortsetzung erlaubt. (3.2) enthält ebenfalls in $g(\mathbf{m})$ das Vorwissen, Schwierigkeit (I) entfällt also auch.

Nach dem Vorausgegangenen liegt die Annahme nahe, dass der Mensch den Konfidenzschluss garnicht anwendet, sondern vielmehr Likelihoodfunktionen interpretiert, da dadurch die Schwierigkeiten (I) bis (III) behoben werden. Im vorliegenden Falle sind die Konfidenzbereiche — totale wie marginale — γ-Quantile für die Likelihoodfunktion, gehören also zu deren Deskriptoren. Interpretiert man Konfidenzbereiche derart, so bekommen sie einen neuen Sinn, und es entfallen die genannten Schwierigkeiten.

Erkenntnisse verbreiten ist soviel wie Wohlstand verbreiten — ich meine den allgemeinen Wohlstand, nicht den individuellen Reichtum — denn mit dem Wohlstand verschwindet mehr und mehr das Böse, das uns aus dunkler Zeit vererbt ist.

Alfred Nobel

EURATOM — C.I.D.

51 - 53, rue Belliard

Bruxelles (Belgique)