

EUR 3472.d

Europäische Atomgemeinschaft — EURATOM

Gesellschaft für Kernenergieverwertung
in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
G.K.S.S. Geesthacht - Deutschland

**DIE BERECHNUNG
ORTSABHÄNGIGER NEUTRONENSPEKTREN
IN WASSER-EISEN-WASSER-SCHILD-ANORDNUNGEN
UND DIE BEZIEHUNGEN DER DIFFUSIONSNÄHERUNG
ZUR EXAKTEN TRANSPORTTHEORIE
IN GEBIETEN STARKER FLUSSGRADIENTEN**

von

R. FIEBIG
(G.K.S.S.)

1967



HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, daß die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und die in deren Namen handelnden Personen :

keine Gewähr dafür übernehmen, daß die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind, oder daß die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen, oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstößt;

keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen, oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

Dieser Bericht wird in den auf der vierten Umschlagseite genannten Vertriebsstellen

zum Preise von DM 13.20	FF 16.50	FB 165	Lit. 2060	Fl. 11.95
-------------------------	----------	--------	-----------	-----------

verkauft.

Es wird gebeten, bei Bestellungen die EUR-Nummer und den Titel anzugeben, die auf dem Umschlag jedes Berichts aufgeführt sind.

Gedruckt von Van Muyswinkel,
Brüssel, Mai 1967.

Das vorliegende Dokument wurde an Hand des besten Abdruckes vervielfältigt, der zur Verfügung stand.

EUR 3472.d

DIE BERECHNUNG ORTSABHÄNGIGER NEUTRONENSPEKTREN IN WASSER-EISEN-WASSER-SCHILD-ANORDNUNGEN UND DIE BEZIEHUNGEN DER DIFFUSIONSNAHERUNG ZUR EXAKTEN TRANSPORT-THEORIE IN GEBIETEN STARKER FLUSSGRADIENTEN von R. FIEBIG (G.K.S.S.)

Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM
Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
G.K.S.S. Geesthacht (Deutschland)
Vertrag Nr. 002-61-1 PNID
Brüssel, Mai 1967 - 116 Seiten - 33 Abbildungen - FB 165

Mit einem Neutronentransportprogramm BINE wurde der Verlauf der Neutronenspektren in einer ebenen Wasser-Eisen-Wasser-Schild-Anordnung berechnet und aus den Ergebnissen Gruppenkonstanten für eine Mehrgruppen-

EUR 3472.d

THE CALCULATION OF PLACE-DEPENDENT NEUTRON SPECTRA IN WATER-IRON-WATER SHIELDING ASSEMBLIES AND THE RELATIONS OF THE DIFFUSION APPROXIMATION FOR EXACT TRANSPORT THEORY IN HIGH-FLUX-GRADIENT AREAS by R. FIEBIG (GKSS)

European Atomic Energy Community - EURATOM
Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
GKSS Geesthacht (Germany)
Contract No. 002-61-1 PNID
Brussels, May 1967 - 116 Pages - 33 Figures - FB 165

The pattern of the neutron spectra in a plane water-iron-water shielding assembly was calculated with a BINE neutron-transport program and from the results, group constants for a multi-group diffusion calculation were derived.

EUR 3472.d

THE CALCULATION OF PLACE-DEPENDENT NEUTRON SPECTRA IN WATER-IRON-WATER SHIELDING ASSEMBLIES AND THE RELATIONS OF THE DIFFUSION APPROXIMATION FOR EXACT TRANSPORT THEORY IN HIGH-FLUX-GRADIENT AREAS by R. FIEBIG (GKSS)

European Atomic Energy Community - EURATOM
Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
GKSS Geesthacht (Germany)
Contract No. 002-61-1 PNID
Brussels, May 1967 - 116 Pages - 33 Figures - FB 165

The pattern of the neutron spectra in a plane water-iron-water shielding assembly was calculated with a BINE neutron-transport program and from the results, group constants for a multi-group diffusion calculation were derived.

EUR 3472.d

THE CALCULATION OF PLACE-DEPENDENT NEUTRON SPECTRA IN WATER-IRON-WATER SHIELDING ASSEMBLIES AND THE RELATIONS OF THE DIFFUSION APPROXIMATION FOR EXACT TRANSPORT THEORY IN HIGH-FLUX-GRADIENT AREAS by R. FIEBIG (GKSS)

European Atomic Energy Community - EURATOM
Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
GKSS Geesthacht (Germany)
Contract No. 002-61-1 PNID
Brussels, May 1967 - 116 Pages - 33 Figures - FB 165

The pattern of the neutron spectra in a plane water-iron-water shielding assembly was calculated with a BINE neutron-transport program and from the results, group constants for a multi-group diffusion calculation were derived.

diffusionsrechnung abgeleitet. Außer dem Verlauf der Neutronenflüsse und -ströme wurde die Ortsabhängigkeit der Gruppenkonstanten studiert und bedeutende Unterschiede zu den mit der P1-Approximation erhaltenen Gruppenkonstanten aufgezeigt. Mit Hilfe gebietsweise gemittelter Gruppenkonstanten wurden die Transportergebnisse nachgerechnet, und die Ergebnisse werden diskutiert.

In addition to the neutron-flux and flow pattern, the place-dependence of the group constants was studied and significant differences were recorded compared with the P1 approximation of the group constants obtained. The transport results were checked by means of group constants averaged according to areas, and the results are discussed.

In addition to the neutron-flux and flow pattern, the place-dependence of the group constants was studied and significant differences were recorded compared with the P1 approximation of the group constants obtained. The transport results were checked by means of group constants averaged according to areas, and the results are discussed.

In addition to the neutron-flux and flow pattern, the place-dependence of the group constants was studied and significant differences were recorded compared with the P1 approximation of the group constants obtained. The transport results were checked by means of group constants averaged according to areas, and the results are discussed.

EUR 3472 . d

Europäische Atomgemeinschaft — EURATOM

Gesellschaft für Kernenergieverwertung
in Schiffbau und Schifffahrt mbH,
G.K.S.S. Geesthacht - Deutschland

**DIE BERECHNUNG
ORTSABHÄNGIGER NEUTRONENSPEKTREN
IN WASSER-EISEN-WASSER-SCHILD-ANORDNUNGEN
UND DIE BEZIEHUNGEN DER DIFFUSIONSNÄHERUNG
ZUR EXAKTEN TRANSPORTTHEORIE
IN GEBIETEN STARKER FLUSSGRADIENTEN**

von

**R. FIEBIG
(G.K.S.S.)**

1967



Zusammenfassung

Mit einem Neutronentransportprogramm BINE wurde der Verlauf der Neutronenspektren in einer ebenen Wasser-Eisen-Wasser-Schild-Anordnung berechnet und aus den Ergebnissen Gruppenkonstanten für eine Mehrgruppen-diffusionsrechnung abgeleitet. Außer dem Verlauf der Neutronenflüsse und -ströme wurde die Ortsabhängigkeit der Gruppenkonstanten studiert und bedeutende Unterschiede zu den mit der P1-Approximation erhaltenen Gruppenkonstanten aufgezeigt. Mit Hilfe gebietsweise gemittelter Gruppenkonstanten wurden die Transportergebnisse nachgerechnet, und die Ergebnisse werden diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	15
2. Die Boltzmann-Gleichung	18
a) Darstellung	18
b) Ableitung der Stoßterme aus der Neutronenstoß- theorie	19
c) Ableitung des Transportkernes	26
d) Zusammenfassende Darstellung der Integralgleichung	27
e) Randbedingungen	29
3. Mathematisches Verfahren zur numerischen Integration	32
a) Allgemeine Bemerkungen zur Auswahl des Verfahrens und zu Besonderheiten wegen des Typs der Gleichung	32
b) Interpolationsformeln	36
c) Aufbau des Programms und Schema des Rechenganges	39
4. Testrechnungen	42
a) Fehlerquellen und Testergebnisse	42
b) Wahl einer günstigen Einteilung	45
5. Die Beziehungen von Mehrgruppengleichungen zur Boltzmann- Gleichung	47
a) Der Übergang von der Boltzmann-Gleichung zur Mehrgrup- pendiffusionsgleichung	47
b) Die Ermittlung der Diffusionskonstanten nach der P1- Näherung	54
c) Ein spezieller Übergang von der Gruppentransport- gleichung zur Diffusionsgleichung (B1-Näherung)	57
d) Die gebietsweise Mittelung der Gruppenkonstanten	62
e) Das Auswerteprogramm	65

	<u>Seite</u>
6. Die Berechnung von Spektren innerhalb einer Wasser-Eisen-Wasser-Abschirmung und Diskussion der Ergebnisse	66
a) Verwendete Librarydaten	66
b) Die Neutronenspektren in und außerhalb der Eisen-schicht	66
c) Der Verlauf der Ströme an den Rändern der Eisen-schicht	72
7. Aus den Ergebnissen abgeleitete Gruppenkonstanten	72
a) Die Verläufe der "Diffusionskonstanten" in den be-rechneten Anordnungen	74
b) Der Verlauf der Removalquerschnitte	93
c) Die inelastischen Removalquerschnitte	98
8. Vergleich der gemittelten Gruppenkonstanten unterein-ander und im Vergleich für verschiedene Anordnungen	98
a) Die Diffusionskonstanten	98
b) Die Removalquerschnitte	99
c) Die inelastischen Removalquerschnitte	100
d) Die scheinbaren Absorptionsquerschnitte (Bilanz-prüfung)	100
9. Reproduzierung der transporttheoretisch erhaltenen Flüsse mit einer Diffusionsrechnung	105
10. Zusammenfassung	108
Anhang I. Die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß unter eine Energieschwelle	110
Anhang II. Das P1-Glied des Stoßterms	112
Anhang III. Der mittlere Streuwinkel im Laborsystem	113
Literaturverzeichnis	115

Tabellenverzeichnis

	<u>Seite</u>
Tabelle I: Das Verhältnis von Strom und Fluß in der Anordnung 4.10	91
Tabelle II: Die Gruppenkonstanten des asymptotischen Wasserspektrums für Wasser	96
Tabelle III: Die gemittelten Diffusionskonstanten $\langle D \rangle$ und $\langle D_1 \rangle$ für die Gruppen 1 - 5 und die drei Anordnungen mit 2 cm, 4 cm und 10 cm Eisenstärke sowie für ein 1/E-Spektrum	97
Tabelle IV: Die gemittelten Removalquerschnitte und inelastischen Übergangsquerschnitte in den drei Anordnungen mit 2 cm, 4 cm und 10 cm Eisenstärke sowie für ein 1/E-Spektrum	101
Tabelle V: Die Removalquerschnitte und die effektiven Absorptionsquerschnitte in den drei Anordnungen im Eisen	102

Abbildungsverzeichnis

	<u>Seite</u>
<p><u>Abb. 1:</u> Das Integrationsgebiet über μ' und u'. Ordinate $\tilde{\mu}$, $u' - u = \Delta u(\tilde{\mu})$ für $A = 2$ und $A = 1$ links und rechts dazu getragen. Parameter ist μ.</p>	33
<p><u>Abb. 2:</u> Die berechnete Winkelverteilung der ersten 25 Lethargiestützpunkte mit $A = 16$ und $\Sigma = \text{const.}$ ($f_i = f(u_i)$)</p>	43
<p><u>Abb. 3:</u> Die berechneten Flußverläufe für $A = 16$ und $\Sigma = 1$ mit isotroper und anisotroper Quelle sowie verschiedene Lethargieein- teilungen.</p>	44
<p><u>Abb. 4:</u> Die berechneten Flußverläufe für Eisen ($A = 56$) exakt und nach der BINE-Rechnung mit gleicher monodirektionaler Quelle.</p>	46
<p><u>Abb. 5:</u> Die Integrationsgebiete in der E-E'-Ebene. Schraffiert: Bereiche der Überstreuung. Ziffern: Gruppennummern der Energiegrup- pen in E' bzw. E.</p>	50
<p><u>Abb. 6:</u> Das Verhältnis D/D_1 in der B1-Approxima- tion als Funktion von $y = \lambda/\Sigma_T$. Parameter ist der Quellanisotropieparameter δ bzw. $\alpha = \delta/y$. Der Punkt, in dem sich alle Kurven schneiden, entspricht dem Verhält- nis D/D_1 der homogenen Lösung.</p>	61

Abb. 7: Der Verlauf von \varnothing (E) als Funktion der Lethargie u in der Anordnung 4.10. Angegeben sind die Kurven für die Ortsstützpunkte 15, 20, 25 und 29 entsprechend 0,4 cm Entfernung von den Rändern der Eisenplatte innerhalb des Eisens und 1,265 cm Entfernung außerhalb des Eisens. Im unteren Teil \sqrt{T} von Eisen nach NDA 2111-3 Vol C und dazu der BNL 325 entnommene kontinuierliche Verlauf. 67-69

Abb. 8: Der Verlauf der Winkelverteilungen in der Mitte des Eisens (Stützpunkt 22 der Anordnung 4.10) in der Umgebung der Streuresonanz. Die Ziffern bezeichnen die Lethargiestützpunktnummern (Lethargiegruppennummern) wie in Abb. 7. 71

Abb. 9: Der Verlauf der Ströme an den Rändern der Eisenplatte in Anordnung 4.10. J_a = Strom an der Vorderkante, Ortsstützpunkt 16, 17, J_e = Strom an der Hinterkante, Ortsstützpunkt 27.28. 73

Abb.10: Die Verläufe der transporttheoretischen Diffusionskonstante $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppen 1 bis 5. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt im Eisen 0,2 cm, im Wasser 1,265 cm. (Für Gruppe 4 ist auch $3 \sum_{tr} = 1/D(x)$ eingetragen, um zu zeigen, daß $D(x)$ einen einfachen Pol besitzt.) 75-79

Abb. 11: Die Verläufe der transporttheoretischen Diffusionskonstante $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstante $D1(x)$ in der Anordnung 4.10 für die Gruppen 1 bis 5. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt im Eisen 0,4 cm, im Wasser 1,265 cm. 80-84

Abb. 12: Die Verläufe der transporttheoretischen Diffusionskonstante $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstante $D1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppen 1 bis 5. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt im Eisen 0,4 cm, im Wasser 1,25 cm. (Für Gruppe 2 und 4 ist auch $3\sum_{tr} = 1/D(x)$ eingetragen, um zu zeigen, daß $D(x)$ einen einfachen Pol besitzt.) 85-89

Abb. 13: Die Verläufe der Removalquerschnitte \sum_{rem} und \sum_{remel} in den drei Anordnungen 2.10, 4.10 und 10.25. Vom Wasser ist nur ein kurzes Stück angegeben, da die Removalquerschnitte nur in der nächsten Umgebung des Eisens variieren. 94

Abb. 14: Der örtliche Verlauf der Flüsse der Anordnung 4.10 in der Umgebung der großen Eisenresonanz. Örtliche Abstände wie in Abb. 11, Lethargiegruppennummern wie in Abb. 7. 95

Abb. 15: Die örtlichen Verläufe der Flüsse in der Anordnung 4.10. Ausgezogen die transporttheoretischen Flüsse nach dem BINE-Programm für die Gruppen 1 bis 5. Gestrichelt: die mittels der gemittelten Gruppenkonstanten erhaltenen Flüsse. Ortseinteilung wie in Abb. 11. 106

- Abb. 16: Die örtlichen Verläufe der Flüsse in der Anordnung 10.25. Ausgezogen: die transporttheoretischen Flüsse nach dem BINE-Programm für die Gruppen 1 bis 5. Gestrichelt: die mittels der gemittelten Gruppenkonstanten erhaltenen Flüsse. Ortseinteilung wie in Abb. 11. 107
- Abb. 17: Die örtlichen Verläufe von Strömen J und Flüsse ϕ in den einzelnen Gruppen in der Anordnung 4.10. Abszisse in cm, Ordinate in willkürlichen Einheiten. 92
- Abb. 18: Winkelflüsse im optisch dünnen Eisen. Die Ziffern bezeichnen die Lethargiegruppennummern wie in Abb. 7. Gestrichelt: der zu vermutende wahre Verlauf, ausgezogen: benutzte Interpolation. 104

Nomenklatur

$f(x, \mu, E)$ = Winkelfluß pro Energieintervall und Einheit des Richtungscosinus im Laborsystem

$\mu' = \cos \vartheta, \varphi'$ = Cosinus des Richtungswinkels und Azimut des Neutrons im Laborsystem vor dem Stoß

$\mu = \cos \vartheta, \varphi$ = Cosinus des Richtungswinkels und Azimut des Neutrons im Laborsystem nach dem Stoß

E' = Energie des Neutrons im Laborsystem vor dem Stoß

E = Energie des Neutrons im Laborsystem nach dem Stoß

E_0 = Energie des Nullpunkts der gewählten Lethargie-einteilung

u' = Lethargie des Neutrons vor dem Stoß

u = Lethargie des Neutrons nach dem Stoß

$\tilde{\mu}$ = Cosinus des Stoßwinkels des Neutrons im Laborsystem

$\hat{\mu}$ = Cosinus des Stoßwinkels des Neutrons im Schwerpunktsystem

$\hat{P}(E', \mu', \varphi' \rightarrow E, \mu, \varphi)$ = Übergangswahrscheinlichkeit des Neutrons bei einem Stoß mit der Energie E' und der Richtung μ', φ' in das Energieintervall dE um die Energie E und das Richtungselement $d\mu, d\varphi$ um die Richtung μ, φ

$g^A(\mu)/4\pi$ = Stoßwahrscheinlichkeit in ein Raumwinkelelement $d\varphi d\mu$ im Schwerpunktsystem

A = Masse des gestoßenen Kerns, auch als Zählparameter über Kernarten benutzt

Q = Schwellenergie eines Kerns für inelastische Streuung, auch als Zählparameter für die Anregungsschwellen eines Kerns benutzt

$\Sigma^A(E')$ = makroskopischer Streuquerschnitt eines Kerns A

$\Sigma_T(E)$ = totaler makroskopischer Wirkungsquerschnitt

$\Sigma_{in}^{A,Q}(E')$ = makroskopischer inelastischer Streuquerschnitt einer Kernart A mit einer Anregungsschwelle Q

$P_\ell(x)$ = ℓ -tes Legendre-Polynom

$f_\ell(E')$ = Entwicklungskoeffizient des zweifach differentiellen Streuquerschnitts nach Kugelfunktionen im Schwerpunktsystem

m = Neutronenmasse

$\bar{m} = \frac{m A}{A+1}$ = reduzierte Neutronenmasse

v_1^S = Geschwindigkeit des Neutrons im Schwerpunktsystem vor dem Stoß

v_2^S = Geschwindigkeit des Neutrons im Schwerpunktsystem nach dem Stoß

v_3^S = Schwerpunktschwindigkeit

- v_1 = Geschwindigkeit des Neutrons im Laborsystem vor dem Stoß
 v_2 = Geschwindigkeit des Neutrons im Laborsystem nach dem Stoß
 v_1 = Betrag von v_1
 v_2 = Betrag von v_2
 v_1^S = Betrag von v_1^S
 v_2^S = Betrag von v_2^S
 α = $4A / (A+1)^2$, $\alpha_{\text{min}} = \frac{4}{(A+1)^2} \sqrt{A^2 - Q/E'(A+1)^3/A}$
 S = Neutronenquelle aus gestoßenen Neutronen (Stoßintegral)
 $T(x', x, \mu)$ = Transportkern
 H^A = Hilfsgröße, Stoßintegral für eine Kernart A
 $W(x, \mu)$ = in Lethargiegruppe eintretende Neutronenzahl
 $G(u')$ = über den winkelabhängigen Anteil des Stoßkerns integrierter Neutronenfluß
 μ_1', μ_2' = Integrationsgrenzen in μ'
 E_1', E_2' = Integrationsgrenzen in E'
 u_1', u_2' = Integrationsgrenzen in u'
 μ_1, μ_2 = Stützpunkt in μ

- u_i = Stützpunkte in u
- v = Korrekturterm der Lethargieintegration
- $\sum_{A,Q}$ = Summenzeichen: Summierung über Kern A und Anregungsenergien Q
- λ = Schwächungsparameter
- $Q(x,\mu)$ = äußere Quelle von Neutronen
- Δx = Intervall zwischen 2 Stützpunkten in x
- $\Delta \mu$ = Intervall zwischen 2 Stützpunkten in μ
- Δu = Intervall zwischen 2 Stützpunkten in u
- $\Delta u'$ = Integrationsgebiet in u' , z.B. für elastische Streuung $\Delta u' = \ln \frac{1}{1-\alpha}$
- h = $\sum_T \Delta x / \mu$
- \bar{j} = Strom = $\int_{-1}^{+1} P_1(\mu) f(\mu) d\mu$
- \bar{j}_2 = Strom in 2. Ordnung = $\int_{-1}^{+1} P_2(\mu) f(\mu) d\mu$
- $D(E)$ = energie- und ortsabhängige Diffusionskonstante
- $D(x)$ = effektive transporttheoretische ermittelte Diffusionskonstante
- $D_1(x)$ = aufgrund der P1-Näherung erhaltene Diffusionskonstante
- \bar{j} = $\int_{E_1}^{E_2} \bar{j}(E) dE$ über Energiegruppe gemittelter Strom

$\bar{\phi}$	$= \int_{E_1}^{E_2} \phi(E) dE$ über Energiegruppe gemittelter Fluß
$\Sigma_r(x)$	= elastischer Removalquerschnitt einer Energiegruppe
$\Sigma_{im}(x)$	= inelastischer Removalquerschnitt einer Energiegruppe
χ	= P1-Koeffizient des Stoßkerns der monoenergetischen Transportgleichung
ξ	= P1-Koeffizient des Quellterms der monoenergetischen Transportgleichung
λ	= Abfallkoeffizient des Quellterms der monoenergetischen Transportgleichung
β	$= \frac{\Sigma_s}{\Sigma_T}$
γ	$= \frac{\lambda}{\Sigma_T}$
η	$= \frac{Q_0}{\Sigma_T}$
Σ_{tr}	= Transportquerschnitt

\bar{A} bedeutet Mittelwert einer Größe A über Energiegruppe $E_1 - E_2$

$\langle A \rangle$ bedeutet Mittelwert einer Größe A über Ortsgebiet (a, b)

$\langle D \rangle$ = gebietsweises Mittel von $D(x)$ u.o. f.

1. Einleitung

In der Theorie der Reaktorabschirmung ist es üblich, mit dem kombinierten Removal-Diffusionskonzept zu arbeiten, um den Verlauf der Neutronenflüsse durch ein Reaktorschild zu berechnen. Dabei beruht das Removalkonzept auf der empirischen Tatsache, daß der schnelle Neutronenfluß sich recht gut durch einen Ansatz mit einer Exponentialfunktion darstellen läßt, während für die Neutronenabbremung und Thermalisierung einfach das in der Reaktorthorie bewährte Diffusionskonzept übernommen wird. Diese Methode hat ihre Berechtigung darin, daß insbesondere im Wasser die aus dem Reaktor stammenden Neutronen nach ihrem ersten Stoß viel Energie verloren haben und sich bei der weiteren Thermalisierung nicht mehr weit von ihrem Ort entfernen. Dies gilt jedoch nicht mehr in einem schweren Stoff wie das zur besseren γ -Abschirmung vielfach verwandte Eisen, in dem nach einem inelastischen Stoß keine wesentliche Abbremsung erfolgt. Hier erfolgt der Hauptteil der Moderation derart, daß die Neutronen zunächst aus dem Eisen in den besseren Moderator (Wasser) ausfließen, um dort erst weiter ihre Energie zu verlieren. Berücksichtigt man die Tatsache, daß in einem Schild die Neutronenflüsse räumlich stark abfallen, so ergibt sich ohne weiteres, daß die Diffusionstheorie sicherlich nur unter starken Einschränkungen zur Berechnung der Neutronenflußverläufe zu verwenden ist, nämlich solange der Eisenschild nicht zu stark ist. Dazu ist zu erwarten, daß wegen der starken Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte des Eisens sich die Neutronenspektren beim Durchgang durch die beiden Materialien relativ stark ändern und damit auch die Neutronengruppenkonstanten von der Stärke der Materialien abhängen.

Manuskript erhalten am 14. März 1967.

Aus diesem Grunde erscheint es sinnvoll, den Verlauf von Neutronenflüssen und -spektren durch einen Eisenschild einmal genauer zu verfolgen, insbesondere, wenn man berücksichtigt, daß der infrage kommende Energiebereich bisher der Messung absolut unzugänglich ist. Gleichzeitig ergibt sich die Gelegenheit, die in der Diffusionstheorie gemachten Vernachlässigungen einmal quantitativ zu studieren.

Von den verschiedenen Verfahren, die Neutronentransportgleichung zu lösen, zeichnet sich die direkte numerische Integration insbesondere für Mehrschichtenprobleme durch leichte Handhabung aus.

Ein numerisches Verfahren ist schon 1955 von Heller und Keller [1] angegeben worden. Der hohe Rechenaufwand und der singuläre Charakter des Transportkernes für Fortpflanzungsrichtungen senkrecht zur Strahlrichtung in ebener Geometrie lassen es immer noch als unmöglich erscheinen, dickere Abschirmanordnungen ohne starke Vereinfachungen durchzurechnen. [2], [4].

Die Benutzung der direkten numerischen Integration der Boltzmann-Gleichung für Neutronen für dieses spezielle Problem wird dadurch ermöglicht, daß für eine Berechnung von Neutronenspektren die Genauigkeitsansprüche nicht so hoch zu sein brauchen, wie z.B. für eine Berechnung von Aufbaufaktoren. [1].

Ferner ist es möglich, sich durch Benutzung geeigneter Randbedingungen auf einen Ausschnitt eines dickeren Reaktorschildes zu beschränken.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Zunächst wird im folgenden Abschnitt die Boltzmann-Gleichung für Neutronen angegeben und in der Spezialisierung

eines räumlich unendlich ebenen eindimensionalen Problems die Streukerne für elastische und inelastische Streuung abgeleitet. Im dritten Abschnitt wird das verwendete mathematische Verfahren dargestellt, dem im vierten die Erläuterung einiger Testrechnungen mit Angaben über die günstigste Auswahl der Stützstellen folgt. Im 5. Abschnitt werden die Beziehungen der Transportgleichung zur Diffusionsgleichung dargelegt zusammen mit dem Verfahren zur Ermittlung von Gruppenkonstanten für eine Diffusionsrechnung aus den erhaltenen Neutronenflüssen. In den Abschnitten 6 - 9 folgt die Diskussion der Ergebnisse, und zwar der Spektren (6), der Gruppenkonstanten (7), ein Vergleich der auf verschiedene Weise erhaltenen Konstanten in (8) und ein Vergleich der Ergebnisse einer Diffusionsrechnung mit den so erhaltenen Konstanten mit den ursprünglichen Neutronenflüssen im 9. Abschnitt. Abschnitt 10 enthält die Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen.

2. Die Boltzmann-Gleichung

a) Darstellung der Gleichung:

In ebener Geometrie lautet die energieabhängige Boltzmann-Gleichung für Neutronen [6]:

$$\mu \frac{\partial f(x, \mu, E)}{\partial x} + \Sigma_T(x, E) f(x, \mu, E) = \iint \sum_0 (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) f(x, \mu', E') dE' d\mu' + Q(x, E) \quad (2.1)$$

Darin ist der μ der Cosinus des Phasenraumwinkels zur Flächennormalen x , $\Sigma_T(x, E)$ der orts- und energieabhängige totale Wirkungsquerschnitt, $f(x, \mu, E)$ der pro Energieintervall dE in den Winkelbereich $d\mu$ fließende Neutronenfluß, $Q(x, E)$ eine angenommene isotrope äußere Quelle und $\sum_0 (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu)$ der Übergangsquerschnitt für einen Stoß eines Neutrons der Energie E' und mit einem Phasenraumwinkel μ' auf die Energie E und den Phasenraumwinkel μ .

In der Gleichung (2.1.) behandelt die linke Seite den örtlichen Transport der Neutronen der Energie E , indem sie die Bilanz zwischen den in das Volumenelement ein- und austretenden Neutronen durch das Glied

$$\mu \frac{\partial f(x, \mu, E)}{\partial x}$$

und der Anzahl der aus dem Energieintervall dE bei E herausgestoßenen Neutronen beschreibt. Die rechte Seite enthält alle in das Energieintervall dE am Orte x eintretenden Neutronen, und zwar ist $Q(x, E)$ die Anzahl der aus äußeren Quellen stammenden Neutronen und das Stoßintegral

$$\iint \sum_0 (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) f(x, \mu', E') d\mu' dE'$$

die Summe aller Neutronen, die mit der Anfangsenergie E' und der Anfangsflugrichtung $\mu' = \cos \vartheta'$ durch Stoß die Energie E und die Flugrichtung $\mu = \cos \vartheta$ erhalten.

Der Übergangsquerschnitt $\sum_0 (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu)$ läßt sich für jeden gestoßenen Kern A in der Form

$$\sum_0^A (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) = \sum_0^A (E') P^A (E \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \quad (2.2)$$

schreiben. $P^A (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu)$ ist dabei die Übergangswahrscheinlichkeit für ein Neutron bei einem Stoß von der Energie E' und dem Phasenraumwinkel u' auf die Energie E und u zu kommen.

$\sum_0^A (E)$ ist der makroskopische Streuquerschnitt. Diese Übergangswahrscheinlichkeit soll im folgenden abgeleitet werden.

b) Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit:

Da im Abbremsbereich die Geschwindigkeit der gestoßenen Kerne klein gegen die der Neutronen ist, wird angenommen, daß der gestoßene Kern A mit der Masse A vor dem Stoß ruht. Damit sind die Anfangsgeschwindigkeiten der Stoßpartner im Laborsystem und im Schwerpunktsystem eindeutig definiert, und die Kenntnis der Verteilung der Stoßwinkel im Schwerpunktsystem erlaubt die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit im Laborsystem [3]

$$P^A (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu)$$

Sei $\hat{\mu}$ der Cosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem und $\hat{\varphi}$ das entsprechende Azimut, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Stoß mit dem Stoßwinkel $\hat{\mu}$ stattfindet:

$$W(\hat{\mu}) d\hat{\mu} d\hat{\varphi} = \frac{1}{4\pi} g(\hat{\mu}) d\hat{\mu} d\hat{\varphi} \quad (2.3)$$

wobei $g(\hat{\mu})$ sich aus dem gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega(\hat{\mu})$ zu

$$g(\hat{\mu}) = \frac{4\pi}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\mu}) = \sum_0^{\infty} (2l+1) f_l(E) P_l(\hat{\mu})$$

(2.4)

ergibt. Die Wahrscheinlichkeit, einen Stoßwinkel $\tilde{\mu}$ im Laborsystem zu erhalten, ergibt sich daraus zu

$$W(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu} = \frac{g(\hat{\mu})}{4\pi} \frac{d\hat{\mu}}{d\tilde{\mu}} d\tilde{\mu} \quad (2.5)$$

da $d\hat{\varphi} = d\tilde{\varphi}$ ist. Hier ist $\hat{\mu}$ durch $\tilde{\mu}$ auszudrücken. Die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(E', \mu', \varphi' \rightarrow E, \mu, \varphi) dE d\mu d\varphi$$

ergibt sich daraus unter Zuhilfenahme des Energiesatzes

$$\begin{aligned} P(E', \mu', \varphi' \rightarrow E, \mu, \varphi) dE d\mu d\varphi &= \\ &= \frac{g(\hat{\mu})}{4\pi} \frac{d\hat{\mu}}{d\tilde{\mu}} \delta(E - \psi(E', \tilde{\mu})) dE d\mu d\varphi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

denn die Verteilung der Neutronen, die einen Stoßwinkel $\tilde{\mu}$ bei einer Anfangsenergie E' und einer Anfangsflugrichtung (μ', φ') eine Endenergie E bei Flugrichtung (μ, φ) erhalten, ist $\delta(E - \psi(E', \tilde{\mu}))$, wobei $\tilde{\mu}$ durch $\varphi, \varphi', \mu, \mu'$ auszudrücken ist. $E = \psi(E', \tilde{\mu})$ stellt dabei den Energiesatz dar. Da im ebenen Fall keine φ -Abhängigkeit der Flüsse vorliegt, im Gegenteil, in der Definition (2.1) die Integration vorweggenommen ist, kann diese auch hier durchgeführt werden, und man erhält unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die δ -Funktion bei festem E und E' zweimal im Intervall auftritt:

$$P(E', \mu' \rightarrow E, \mu) dE d\mu = \frac{g(\hat{\mu})}{2\pi} \frac{d\hat{\mu}}{d\tilde{\mu}} \frac{dE d\mu}{-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varphi'} |_{E=\psi(E', \tilde{\mu})}} \quad (2.7)$$

Es gilt also $\frac{d\hat{\mu}}{d\tilde{\mu}}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi'} |_{E=\psi(E', \tilde{\mu})}$ und $\frac{d\tilde{\mu}}{\partial \varphi}$ auszurechnen.

Zunächst ist nach dem Cosinussatz

$$\tilde{\mu} = \mu \mu' + \sqrt{(1-\mu^2)} \sqrt{(1-\mu'^2)} \cos(\varphi' - \varphi) \quad (2.8)$$

und damit:

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varphi'} = - \sqrt{(1-\mu^2)} \sqrt{(1-\mu'^2)} \sin(\varphi' - \varphi) \quad (2.9)$$

$\sin(\varphi' - \varphi)$ wird mit (2.9) eliminiert, und man erhält

$$\sin(\varphi' - \varphi) = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} - (\tilde{\mu} - \mu\mu')^2}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \varphi'} = - \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} - (\tilde{\mu} - \mu\mu')^2 \quad (2.11)$$

Um nun $\tilde{\mu}$, $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\mu}} \Big|_{E = \varphi(E', \tilde{\mu})}$ durch

E' und E auszudrücken, bedarf es einer Auflösung der Stoßgleichungen.

Lösung der Stoßgleichungen:

Der Allgemeinheit halber wird angenommen, daß es sich um einen inelastischen Stoß handelt, so daß im Schwerpunktsystem eine Reaktionsenergie Q verlorengeht.

Es ist also
$$E_1 = E_2 + Q \quad , \quad (2.12)$$

dabei ist

$$E_1 = \frac{\bar{m}}{2} v_1^S{}^2 \quad (2.13)$$

die Energie des Neutrons im Schwerpunktsystem vor dem Stoß mit $\bar{m} = m \frac{A}{A+1}$ = reduzierte Masse des Neutrons und

$$E_2 = \frac{\bar{m}}{2} v_2^S{}^2 \quad (2.14)$$

die Energie des Neutrons nach dem Stoß.

v_1^S, v_2^S sind die Neutronengeschwindigkeiten im Schwerpunktsystem

$$v_{1,2}^S = v_{1,2} - v_S \quad (2.15)$$

wobei v^S = Schwerpunktschwindigkeit, im Falle ruhenden Kerns

$$v^S = \frac{v_1}{A+1} \quad (2.16)$$

Einsetzen in die Energiebilanzgleichung ergibt (2.12)

$$(v_1 - v_S)^2 = (v_2 - v_S)^2 + \frac{2Q}{m} \quad (2.17)$$

oder mit (2.16)

$$v_1^2 \left(\frac{A-1}{A+1} \right) = v_2^2 - \frac{2v_1 v_2}{A+1} + \frac{2Q}{m} \quad (2.18)$$

Mit $w_1 w_2 = v_1 v_2 \tilde{\mu}$ erhält man

$$v_1^2 \left(\frac{A-1}{A+1} \right) = v_2^2 - \frac{2v_1 v_2 \tilde{\mu}}{A+1} + \frac{2Q}{m} \quad (2.19)$$

und nach Auflösung nach $v_2/v_1 = \sqrt{E/E'}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{E}{E'}} = \frac{1}{A+1} \left(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + A^2 - 1 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} \right), \quad (2.20)$$

wobei sich das positive Vorzeichen der Wurzel aus $E = E'$ für

$\tilde{\mu} = 1$ und $Q = 0$ ergibt. Es wird damit

$$E = 4(E', \tilde{\mu}) = \frac{E'}{(A+1)^2} \left(2\tilde{\mu}^2 + A^2 - 1 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A} + 2\tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 + A^2 - 1 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} \right) \quad (2.21)$$

und die Auflösung nach $\tilde{\mu}$ ergibt.

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} (A+1) - \sqrt{\frac{E'}{E}} (A-1) + \frac{Q(A+1)^2}{\sqrt{E \cdot E'} A} \right) \quad (2.22)$$

Die Beziehung zwischen dem Stoßwinkel im SPS $\hat{\mu}$ und dem Stoßwinkel im Laborsystem ergibt sich aus

$$\begin{aligned} w_1^S w_2^S &= v_1^S v_2^S \hat{\mu} = (w_1 - w_s, w_2 - w_s) \\ &= \frac{A}{A+1} (w_1, w_2 - w_s) \\ &= \frac{A}{A+1} v_1 v_2 \tilde{\mu} - \frac{A}{(A+1)^2} v_1^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mit $v_1^{S2} = v_2^{S2} + \frac{2Q}{m}$ (2.12) wird

$$v_1^S \sqrt{v_1^{S2} - \frac{2Q}{m}} \hat{\mu} = \frac{A}{A+1} v_1 v_2 \tilde{\mu} - \frac{A}{(A+1)^2} v_1^2 \quad (2.24)$$

und mit $v_1^S = \vartheta_1 \frac{A}{A+1}$ (2.25)

$$\mu_1^1 = \frac{A v_2 \tilde{\mu} - \frac{A}{A+1} v_1}{A \sqrt{\left(\frac{A}{A+1} v_1\right)^2 - \frac{2Q}{\tilde{\mu}}}} \quad (2.26)$$

und bei Übergang zur Energie mit Einsetzen von v_2

$$\mu_1^1 = \frac{\tilde{\mu}^2 + \tilde{\mu} \sqrt{\tilde{\mu}^2 + A^2 - 1 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} - 1}{\sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}}} \quad (2.27)$$

Der Vergleich mit $\psi(E', \tilde{\mu})$ zeigt, daß

$$\mu_1^1 \sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} = \frac{\psi(E', \tilde{\mu})}{2E'} (A+1)^2 - \frac{1}{2} \left(A^2 - 1 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A} \right) \quad (2.28)$$

damit wird aber

$$\frac{\partial \mu_1^1}{\partial \tilde{\mu}} \sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} = \frac{(A+1)^2}{2E'} \frac{\partial \psi(E', \tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}} \quad (2.29)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{\mu}} / \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mu}} = \frac{(A+1)^2}{2E' \sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}}} \quad (2.30)$$

Da $\tilde{\mu}$ in diesem Ausdruck nicht mehr enthalten ist, entfällt das Ersetzen von $\tilde{\mu}$ nach (2.22).

Es wird also zusammengesetzt aus (2.30), (2.7), (2.11)

$$dE d\mu P(E', \mu_1^1 \rightarrow E, \mu) = \frac{g(\tilde{\mu})}{\pi \alpha E'} \frac{dE d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2 - \mu_1^1{}^2 - \tilde{\mu}^2 + 2\mu \mu_1^1 \tilde{\mu}}} \quad (2.31)$$

wobei

$$\alpha = \frac{4}{(A+1)^2} \sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} \quad (2.32)$$

$$\tilde{m} = \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} + \frac{Q}{A} \frac{(A+1)^2}{\sqrt{EE'}} \right] \quad (2.22)$$

$$\mu = \frac{\tilde{m}^2 - 1 + \tilde{m} \sqrt{\tilde{m}^2 + A^2 - 1 - Q/E' (A+1)^3/A}}{\sqrt{A^2 - Q/E' (A+1)^3/A}} \quad (2.27)$$

Durch Einsetzen von $Q = 0$ ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit für elastische Streuung.

Das Stoßintegral setzt sich damit folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} S(x, \mu, E) &= \iint \sum_Q (E', \mu' \rightarrow E, \mu) f(x, \mu', E') dE' d\mu' = \\ &= \sum_A \iint \frac{\sum_{\sigma}^A(E')}{\pi \alpha_A E'} \frac{g_{el}^A(\tilde{m}) f(x, \mu', E')}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2) - (\tilde{m} - \mu\mu')^2}} dE' d\mu' + \\ &+ \sum_{Q, A} \iint \frac{\sum_{inel}^A(E')}{\pi \alpha E'} \frac{g_{in}^A(\tilde{m}) f(x, \mu', E')}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2) - (\tilde{m} - \mu\mu')^2}} dE' d\mu' \end{aligned} \quad (2.33)$$

wobei die Summation über alle Kerne A geht und über alle Anregungsstufen Q eines Kerns A im zweiten Term.

Die Integrationsgrenzen von μ' ergeben sich aus dem Verschwinden der Wurzel:

$$\mu'_{1,2} = \mu \tilde{m} \pm \sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{m}^2)} \quad (2.34)$$

Die Integrationsgrenzen über E' ergeben sich aus $\tilde{m} = \pm 1$

$$E'_{1,2} = \frac{E}{(A-1)^2} \left(\pm 1 + \sqrt{A^2 + \frac{Q}{E} \frac{(A-1)}{A} (A+1)^2} \right)^2 \quad (2.35)$$

und im Falle $Q = 0$ wird

$$E'_{1,2} = \left(\frac{A \pm 1}{A - 1} \right)^2 E \quad (2.35 \text{ a})$$

c) Der Transportkern:

Bisher wurde ausschließlich die rechte Seite der Gleichung (2.1) behandelt. Die differentielle Form der Neutronenbilanz im räumlichen Volumenelement (linke Seite der Gleichung (2.1)) ist für eine numerische Rechnung wenig vorteilhaft, da für kleine μ ein Approximationsfehler in einer Interpolationsformel sich relativ stark auf ein neu zu berechnendes $f(x + \Delta x)$ überträgt. Daher erscheint es vernünftiger, zur sogenannten Integralform der Boltzmann-Gleichung überzugehen, die man erhält, indem man das Inverse des linearen Operators der linken Seite von (2.1) bildet. Die Greensche Funktion der Differentialgleichung erster Ordnung in x

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma_T(x) f = W(x, \mu) \quad (2.36)$$

lautet

$$T(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu} \int_{x'}^x \Sigma_T(x'') dx''} & \text{für } \mu > 0 \text{ und } x > x' \\ \frac{1}{|\mu|} e^{-\frac{1}{\mu} \int_x^{x'} \Sigma_T(x'') dx''} & \text{für } \mu < 0 \text{ und } x < x' \\ \frac{1}{\Sigma_T(x)} \delta(x' - x) & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.37)$$

und die Auflösung von (2.36) ist damit

$$f(x, \mu) = \int_{a,b}^x e^{-\frac{1}{\mu} \int_{x'}^x \Sigma_T(x'') dx''} W(x', \mu) \frac{dx'}{\mu} \quad (2.38)$$

$T(x, x')$ wird im folgenden auch Transportkern genannt.

Die unteren Grenzen des Integrals gelten für den Bereich (a, b) , in dem $W(x)$ von Null verschieden ist, und zwar ist die linke Grenze a für $\mu > 0$ einzusetzen und die rechte Grenze b für $\mu < 0$. Im Falle $\mu = 0$ wird die Gleichung (2.38) einfach durch Grenzwertbildung zu

$$f(x, 0) = \frac{W(x, 0)}{\sum_T(x)} \quad (2.39)$$

Diese Integralform läßt für $\sum_T = \text{const}$ noch eine weitere, für numerische Zwecke günstige Umformung zu. Es sei $f(x, \mu)$ mit $\mu > 0$ bekannt, und $f(x + \Delta x, \mu)$ werde gesucht. Dann erhält man durch Zerlegung des Integrals

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, \mu) &= \int_a^x \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\sum_T(x + \Delta x - x')}{\mu}} W(x', \mu) + \int_x^{x + \Delta x} \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\sum_T(x + \Delta x - x')}{\mu}} W(x', \mu) \\ &= f(x, \mu) e^{-\frac{\sum_T \Delta x}{\mu}} + \int_x^{x + \Delta x} \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\sum_T(x + \Delta x - x')}{\mu}} W(x', \mu) \quad (2.40) \end{aligned}$$

Das heißt, man kann $f(x, \mu)$ durch fortlaufende Integration von links nach rechts erhalten. Für $\mu < 0$ gilt die gleiche Beziehung für eine Integration von rechts nach links.

d) Zusammenfassung:

Die bisher abgeleitete Gleichung in der Spezialisierung auf ebene Geometrie ergibt sich zusammengefaßt aus den Gleichungen (2.33) und (2.38) damit zu,

$$\begin{aligned} f(x, \mu, E) &= \int_{a,b}^x \frac{dx'}{\mu} e^{-\frac{\sum_T(x-x')}{\mu}} \left[\sum_A \int_{E_1'}^{E_2'} \int_{\mu_1'}^{\mu_2'} \frac{\sum_0^A(E')}{\pi \alpha E'} \frac{g^A(\mu') f(x', \mu', E') d\mu' dE'}{\sqrt{1 - \mu_1'^2 \mu_2'^2 - \mu'^2 + 2\mu_1' \mu_2' \mu'}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{A,Q} \int_{E_1'}^{E_2'} \int_{\mu_1'}^{\mu_2'} \frac{\sum_{in}^{A,Q}(E')}{\pi \alpha E'} \frac{g^{A,Q}(\mu') f(x', \mu', E') d\mu' dE'}{\sqrt{(1 - \mu_1'^2)(1 - \mu_2'^2) - (\mu_1' - \mu_2')^2}} + Q(x', E) \right] \quad (2.41) \end{aligned}$$

wobei im 1. Term die Grenzen

$$\mu'_{1,2} = \mu \tilde{\mu} \pm \sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)} \quad (2.41 \text{ a})$$

$$E'_{1,2} = \left(\frac{A+1}{A-1} \right)^2 E \quad (2.41 \text{ b})$$

mit

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left((A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) \quad (2.41 \text{ c})$$

$$\alpha = \frac{4A}{(A+1)^2} \quad (2.41 \text{ d})$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{A} \left(\tilde{\mu}^2 - 1 + \tilde{\mu} \sqrt{A^2 - 1 + \tilde{\mu}^2} \right) \quad (2.41 \text{ e})$$

und im 2. Term für inelastische Streuung

$$\mu'_{2,1} = \mu \tilde{\mu} \pm \sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)} \quad \text{wie oben} \quad (2.41 \text{ f})$$

$$E'_{2,1} = \frac{E}{(A-1)^2} \left(\sqrt{A^2 + \frac{Q}{E'} \frac{(A-1)}{A} (A+1)^2} \pm 1 \right)^2 \quad (2.41 \text{ g})$$

mit

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left((A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} + \frac{Q}{\sqrt{EE'}} \frac{(A+1)^2}{A} \right) \quad (2.41 \text{ h})$$

$$\alpha = \frac{4}{(A+1)^2} \sqrt{A^2 - \frac{Q}{E'} \frac{(A+1)^3}{A}} \quad (2.41 \text{ i})$$

$$\hat{\mu} = \frac{(\tilde{\mu}^2 - 1 + \tilde{\mu} \sqrt{A^2 - 1 + \tilde{\mu}^2 - Q/E' (A+1)^3/A})}{\sqrt{A^2 - Q/E' (A+1)^3/A}} \quad (2.41 \text{ k})$$

sind.

Wenn man berücksichtigt, daß im elastischen Stoßkern der Grenzwert

$$\lim_{\tilde{\mu} \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2) - (\tilde{\mu} - \mu\mu')^2}} = \pi \delta(\mu' - \mu) \quad (2.42)$$

ist, dann erkennt man, daß hier eine Gleichung vom Volterra-schen Typus vorliegt. Diese macht bezüglich der Frage der Existenz von Lösungen keinerlei Schwierigkeiten, doch muß jedes numerische Interpolationsverfahren die Tatsache berücksichtigen, daß $f(x, \mu, E)$ bei der Ermittlung von $f(x, \mu, E)$ im Integral selber vorkommt. Andererseits ist zur Lösung kein Iterationsverfahren erforderlich, was sich in der Rechenzeit als sehr vorteilhaft darstellt.

Eine weitere Umformung erleichtert die Auswahl der Energiestützpunkte. Im elastischen Stoßterm ist die Breite des Integrationsintervalls über die Energie selbst noch energieabhängig. Bei Übergang zur Lethargie u erhält man mit E_0 als Nullpunkt der Lethargieeinteilung

$$E = E_0 e^{-u} \quad \frac{dE}{E} = -du$$

als neue Grenzen für u im 1. Term

$$u_1' = u \quad , \quad u_2' = u - 2 \ln \left(\frac{A+1}{A-1} \right) = u - \Delta u \quad (2.43 a)$$

und im 2. Term

$$u_{2,1}' = u - 2 \ln \left(\frac{\sqrt{A^2 + \frac{Q}{E_0} e^u \frac{A-1}{A} (A+1)^2} \pm 1}{A-1} \right) \quad (2.43 b)$$

In der Gleichung (2.41) ist E und E' in $f(x, \mu, E)$, \sum_s und \sum_T durch u und u' zu ersetzen, dE'/E' durch du' und in den Ausdrücken für $\tilde{\mu}$, α , $\hat{\mu}$ E/E' durch $e^{(u'-u)}$ ferner Q/E' durch $Q/E_0 e^u$. In dieser Darstellung behält f die Bedeutung des Winkelflusses pro Energieintervall.

e) Randbedingungen:

Die mit Gleichung (2.40) gegebene Form der schrittweisen Integration in örtlicher Richtung stößt bei der Erfassung von Randwerten an den Grenzen des Integrationsgebietes auf keinerlei

Schwierigkeiten, wenn diese Randwerte bekannt sind. Es ist jedoch anzumerken, daß an allen Grenzen nicht $f(x, \mu)$ stetig sein muß, sondern $\mu f(x, \mu)$. Das bedeutet, daß die Funktion $f(x, \mu)$ für $\mu = 0$ an diesen Stellen unstetig sein kann und es meistens auch ist. Während für $\mu \neq 0$ die Randwerte einfach in das neue Medium übertragen werden können, muß man für $\mu = 0$ mit den rechten ($\mu > 0$) bzw. linken ($\mu < 0$) Grenzwerten arbeiten. Der rechte Grenzwert ergibt sich dabei aus dem vor der Grenze liegenden Material und der linke aus dem dahinterliegenden nach Formel (2.39). Im Transportkern zeichnet sich dieses Verhalten dadurch aus, daß $1/\mu \exp(-\Sigma_T(x'-x)/\mu)$ für $\mu = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt.

Da das Stoßintegral an beiden Seiten einer Materialgrenze verschiedene Werte annimmt, ist es günstig, die Ortsstützpunkte ebenfalls doppelt zu nehmen und sie als linken und rechten Grenzwert an der Materialgrenze zu definieren. Um einen Ausschnitt aus einem dickeren Reaktorschild zu berechnen, muß man sich die Randwerte an den Stellen $x=a$ und $x=b$ beschaffen. Da das Neutronenspektrum im Wasser recht schnell einem Gleichgewichtszustand zustrebt, kann man dieses in recht guter Näherung erhalten, indem man ein sogenanntes asymptotisches Spektrum berechnet. Dieses zeichnet sich dadurch aus, daß die Energie-Winkelverteilung nicht vom Orte abhängt. Setzt man

$$f(x, \mu, E) = e^{-\lambda x} \tilde{f}(\mu, E) \quad W(x, \mu, E) = e^{-\lambda x} \tilde{W}(\mu, E)$$

so erhält man aus der Gleichung

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu, E) + \Sigma_T f(x, \mu, E) = W(x, \mu, E) \quad (2.44)$$

$$(-\mu\lambda + \Sigma_T) \tilde{f}(\mu, E) = \tilde{W}(\mu, E) \quad (2.45)$$

$$\tilde{f}(\mu, E) = \frac{\tilde{W}(\mu, E)}{\Sigma_T - \mu\lambda} \quad (2.46)$$

Für $x = a, \mu \geq 0$ kann man nun dieses Spektrum einsetzen; für $x = b, \mu \leq 0$ muß man es mit einem mittleren Abschwächungsfaktor multiplizieren. Aus dem Verlauf der Flüsse nach fertiger Rechnung kann man dann nachprüfen, wieweit diese Annahme gerechtfertigt ist. Macht man die der Eisenschicht vorangehende und nachfolgende Wasserschicht genügend dick, so ist zu erwarten, daß der aus den Randwerten folgende Einfluß genügend klein wird.

3. Mathematisches Verfahren zur numerischen Integration

a) Allgemeine Bemerkungen zur Auswahl des Verfahrens und zu Besonderheiten wegen des Typs der Gleichung:

Die Gleichung (2.41) besitzt an zwei Stellen Singularitäten; einmal die wesentliche Singularität im Transportkern für $\mu = 0$, über die im vorigen Abschnitt schon gesprochen wurde, zum zweiten ist aber auch der Stoßkern in μ, μ' singular, in der Form, daß er unendliche Werte annimmt, wenn der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet. Das Verschwinden der Wurzel gibt gleichzeitig die Grenze des Integrationsgebietes an. Dieses ist für $\mu = 1, 1/\sqrt{2}, 0$ und -1 in Abbildung 1 dargestellt. Als Ordinate wurde $\tilde{\mu}$ gewählt, die Integrationsvariable ist jedoch u' . Dadurch wird der Ordinatenmaßstab noch etwas verzerrt. Wie die rechts und links von der Figur angegebenen Werte von $\Delta u = u - u'$ für $A = 1$ und $A = 2$ zeigen, ist nur beim Wasserstoff die Verzerrung erheblich, während schon für $A = 2$ der für große A gültige lineare Zusammenhang

$$\Delta u \approx \frac{2}{A} (1 - \tilde{\mu})$$

von Δu mit $\tilde{\mu}$ recht gut gegeben ist.

Wollte man den Streukern durch lineare Interpolation gut erfassen, dann müßte man die Fläche $-1 \leq \mu' \leq 1, -1 \leq \tilde{\mu} \leq 1$ möglichst gleichmäßig und dicht mit Stützpunkten belegen. Dies würde jedoch zu einem unerträglich hohen Aufwand führen. Es ist daher günstiger, von der Tatsache auszugehen, daß der Neutronenfluß als Funktion von μ erheblich glatter verläuft und den Streukern möglichst exakt zu erfassen. Dann kommt man mit linearer Interpolation und verhältnismäßig wenigen Stützpunkten aus.

Bei der Integration über u' ist zu beachten, daß der Stoßquerschnitt unter dem Integral steht, der seinerseits stark von der Energie abhängt. Glücklicherweise ist meist die Stoßdichte eine recht glatte Funktion, wenn man von einer in der Energie deltafunktionsartigen oder gar monodirektionalen Quelle einmal absieht. Die Reihenfolge der Auswertung ist durch die Struktur der Gleichung (2.41) vorgegeben. Unter der Voraussetzung, daß in das Lethargieintervall $(u - 2 \ln \frac{A+1}{A-1}, 21)$ noch genügend Stützpunkte fallen

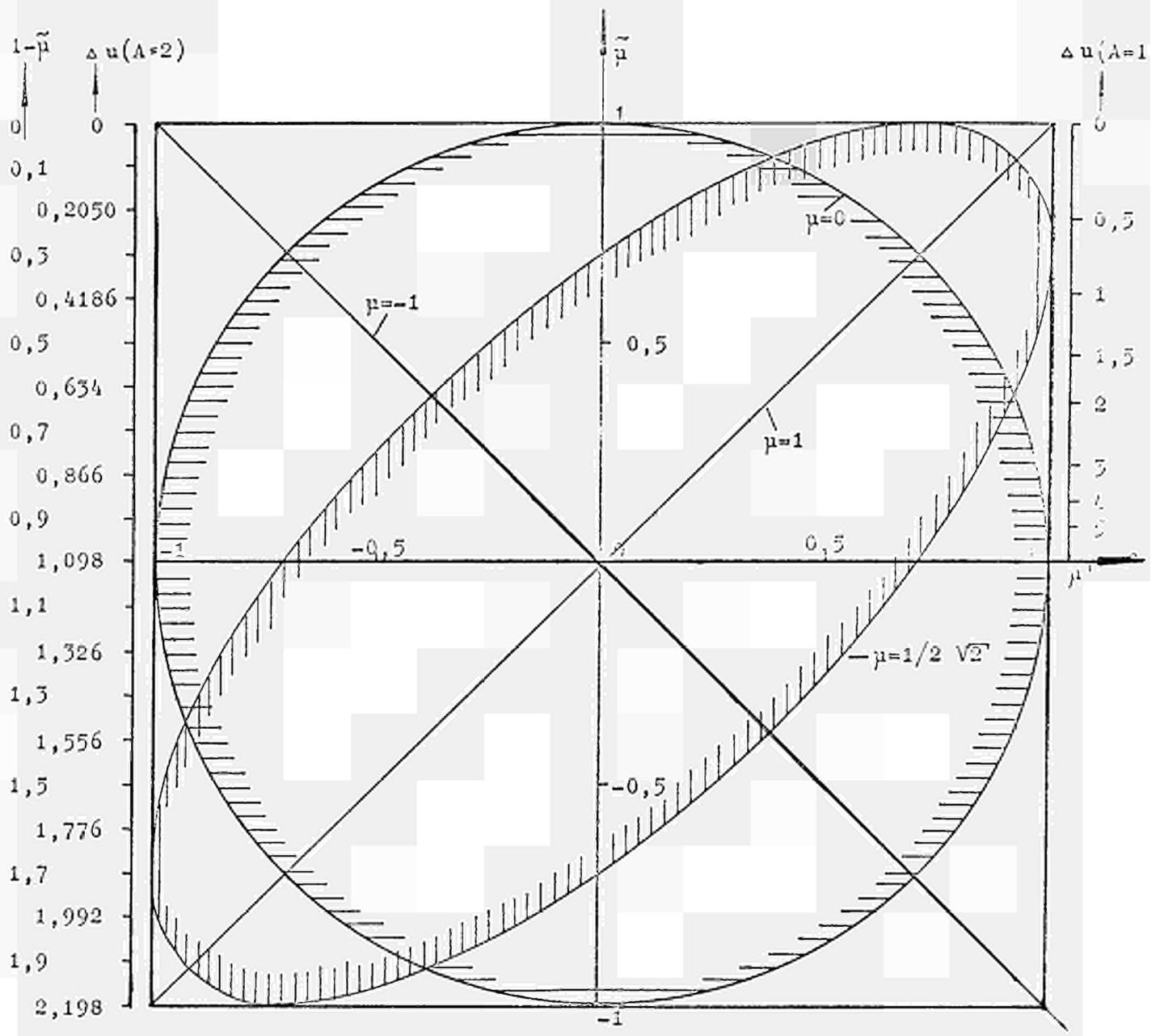


Abb. 1

Integrationsgebiete über u' und u . Ordinate \tilde{u} , $u'-u=\Delta u(\tilde{u})$ für $A=2$ und $A=1$ links und rechts dazuge tragen.

Parameter ist μ .

kann man die Integration über μ' zuerst ausführen. Anschließend wird die Integration über die Lethargie ausgeführt. Die Integration über μ' beseitigt die Singularität im Stoßkern, und die Genauigkeit des Verfahrens ist nur noch davon abhängig, wie gut sich der Fluß als Funktion des Winkels μ und die Stoßdichte für vorgegebenes μ als Funktion von u' durch lineare Interpolation darstellen lassen. Das wird jedoch mit Ausnahme eines monodirektionalen Flusses und gewisser Sonderfälle durchweg der Fall sein. Die Integration kann jedoch den Fall $u' = u$ nicht erfassen. Da hier der Stoßkern das Verhalten einer δ -Funktion in μ' annimmt, ist es möglich, diesen Term zunächst nur formal mit einzubeziehen und nach Durchführung der Ortsintegration durch eine Korrektur den endgültigen Wert zu ermitteln.

Diese Korrektur erfordert ebenfalls, daß noch mindestens einige Lethargiestützpunkte in ein Stoßintervall fallen. Da der Korrekturterm nicht zu große Werte annehmen darf, ergibt sich aus der Gleichung (2.41) mit (2.42) bei linearer Interpolation, daß für $\mu = 0$

$$\frac{1}{2} \sum_A \frac{\sum_0^A}{\sum_T} \frac{\Delta u}{\alpha} g^A(1) \ll 1 \quad \text{mit } \alpha = \frac{4A}{(A+1)^2} \quad (3.2)$$

sein muß, und man erhält für große A , daß Δu klein gegen $8/A g^A(1)$ sein muß. Wenn die Stoßdichte einen relativ glatten Verlauf besitzt, kann diese Bedingung ebenfalls abgeschwächt werden. Da aber die obengenannte Bedingung erfordert, daß

$$\Delta u \ll 2 \ln \frac{A+1}{A-1} \approx \frac{4}{A} \quad (3.3)$$

ist, sind außer bei extremen Werten von $g^A(1)$ beide Bedingungen identisch.

Im Falle der inelastischen Streuung wird die Breite des

Integrationsgebietes in der Lethargie

$$\Delta u' = 2 \ln \frac{\sqrt{A^2 + Q/E_0 \cdot e^{u'} (A-1)/A \cdot (A+1)^2} + 1}{\sqrt{A^2 + Q/E_0 \cdot e^{u'} (A-1)/A \cdot (A+1)^2} - 1} \quad (3.4 a)$$

$$\Delta u' \approx \frac{4}{A} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{Q}{E_0} e^{u'}}} \quad (3.4 b)$$

für $A \gg 1$. Hier sind zwar beide Grenzen fest vorgegeben, doch wird für $Q/E = Q/E_0 \cdot e^u > 1$ das Integrationsgebiet immer kleiner. Dieses erfordert für die Integration des Stoßterms besondere Maßnahmen, falls $\Delta u' \approx \Delta u$ wird.

Die Ortsintegration kann für jedes μ ohne Zwang durchgeführt werden. Es ist auch hier zweckmäßig, die Interpolation über die Quellstärken durchzuführen und den Transportkern exakt durchzuziehen. Dies ist besonders dann ersichtlich, wenn man berücksichtigt, daß für kleine $|\mu|$ die Exponentialfunktion $e^{-\Sigma_T x/\mu}$ rasch abfällt. Es hat sich ferner gezeigt, daß eine lineare Interpolation in x über die Quellstärken recht unzulänglich ist und eine sehr feine Einteilung der x -Stützpunkte erfordert. Da Flußverläufe in Abschirmungsschichten weitgehend exponentiell abfallen, erscheint es zweckmäßiger, logarithmisch zu interpolieren, auch im Hinblick auf die Tatsache, daß jede Störung im Winkelfluß $f(x, \mu, u)$ wie $e^{-\Sigma_T/\mu \cdot x}$ abfällt und für kleine $|\mu|$ damit schon erhebliche Fehler auftraten.

Wir erhalten damit folgende Zerlegung der Gleichung (2.41):

1)

$$G(x', \mu, u') = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{f(x', \mu', u') d\mu'}{\sqrt{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) - (\mu' - \mu_1 \mu_2)^2}} \quad (3.5)$$

2)

$$H^A(x, \mu, u) = \int_{u_1^A}^{u_2^A} \sum_0^A(u') G(x', \mu, \mu') g^A(\hat{\mu}) du' \quad (3.6)$$

$$u_1^A = u - 2 \ln \frac{A+1}{A-1}$$

mit $\hat{\mu} = \hat{\mu}(u', u)$

$$3) S(x', \mu, u) = \sum_A \frac{H^A(x', \mu, u)}{4\pi A} (A+1)^2 + \sum_{A,Q} \frac{H^{AQ}(x', \mu, u)}{\pi \alpha_{in}} \quad (3.7)$$

$$4) f(x, \mu, u) = \int_{\mu'} \frac{dx'}{\mu'} e^{-\frac{\Sigma(x-x')}{\mu}} [S(x', \mu, u) + Q(x', \mu, u)] \quad (3.8)$$

wobei in (3.6) der letzte Stützpunkt $u'_2 = u$ nicht erfaßt werden kann und dafür in (3.8) die oben beschriebene Korrektur durchgeführt wird. Die Größe H^{AQ} wird ähnlich wie H^A ermittelt, wobei Gleichung (3.5) formal bestehenbleibt, in (3.6) die Grenzen nach (2.43 b) zu ändern sind und das Ergebnis mit der Definition für α_{in} (2.41i) in (3.7) zu addieren ist.

Zur Berechnung des asymptotischen Spektrums ist die Formel (3.8) durch die folgende zu ersetzen:

$$f(x, \mu, u) = \frac{1}{\Sigma_T - \lambda \mu} (S(x, \mu, u) + Q(x, \mu, u)) \quad (3.9)$$

wobei λ kleiner sein muß als alle vorkommenden Σ_T . Dieser Fall ist im Wasser leicht gegeben, wenn man für λ ein Σ_T genügend hoher Anfangsenergie wählt.

b) Interpolationsformeln:

Bei Benutzung einer linearen Interpolation für die Auswertung der Integrale ergeben sich die folgenden Formeln:

Seien μ_1 und μ_2 zwei Stützpunkte, an denen die Winkel Flüsse $f(\mu_1)$ und $f(\mu_2)$ bei festgehaltenen x' und u' bekannt seien, dann ist bei linearer Interpolation im Intervall ($\mu_1 < \mu < \mu_2$)

$$f(\mu') = f(\mu_1) + \frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \times (f(\mu_2) - f(\mu_1)) \quad (3.10)$$

und es wird mit $\Delta \mu = \mu_2 - \mu_1$, wenn keine Grenzen μ'_1 oder μ'_2

in das Intervall fallen

$$\begin{aligned}
 G(u') &= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{f(\mu') d\mu'}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)} - (\mu' - \mu\tilde{\mu})^2} = \\
 &= \left(f(\mu_1) - \frac{\mu_1 - \mu\tilde{\mu}}{\Delta\mu} (f(\mu_1) - f(\mu_2)) \right) \cdot \left(\arcsin \frac{\mu_1 - \mu\tilde{\mu}}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)}} - \arcsin \frac{\mu_2 - \mu\tilde{\mu}}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)}} \right) \\
 &\quad - \frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\Delta\mu} \left(\sqrt{1-\mu^2-\mu_2^2-\tilde{\mu}^2+2\mu\mu_2\tilde{\mu}} - \sqrt{1-\mu^2-\mu_1^2-\tilde{\mu}^2+2\mu\mu_1\tilde{\mu}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wenn die linke Integrationsgrenze $\mu_1' = \mu\tilde{\mu} - \sqrt{(1-\mu^2)(1-\tilde{\mu}^2)}$ im Intervall liegt, ist in (3.11) μ_1 durch μ_1' zu ersetzen, d.h. der arcsin durch $-\frac{\pi}{2}$ und die Wurzel durch Null. Analog gilt für den Fall, daß die rechte Grenze in das Intervall fällt, daß μ_2 zu ersetzen ist und infolgedessen der arcsin zu $\frac{\pi}{2}$ wird. Fallen beide Integrationsgrenzen in das Intervall (μ_1, μ_2) , dann verschwinden alle Wurzel­ausdrücke, und man erhält

$$G(u') = \pi \left(f(\mu_1) - \frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\Delta\mu} (\mu_1 - \mu\tilde{\mu}) \right) \tag{3.12}$$

Die Integration über die Stoßdichte hat zu berücksichtigen, daß das Ende des Integrationsbereiches nicht auf einen Stützpunkt fällt, und es wird nach der Kettenregel mit $K = \left[\frac{\Delta u'}{\Delta u} \right]$ (ganzzahliger Anteil)

$$\begin{aligned}
 H^A(x', \mu, u) &= \int_{u_2'=11}^{u_1'=11} \sum_s^A(u') G(u') g^A(\hat{\mu}') du' = \\
 &= \sum_{i=1}^{K-1} \sum_0^A(u_i') G(u_i') g^A(\hat{\mu}_i') \Delta u + \\
 &\quad + \frac{\Delta u' - (K-1)\Delta u}{2} \sum_0^A(u'_K) G(u'_K) g^A(\hat{\mu}'_K) + \frac{\Delta u' - K\Delta u}{2} \sum_0^A(u - \Delta u) G(u - \Delta u) g^A(\hat{\mu}) \\
 &\quad + \frac{\pi}{2} f(u) \Delta u \sum_0^A(u) g^A(1)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

wobei u_i' die Stützpunkte in u' , μ_i' die zu u_i' und u gehörigen Cosini der Stoßwinkel im Schwerpunktsystem sind und die Werte an der Stelle $u - \Delta u'$ wieder durch lineare Interpolation zwischen den Stützstellen erhalten werden können.

Der Term

$$\frac{\pi}{2} \Delta u \sum_0^A(u) g^A(\mu) f(u)$$

kann an dieser Stelle nicht ausgerechnet werden, er wird weiter übertragen und dient zur Berechnung der oben besprochenen Korrektur. Da für inelastische Streuung die Breite des Integrationsintervalls immer kleiner wird, muß Vorsorge getroffen werden, daß das gesamte Integrationsintervall zwischen zwei Stützpunkte fallen kann. In diesem Fall gilt die gewöhnliche Annahme, daß alle Neutronen die Energie Q verlieren und unter der weitergehenden Annahme, daß der mittlere Stoßwinkel im Laborsystem Null ist,

$$H^{A,Q}(x', \mu, u) = \frac{2\pi \sum_{in}^{A,Q}(u) \int_{-1}^1 f(x, u', u') d\mu'}{\sqrt{(A^2-1)(1+Q/E_0 e^u (A+1)/A)}} \quad (3.14)$$

Nach Formel (3.7) ergibt sich dann $S(x', \mu, u)$, wobei der Term

$$\sum_A \frac{\pi}{2} \Delta u \frac{\sum_0^A(u)}{x^A} g^A(\mu) f(x, \mu, u) = V \cdot f(x, \mu, u)$$

wieder übertragen wird, um erst in der Ortsintegration benutzt zu werden.

Die Formeln für die Ortsintegration erhält man, indem man das Stoßintegral $S(x', \mu, u)$ in $S'(x', \mu, u) = S'(x', \mu, u) + v f(x', \mu, u)$ zerlegt und zunächst darüber linear interpoliert. Man erhält mit $h = \frac{\sum_T \Delta x}{\mu}$

$$f(x, \mu, u) = \left[f(x-\Delta x, \mu, u) e^{-h} + \frac{S'(x-\Delta x)}{\sum_T(u)} (1-e^{-h}) + \frac{S'(x) - S'(x-\Delta x)}{\sum_T \cdot h} (1-(1+h)e^{-h}) + \frac{v f(x-\Delta x)}{\sum_T} \left(1 - \frac{1-e^{-h}}{h}\right) \right] / \left[1 - \frac{v}{\sum_T} \frac{1-(1+h)e^{-h}}{h} \right] \quad (3.15)$$

wobei sich der Wert des Korrekturtermes durch Hinüberziehen aller $f(x, \mu, u)$ enthaltenden Terme auf die linke Seite ergibt. Für $\mu < 0$ und Integration vom Punkt $x + \Delta x$ bis x

ist lediglich das Argument $x - \Delta x$ durch $x + \Delta x$ zu ersetzen. Für $\mu = 0$ wird einfach

$$f(x, 0, u) = \frac{S'(x, 0, u)}{\Sigma_T (1 - v/\Sigma_T)} \quad (3.16)$$

Die logarithmische Interpolation erhält man, indem man in $S(x, \mu, u)$ dieses $f(x, \mu, u)$ einsetzt. Es wird

$$f(x) = f(x - \Delta x) e^{-h} + \frac{S(x) - S(x - \Delta x)}{\Sigma_T + \frac{\mu}{\Delta x} \log \frac{S(x)}{S(x - \Delta x)}} \quad (3.17)$$

mit

$$S(x) = S'(x) + v f(x)$$

Diese Formel sollte eigentlich iteriert werden, Tests ergaben jedoch, daß in dem infrage kommenden Bereich von v , h und Σ_T eine genügende Genauigkeit durch eine einmalige Korrektur erreicht wird.

Zur Berechnung der asymptotischen Spektren kann der Formalismus für die Berechnung von $S(x, u, k)$ benutzt werden. Die Ortsintegration wird jedoch dann einfach

$$f(x, \mu, x) = \frac{S(x, \mu, u)}{\Sigma_T - \lambda \mu - v} \quad (3.18)$$

wobei $\lambda < \Sigma_T - v$ sein muß

c) Aufbau des Programms und Schema des Rechenganges:

Das Programm ist speziell für den Zweck der Berechnung von Neutronenspektren in Abschirmungsschichten ausgelegt. Aus diesem Grunde werden keine äußeren Quellen, sondern lediglich Randwerte zugelassen. Da das Erreichen eines Gleichgewichtsspektrums impliziert, daß die Neutronen der höchsten auftretenden Energien den räumlichen Abfall determinieren, wird im Programm für den asymptotischen Neutronenfluß in der höchsten Energiegruppe ein monoenergetischer, monodirektionaler Neutronenfluß angenommen. Da eine lineare Interpolation sowohl in u als auch in x vorgenommen wird, sind

die Flüsse dieser Quelle in u und μ Dreiecksfunktionen, deren Basisbreite von der Breite der gewählten Einteilung in u und u abhängt. Der Abfallparameter λ wird zu Σ_T an einer Stelle E_0 gewählt, wo Σ_T ein ausgesprochenes Minimum besitzt, z. B. in Wasser $E_0 = 2,32$ MeV. Für Testzwecke kann $\Sigma_T(E_0)$ aber auch andere Werte haben, z. B. Null sein und andere Winkelverteilungen als monoenergetische eingegeben werden. Das asymptotische Programm berechnet nun mit diesem Fluß als Quelle asymptotisches Neutronenspektrum für den Winkelfluß. Eingabedaten müssen eine Querschnittslibrary und die Entwicklungsfaktoren der Streuwahrscheinlichkeit im Schwerpunktsystem sein. Es ist vorgesehen, daß in diesen Daten auch solche enthalten sind, die nicht in das entsprechende Material gehören. Die Eingabedaten werden zusammen mit dem Neutronenspektrum wieder ausgegeben, so daß sie im eigentlichen Programm weiterverwendet werden können.

Das Hauptprogramm berechnet aus den Flüssen der oberen Gruppen die Quellen der neuen Gruppe und führt anschließend die Ortsintegration für $\mu \geq 0$ durch, beginnend mit den Werten des asymptotischen Spektrums bis zum hinteren Rande. Der Quotient der Flüsse der 1. Gruppe ($u = 0$) am hinteren und vorderen Rand wird als mittlerer Schwächungsfaktor benutzt und die hiermit multiplizierten Werte des asymptotischen Spektrums für $\mu \leq 0$ als hintere Randwerte benutzt, um in rückwärtiger Richtung die Ortsintegration durchzuführen. Nachdem die Grenzwerte für $\mu = +0$ und $\mu = -0$ richtig eingesetzt sind, werden die Flüsse zur Weiterverarbeitung auf Magnetband ausgegeben und dabei nach den Ortsstützpunkten x_1 umgeordnet, da nur für einen x -Stützpunkt alle Flußwerte in den Speicher passen. Nach Einlesen der neuen Werte für x_1 kann jetzt das Stoßintegral für x_1 und die neue Gruppe berechnet werden, und der Zyklus beginnt von neuem (siehe Flußdiagramm).

Das Programm wurde auf 50 Ortspunkte, 300 Lethargiepunkte und maximal 20 Stützpunkte im Winkelcosinus μ ausgelegt.

4. Testrechnungen

a) Fehlerquellen und Testergebnisse:

Die Wahl der linearen Interpolation in Lethargie und Winkel, und im logarithmischen Maßstab auch in der Ortsintegration, ermöglicht es, qualitative Aussagen über die Interpolationsfehler zu machen, die die Neutronenbilanz betreffen.

So gilt allgemein, daß bei vorgegebenen Stützpunkten eine Unterschätzung des Neutronenflusses eintritt, wenn der Verlauf der Funktion im Intervall in Wahrheit konvex ist, entsprechend eine Überschätzung, wenn die Funktion konkav ist. Die Bilanzprüfung ist dadurch ein Test auf größere Interpolationsfehler. In Einzelfällen lassen sich die eingetretenen Fehler übersehen. Wegen des zusätzlichen Aufwandes wird diese Prüfung jedoch erst bei der Auswertung vorgenommen.

Wie schon oben gezeigt wurde, ist jedoch die Verwendung eines monodirektionalen, monoenergetischen Flusses mit der Einführung gewisser Fehler verknüpft. Deshalb wurden für diesen Fall einige Testrechnungen durchgeführt. Durch Nachrechnung der Placzekfunktion kann die Genauigkeit der Ermittlung des Stoßintegrals geprüft werden.

Durch Setzen von $\sum_T(0) = 0$ und $\sum_T(u) = 1$ für $u \neq 0$ mit Eingabe eines isotropen Flusses für $u = 0$ ergibt sich die Placzekfunktion für eine in der Lethargie als Dreiecksfunktion angenommene Quelle, die mit dem analytischen Ergebnis verglichen werden kann. Dasselbe Ergebnis muß man aber auch erhalten, wenn ein monodirektionaler Fluß eingesetzt wird. Abb. 3 zeigt das Ergebnis für $A = 16$.

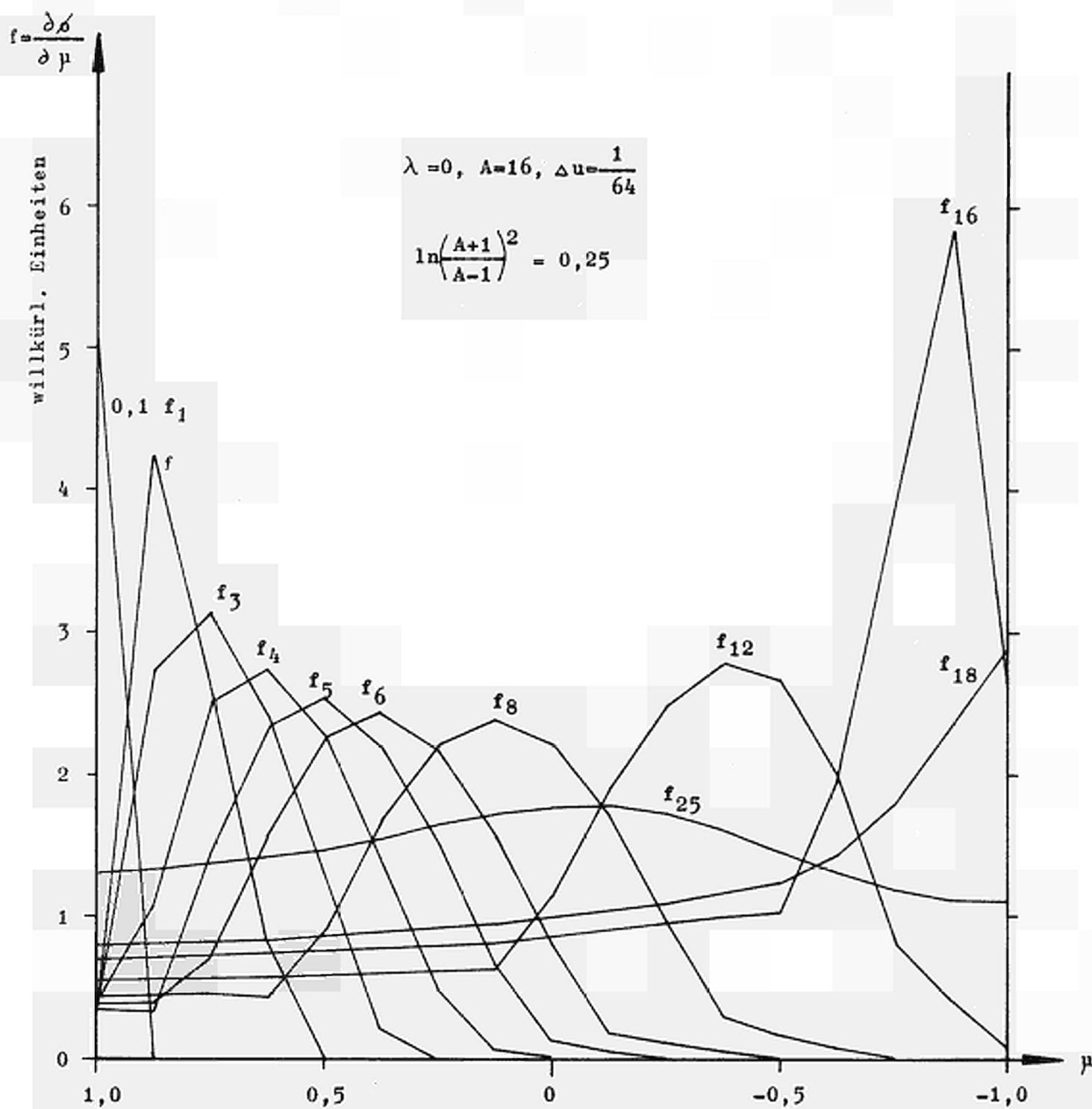


Abb.2 Die berechnete Winkelverteilung der ersten 25 Lethargiestützpunkte mit $A=16$ und $\Sigma = \text{const.}$ $f_i = f(u_i)$.

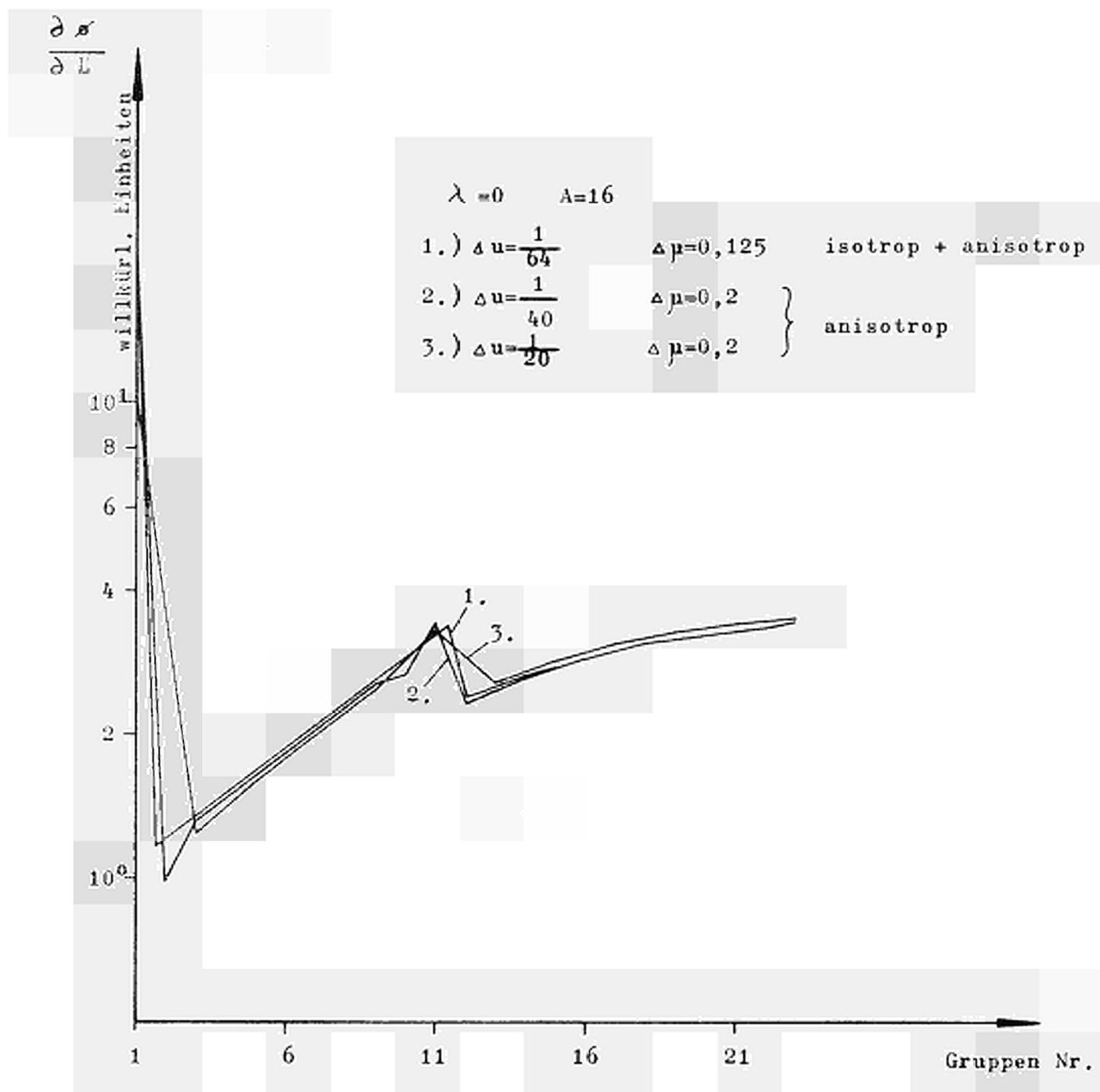


Abb.3

Die berechneten Flußverläufe für $A=16$ und $\Sigma_g=1$ mit isotroper Quelle und anisotroper Quelle sowie verschiedene Lethargie-einteilungen.

Man erkennt, daß in den ersten Gruppen zwar erhebliche Fehler auftreten, diese sich jedoch nicht fortsetzen, das weitere Spektrum sich also durch einen konstanten Faktor korrigieren läßt. Das gleiche Ergebnis zeigt bei gleicher Lethargie-Einteilung Abb. 4 für Eisen mit $A = 56$. Die Ursache zeigt Abb. 2, in der die Winkel Flüsse für Sauerstoff in den ersten 25 Gruppen aufgetragen sind. Man sieht, wie in den ersten 16 Gruppen das Maximum von $\mu = 1$ nach $\mu = -1$ herübergeht, der Fluß jedoch immer isotroper wird, so daß nach der 16. Gruppe selbst beim Ausfallen gewisser Zwischengruppen bei der Integration über die Lethargie keine wesentlichen Fehler mehr auftreten.

b) Wahl einer günstigen Einteilung in Lethargie und Winkel

Da statt exakt monodirektionaler und monoenergetischer Quellflüsse mit Dreiecksflüssen gerechnet wird, ergibt sich hieraus eine günstigste Wahl zwischen Lethargie und Winkelintervallbreite, siehe Abb. 1.

Es ist offenbar zweckmäßig, die Intervallzahl im Winkelbereich etwa gleich der Intervallzahl im Stoßintervall Δu zu machen. Das bedeutet, daß die Lethargiebreite $\Delta u'$ durch die Beziehung

$$\frac{\Delta u}{\Delta u'} \approx 2N \quad (4.1)$$

bestimmt ist, wobei $2N$ die Zahl der Winkelintervalle u' ist oder mit $\Delta u \approx \frac{4}{A}$

$$\frac{1}{\Delta u'} \approx \frac{N \cdot A}{2} \quad (4.2)$$

Mit $2N = 10$ und $A = 16$ (Sauerstoff) erhält man also

$$\frac{1}{\Delta u'} \approx 40 \quad (4.3)$$

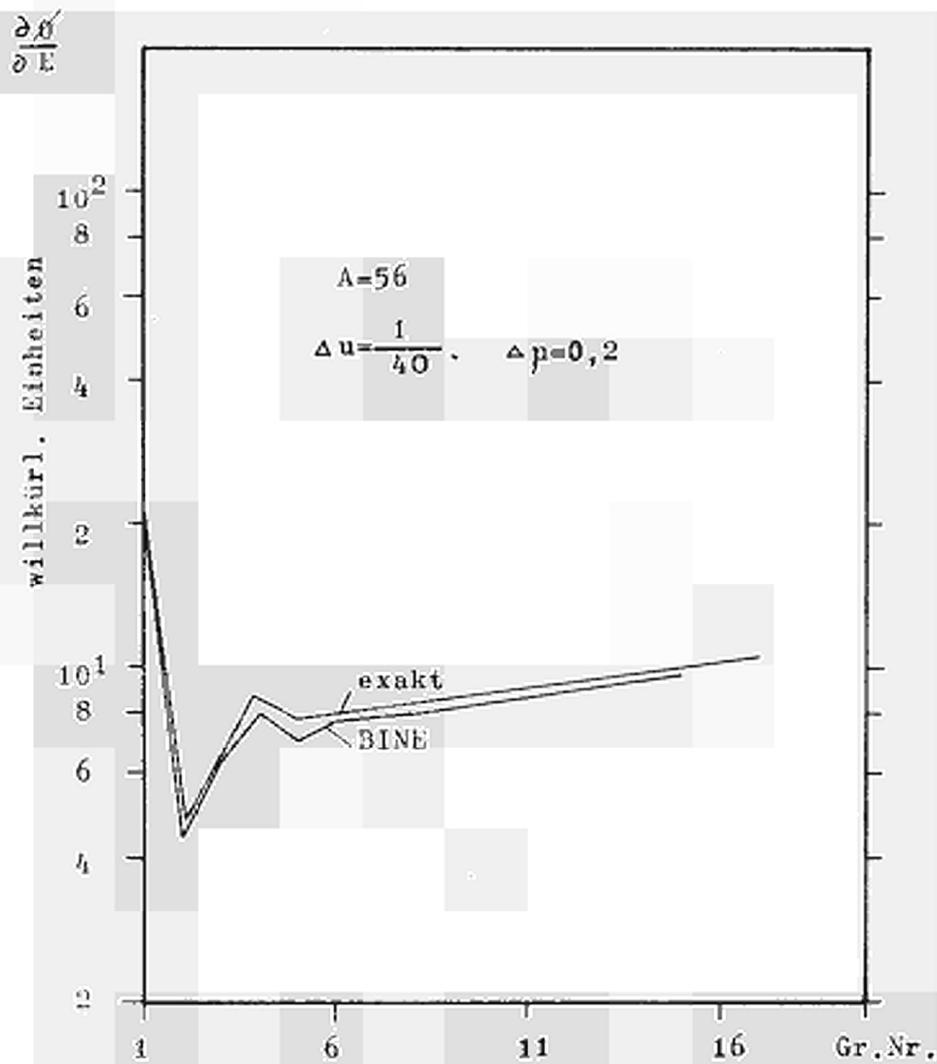


Abb. 4

Die berechneten Flußverläufe für Eisen ($A = 56$), exakt und nach der BINE-Rechnung mit gleicher monodirektionaler Quelle.

für $A = 56$ (Eisen) erhalte man

$$\frac{A}{\Delta u'} \approx 140 \quad (4.4)$$

Dieser Wert ist jedoch für die praktische Verwendung viel zu hoch, aber der vorangegangene Vergleich für Eisen mit einer exakten Rechnung und isotroper Quelle zeigt, daß auch für die gröbere Einteilung $1/\Delta u' = 40$, von den ersten Gruppen abgesehen, keine ernsthaften Fehler durchgeschleppt werden.

5. Die Beziehungen der Mehrgruppendifusionsgleichung zur Boltzmann-Gleichung

a) Der Übergang von der Boltzmann-Gleichung zur Mehrgruppendifusionsgleichung

Der Übergang von der Boltzmann-Gleichung zur Mehrgruppendifusionsgleichung wird durch zwei Maßnahmen durchgeführt: [8]

1. Entwicklung der Winkelverteilung nach Legendre-Polynomen bis zum ersten Glied.
2. Integration über gewisse Energiebereiche, d.h. Zusammenfassung der Energieabhängigkeit in wenigen Gruppen.

Je nachdem, ob man den 2. oder den 1. Schritt zuerst vollzieht, kommt man entweder zur Mehrgruppentransportgleichung oder zu einer energieabhängigen Diffusionsgleichung als Zwischenstufe. Es wird hier der zweite Fall untersucht, also zunächst der Übergang zur energieabhängigen Diffusionsgleichung und dann die Zusammenfassung zu Gruppen.

Zu diesem Zweck gehen wir von der allgemeinen Transportgleichung in ebener Geometrie aus:

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_T f = \int \sum_0 (\mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E) f(E', \mu', x) dE' d\mu' \quad (2.1)$$

Dabei habe $\sum_0 (\mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E)$ wie in (2.41) die Form

$$\sum_0 (\mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E) = \frac{\sum_0 (E')}{\pi \alpha E'} \frac{g(\hat{\mu}^1)}{\sqrt{(1-\mu^4)(1-\hat{\mu}^2) - (\mu' - \mu \hat{\mu}^2)^2}} \quad (2.41)$$

wobei

$$\hat{\mu}^1 = \frac{1}{2} \left((A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) \quad (2.41c)$$

$$\hat{\mu}^2 = \frac{1}{A} \left(\hat{\mu}^2 - 1 + \hat{\mu}^1 \sqrt{A^2 - 1 + \hat{\mu}^2} \right) \quad (2.41e)$$

und die Grenzen wie in (2.41a, b, f und g) angegeben.

Zum Zwecke der Ableitung soll zunächst nur $A > 1$ und nur elastische Streuung betrachtet werden.

Integration über μ ergibt mit $\int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu = \bar{\gamma}$, $\int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu = \phi$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} + \sum_T \phi = \int \frac{\sum_0 (E')}{\alpha E'} \frac{g(\hat{\mu}^1)}{E} \phi(E') dE' \quad (5.1)$$

Durch Ersetzen von $\bar{\gamma} = -D(E) \frac{\partial \phi}{\partial x}(E)$ wäre die Gleichung energieabhängig auf die Form einer Diffusionsgleichung gebracht, wobei $D(E)$ im allgemeinen auch noch von x abhängt. Integration über die Energie zwischen zwei Grenzen E_1 und E_2 führt auf die Mehrgruppenpengleichung:

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} + \sum_T \phi = \int_{E_1}^{E_2} \int \frac{\sum_0 (E')}{\alpha E'} g(\hat{\mu}^1) \phi(E') dE' dE \quad (5.2)$$

wobei $\bar{\gamma} = \int_{E_1}^{E_2} \bar{\gamma} dE$ und $\sum_T \phi = \int_{E_1}^{E_2} \sum_T \phi dE$.

Die Integrationen im Streugliede erstrecken sich dabei in einer E', E Darstellung über das in Fig. 5 angegebene, stark umrahmte Gebiet.

Im folgenden muß die Gruppe immer breiter als das Stoßintervall $E - \left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E$ sein. Bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge müssen wir das Integral in drei Bestandteile zerlegen, die in Fig. 5 der Reihe nach durch Numerierung bezeichnet sind.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{E_1}^{E_2} dE \int_{E'}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} g(\mu) \phi(E') dE' = \\
 &= \int_{E_1}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_1} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \int_{E_1}^{E'} W(E', E) dE \phi(E') dE' + \\
 &+ \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \int_{E'}^{E'} W(E', E) dE \phi(E') dE' + \int_{E_2}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_2} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \int_{E'}^{E_2} W(E', E) \phi(E') dE dE' \\
 \text{Hier ist} \quad & W(E', E) = g(\mu(E', E)) \text{ die Streuwahrscheinlichkeit im Schwerpunktsystem. Es gilt zusätzlich}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\int W(E', E) dE = \alpha E' \tag{5.4}$$

(siehe Anhang I) $E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$

(5.4) zeigt, daß das 2. Integral einfach die Mittelung über den Streuquerschnitt mit dem Flusse ϕ bedeutet, nur daß die Integration über E' noch nicht die volle Gruppe erfaßt. Erweiterung dieses Integrals auf die volle Gruppe liefert:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \phi(E') \int_{E'}^{E'} W(E', E) dE dE' - \int_{E_1}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_1} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \phi(E') \int_{E'}^{E_2} W(E', E) dE dE' + \\
 & \int_{E_2}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_2} \frac{\Sigma_0(E')}{\alpha E'} \phi(E') \int_{E'}^{E_2} W(E', E) dE dE' +
 \end{aligned}$$

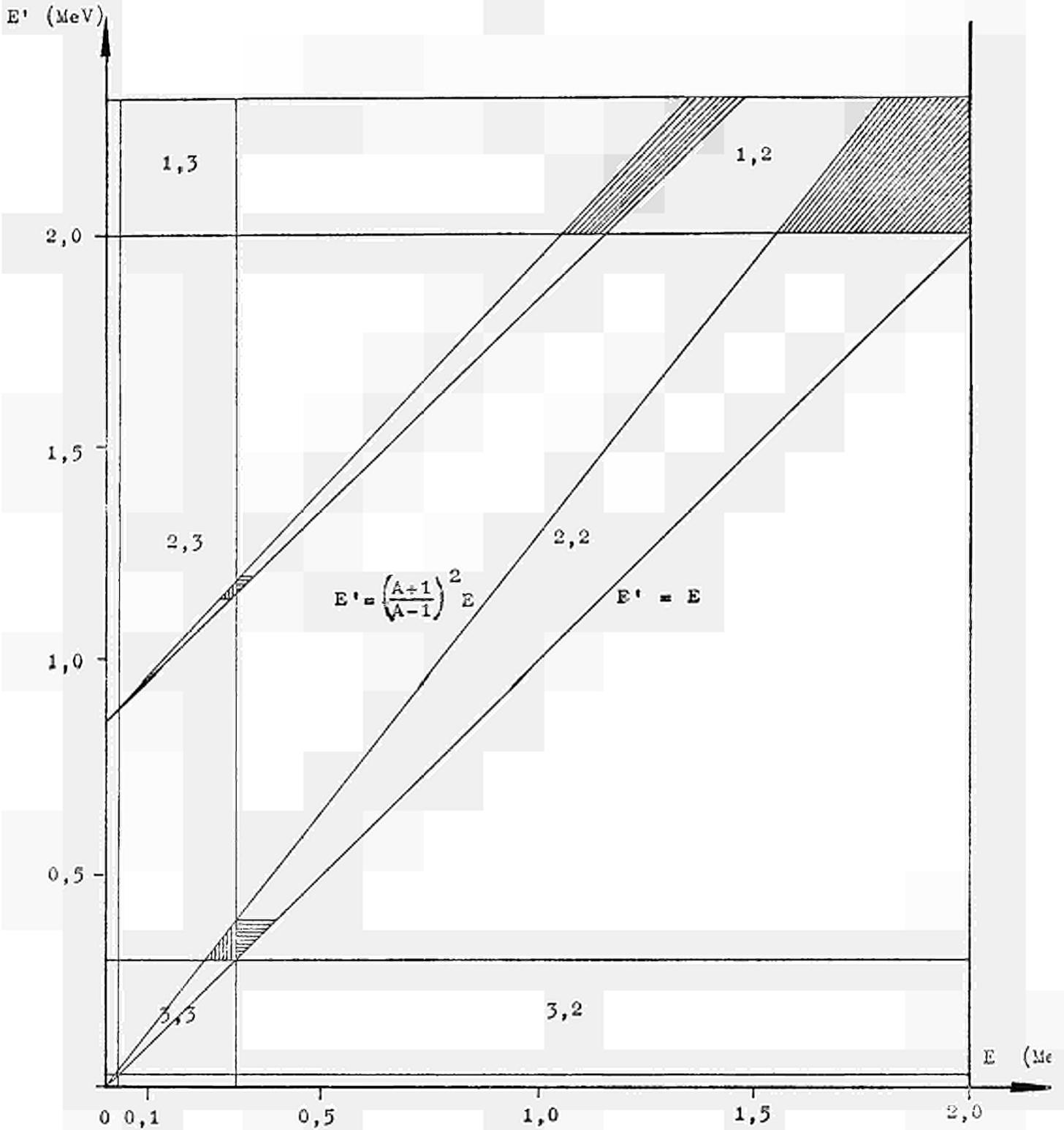


Abb. 5

Die Integrationsgebiete in der E - E' -Ebene für elastische und inelastische Streuung.

Schraffiert: Bereiche der Überstreuung.

Ziffern: Gruppennummern der Energiegruppen in E' bzw. E .

$$+ \int_{E_2}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_2} \frac{\sum_0(\epsilon')}{\alpha E'} \phi(\epsilon') \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{E_2} W(\epsilon', \epsilon) d\epsilon d\epsilon' \quad (5.5)$$

Hierin sind die ersten beiden Integrale in (5.3) wieder in die ersten beiden Integrale in (5.5) zusammengezogen worden. Man sieht, daß das zweite Integral in (5.5) formal - außer dem Vorzeichen - mit dem dritten identisch ist, nur daß E_1 statt E_2 als Integrationsgrenze auftritt. Das Integral

$$\frac{1}{\alpha E'} \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{E_0} W(\epsilon', \epsilon) d\epsilon$$

bedeutet dabei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron der Energie E' nach dem Stoß eine Energie kleiner als E_0 erhält, und wird in Anhang I angegeben. Damit ist eine Zerlegung des Stoßterms in folgender Weise erreicht worden:

$$S = \overline{\sum_0 \phi} - \overline{\sum_r \phi} + Q \quad (5.6)$$

wobei der Querstrich die Mittelung über die Energie innerhalb der Gruppe bedeutet, und insbesondere $\overline{\sum_r \phi}$ sich als der Anteil der aus der Gruppe gestreuten Neutronen darstellt.

$$\overline{\sum_r \phi} = \int_{E_1}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E_1} \frac{\sum_0(\epsilon')}{\alpha E'} \phi(\epsilon') \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{E_1} W(\epsilon', \epsilon) d\epsilon d\epsilon' \quad (5.7)$$

Q ist dabei der Anteil der Neutronen, die aus der höheren Gruppe ($E' > E_2$) in die Gruppe hineingestreut werden. Durch Herüberziehen der ersten beiden Terme erhält man eine Gruppengleichung

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + (\overline{\sum_r} - \overline{\sum_0}) \bar{\phi} + \overline{\sum_r \phi} = Q \quad (5.8)$$

die erlaubt, mit Hilfe von (5.7) den Removalquerschnitt zu berechnen.

$$\sum_0(x) = \overline{\sum_r} - \overline{\sum_0} \quad \sum_r(x) = \frac{\overline{\sum_r \phi}}{\bar{\phi}}$$

Setzen wir jetzt noch:

$$\bar{J} = -D(x) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}, \quad (5.9)$$

dann haben wir eine Gleichung vom Typ der Diffusionsgleichung vor uns, wobei die Diffusionskonstante meist noch vom Orte abhängen wird, was übrigens auch für \sum_r gilt.

Für $A = 1$ ist die Ableitung mathematisch etwas einfacher, obwohl hier das oben beschriebene Verfahren nicht auf die gleiche Weise durchzuführen ist. Aus

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \int_{E_1}^{E_{max}} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') W(E', E) dE' dE$$

wird unter Beachtung von $W(E', E) = 1$, was für Wasserstoff immer gilt, (E_{max} statt des eigentlich einzusetzenden ∞)

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') \int_{E_1}^{E'} dE dE' + \int_{E_2}^{E_{max}} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') \int_{E_1}^{E_2} dE dE' \quad (5.10)$$

und damit

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \Sigma_2(E') \phi(E') dE' - E_1 \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') dE' + (E_2 - E_1) \int_{E_2}^{E_{max}} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') dE \quad (5.11)$$

und damit

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x} + (\Sigma_T - \Sigma_2) \bar{\phi} + \sum_r \bar{\phi} = Q \quad (5.12)$$

wobei

$$\sum_r \bar{\phi} = E_1 \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_2(E')}{E'} \phi(E') dE' \quad (5.13)$$

Zusätzlich gilt hier, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron in eine Gruppe tiefer als die gegebene eingestreut wird, einfach $\frac{\Delta E}{E_1}$ ist, wobei ΔE die Breite der Gruppe im Energiemaß ist und E_1 die untere Grenze der gegebenen verlassenen, wie man dem mit Q bezeichneten Term entnimmt.

Im Falle inelastischer Streuung wird

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \int_{E_1'}^{E_2'} \frac{\sum_{in} (E')}{4 E'} \frac{(A+1)^2}{\sqrt{A^2 - Q/E' (A+1)^3/A}} \phi(E') dE' dE \quad (5.14)$$

mit

$$E'_{1,2} = \frac{E}{(A-1)^2} \left(\pm 1 + \sqrt{A^2 + \frac{Q}{E} \frac{A-1}{A} (A+1)^2} \right)$$

Da hier der Energieverlust im allgemeinen groß gegen die Unschärfe der Energieverteilung aufgrund des Einfallswinkels ist, wird bei der Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \int_{\tilde{E}_1}^{\tilde{E}_2} \frac{\sum_{in} (E')}{4 E'} \frac{(A+1)^2}{\sqrt{A^2 - Q/E' (A+1)^3/A}} \phi(E') dE dE' \quad (5.15)$$

mit

$$\tilde{E}_{1,2} = \frac{E'}{(A+1)^2} \left(1 \pm \sqrt{A^2 - Q/E' (A+1)^3/A} \right)^2$$

die Integration über E und E' ohne Berücksichtigung der Ecken wie im elastischen Falle durchgeführt, siehe Fig. 5.

Man erhält:

$$Q = \int_{E_1}^{E_2} \sum_{in} (E') \phi(E') dE' \quad (5.16)$$

$$E_1 \frac{A^2}{(A-1)^2} + Q \frac{(A+1)^2}{A^2 - A}$$

Für den Fall, daß die untere Grenze größer als die obere ist, $Q = 0$ und

$$\sum_{in} \phi = \int_{E_1}^{E_2} \sum_{in el} (E') \phi(E') dE' \quad (5.17)$$

andernfalls

$$\sum_{in} \phi = \int_{E_1}^{E_2} \sum_{in el} (E') \phi(E') dE' \quad (5.18)$$

Diese beiden Fälle unterscheiden sich darin, daß in (5.18) inelastische Streuung noch in die gleiche Gruppe stattfindet. Die Anteile, die in die tieferen Gruppen entfallen, berechnen sich zu

$$S_K^m = \int \left(\min \left(E_2, E_{K+1} \frac{A^2}{(A-1)^2} + Q \frac{(A+1)^2}{A^2-A} \right) \sum_{in} (E') \phi(E') dE' \right) \quad (5.19)$$

$$\max \left(E_1, E_K \frac{A^2}{(A-1)^2} + Q \frac{(A+1)^2}{A^2-A} \right)$$

Da hiermit alle Größen, die in Gleichung (5.8) eingehen, bekannt sind, ist es möglich, an dieser Stelle auch die Bilanz zu prüfen. Dies kann durch Einführung eines effektiven Absorptionsquerschnittes geschehen.

Erweitern wir die Gleichung (5.8) zu

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} + \overline{\sum_a^{eff} \phi} + \overline{\sum_a \phi} + \overline{\sum_r \phi} = 0 \quad (5.20)$$

mit $\overline{\sum_r} = \overline{\sum_{rm}} + \overline{\sum_{rd}}$, so wird

$$\overline{\sum_a^{eff} \phi} = Q - \overline{\sum_a \phi} - \overline{\sum_r \phi} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} \quad (5.21)$$

und

$$\overline{\sum_a^{eff}} = \frac{\overline{\sum_a^{eff} \phi}}{\bar{\phi}} \quad (5.22)$$

Dieses $\overline{\sum_a^{eff}}$ erlaubt, die Genauigkeit der Transportrechnung abzuschätzen. Ein positiver Wert von $\overline{\sum_a^{eff}}$ bedeutet, daß durch Approximationsfehler scheinbar Neutronen absorbiert wurden. Bei linearer Interpolation tritt dieser Fall ein, wenn der Kurvenverlauf im Intervall in Wirklichkeit konvex ist. Entsprechend bedeutet ein negativer Wert von $\overline{\sum_a^{eff}}$, daß scheinbar Neutronen erzeugt werden, der wahre Verlauf der Funktion im Intervall also konkav ist. Im allgemeinen wird man es als eine gute Approximation ansehen, wenn $\overline{\sum_a^{eff}}$ klein gegen $\overline{\sum_r}$ ist.

b) Die Ermittlung der Diffusionskonstanten nach der P1-Näherung

Um bei der Auswertung den Übergang zur gewöhnlichen Diffusionsrechnung besser zu erfassen, soll auch noch eine Auswertung nach P1-Näherung durchgeführt werden. Diese kann hier auf einfache Weise mit angegeben werden. Multiplikation der Transportgleichung mit μ und Integration ergibt:

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \left[\mu^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \sum_{T, \mu} \mu f \right] = \int_{-1}^{+1} d\mu \int \sum_0 (E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) f(E', \mu') dE' d\mu' \quad (5.23)$$

oder (siehe Anhang II)

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{j}_z}{\partial x} + \sum_{T, \mu} \mu f = \int \tilde{\mu}(E', E) \sum_0 (E', E) \bar{j}(E') dE \quad (5.24)$$

wobei

$$\bar{j}_z = \int_{-1}^{+1} P_2(\mu) f(\mu) d\mu \quad \text{und} \quad \sum_0 (E \rightarrow E) = \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} W(E', E) \text{ ist.}$$

Weglassen von \bar{j}_z liefert

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \sum_{T, \mu} \mu f = \int_E^{E_2} \tilde{\mu}(E', E) \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} W(E', E) \bar{j}(E') dE' \quad (5.25)$$

Integration von E_1 bis E_2 liefert wiederum

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \sum_{T, \mu} \mu f = \int_{E_1}^{E_2} \int_E^{E \frac{(A+1)^2}{A-1}} \tilde{\mu} \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} W(E', E) \bar{j}(E') dE' dE \quad (5.26)$$

Die rechte Seite wird wieder zerlegt, wie oben, und ergibt

$$\begin{aligned} S_1 = & \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} \bar{j}(E') \int_{E'}^{E' \frac{(A-1)^2}{A+1}} \tilde{\mu}(E', E) W(E', E) dE dE' - \\ & - \int_{E_1}^{E_1 \frac{(A+1)^2}{A-1}} \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} \bar{j}(E') \int_{E_1}^{E' \frac{(A-1)^2}{A+1}} \tilde{\mu}(E', E) W(E', E) dE dE' + \\ & + \int_{E_1 \frac{(A-1)^2}{A+1}}^{E_2 \frac{(A+1)^2}{A-1}} \frac{\sum_0(E')}{\alpha E'} \bar{j}(E') \int_{E_1}^{E_2} \tilde{\mu}(E', E) W(E', E) dE dE' \end{aligned} \quad (5.27)$$

Hier ist $\frac{1}{\alpha E'} \int_{E_1}^{E_2} \tilde{\mu} W(E', E) dE = \bar{\mu}(E')$ der mittlere Streuwinkel

im Laborsystem (s. Anh. III). Vernachlässigung der übrigen beiden Glieder ergibt:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = - (\sum_T - \bar{\mu} \sum_0) \bar{j} = - \sum_{T, \mu} \mu f \quad (5.28)$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt: (5.2)

$$-\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \sum_a \bar{\phi} + \sum_r \bar{\phi} = Q \quad (5.29)$$

wobei $D = \bar{j} / \sum_{T, \mu} \mu f$ gesetzt ist. Die Berechnung von $\bar{\mu}$ ist im Anhang III angegeben, es ergibt sich:

$$\bar{M}(E') = \sum_{\ell=0}^N f_{\ell}(E') (-A)^{-(\ell+1)} \frac{\ell(2\ell+3)A^2 - (2\ell-1)(\ell+2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)} \quad (5.30)$$

Die für die Berechnung des Removalquerschnittes erforderliche Größe der Streuwahrscheinlichkeit über eine Gruppen- E -Grenze ergibt sich zu

$$\int_{E'/(A+1)}^{E'} W(E', E) dE = \alpha E' \sum_{\ell=1}^{N+1} \frac{f_{\ell-1} - f_{\ell+1}}{2} (P_{\ell}(\hat{\mu}_1) - (-1)^{\ell})$$

wobei

(5.31)

$$\hat{\mu}_1 = (\hat{\mu}_1^2 - 1 + \hat{\mu}_1 \sqrt{A^2 - 1} + \hat{\mu}_1^2) / A \quad (\text{s. Anh. I})$$

und

ist.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2} ((A+1) \sqrt{E_1/E'} - (A-1) \sqrt{E/E_1})$$

Zusammengefaßt ergibt sich dazu folgendes:

Beim Übergang von der Boltzmann-Gleichung zur Diffusionsgleichung ist durch Integration über Winkel und Energiegruppen eine Gleichung zu erhalten, die mit der Diffusionsgleichung übereinstimmt, wenn man den Strom J gleich

$$\bar{J} = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

setzt, wobei D im allgemeinen vom Orte abhängen wird. In dieser "Konstante" D sind dann alle Transporteigenschaften enthalten. Im Falle eines räumlich mehrdimensionalen Problems wird D eine Matrix sein, da nicht zu erwarten ist, daß der Vektor J und $\text{grad}\phi$ die gleiche Richtung besitzen. Bei der Ableitung der Diffusionskonstanten mit der P1-Approximation werden zwei Vernachlässigungen gemacht. Erstens die Vernachlässigung des P2-Gliedes und aller höheren Glieder, und zweitens die Vernachlässigung der P-Terme in der Streuung von Gruppe zu Gruppe. Diese Vernachlässigung ist für Wasserstoff nicht mehr zu rechtfertigen, da hier das Stoßintervall nicht mehr breit gegen die Gruppe ist. Welche Effekte zu erwarten sind, wird an Hand einer B1-Approximation im nächsten Abschnitt gezeigt.

Dagegen ist der Removalquerschnitt eine relativ gut definierte Größe, wenn er auch von den örtlich veränderlichen Spektren abhängt. Wegen der relativen Unempfindlichkeit gemittelter Größen gegen kleine spektrale Änderungen wird man erwarten können, daß er nicht allzu stark variiert.

c) Ein spezieller Übergang von der Mehrgruppentransportgleichung zur Diffusionsgleichung (B1-Näherung)

Es wird angenommen, daß in einer Gruppe, die mit der Transportgleichung beschrieben wird, eine exponentiell verlaufende Quelle mit einer P1-Verteilung vorhanden sei. Die resultierende Transportgleichung in der ebenfalls nur P-Streuung zugelassen ist, läßt sich noch analytisch lösen. Da der Streukern nur bis zu den P1-Gliedern entwickelt ist und der Transportkern exakt mitgenommen wird, handelt es sich um eine B1-Approximation. [5].

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_T f = \frac{1}{2} \sum_{-1}^{+1} (1 + \gamma \mu \mu') f(\mu') d\mu' + Q_0 (1 + \delta \mu) \quad (5.32)$$

Fällt Q_0 wie $e^{-\lambda x}$ ab, so folgt das Gleiche für f , und man erhält:

$$(-\lambda \mu + \sum_T) f = \frac{1}{2} \sum_{-1}^{+1} (1 + \gamma \mu \mu') f(\mu') d\mu' + Q_0 (1 + \delta \mu) \quad (5.33)$$

oder

$$f = \frac{\sum_{-1}^{+1}}{\sum_T - \lambda \mu} \int_{-1}^{+1} \frac{1 + \gamma \mu \mu'}{2} f(\mu') d\mu' + \frac{Q_0 (1 + \delta \mu)}{\sum_T - \lambda \mu} \quad (5.34)$$

Integration über μ ergibt mit $\phi = \int_{-1}^{+1} f(\mu) d\mu$, $\gamma = \int_{-1}^{+1} \mu f(\mu) d\mu$ und den Abkürzungen

$$\frac{\sum_{-1}^{+1}}{\sum_T} = \beta, \quad \frac{\lambda}{\sum_T} = \gamma, \quad \frac{Q_0}{\sum_T} = g$$

$$\phi = \frac{\beta}{2} T_0 \phi + \frac{\beta \gamma}{2} T_1 \gamma + g (T_0 + \delta T_1) \quad (5.35)$$

mit

mit

$$T_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{1-\gamma\mu} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \quad , \quad T_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu d\mu}{1-\gamma\mu} = \frac{1}{\gamma} (T_0 - 2)$$

Multiplikation der Gleichung (5.34) mit μ und nachfolgende Integration ergibt:

$$\mathcal{J} = \frac{\beta}{2} T_1 \phi + \frac{\beta\gamma}{2} T_2 \mathcal{J} + g (T_1 + \delta T_2) \quad (5.36)$$

wobei

$$T_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2 d\mu}{1-\gamma\mu} = \frac{1}{\gamma^2} (T_0 - 2)$$

ist. Diese Gleichungen (5.35) und (5.36) lassen sich nach ϕ und \mathcal{J} auflösen, und man erhält mit der Determinante Δ

$$\Delta = 1 + \frac{\beta\gamma(1-\beta)}{\gamma^2} - T_0 \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma^2} \right) \quad (5.37)$$

$$\phi = \frac{g}{\Delta} \left(T_0 \left(1 + \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\gamma^2} \right) - \frac{2\delta}{\gamma} + \frac{\beta\beta\gamma}{\gamma^2} \right) \quad (5.38)$$

$$\mathcal{J} = \frac{g}{\Delta} (T_0 - 2) \left(1 + \frac{\delta(1-\beta)}{\gamma} \right) \quad (5.39)$$

Setzt man wie im letzten Kapitel die Diffusionskonstante

$$D = - \frac{\mathcal{J}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = + \frac{\mathcal{J}}{\lambda \phi} = \frac{\mathcal{J}}{\sum_T \gamma \phi} \quad (5.40)$$

so erhält man

$$\sum_T D = \frac{1}{\gamma^2} \frac{(T_0 - 2) \left(1 + \frac{\delta(1-\beta)}{\gamma} \right)}{T_0 + \left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\gamma^2} \right) (T_0 - 2)} \quad (5.41)$$

Dieser Wert wäre zu vergleichen mit der gewöhnlichen Definition für die Diffusionskonstante: (P1)

$$D = \frac{1}{3 \sum_{tr}} = \frac{1}{3 (\sum_T - \bar{\mu} \sum_0)} \quad (5.42)$$

wobei sich $\bar{\mu}$ für den speziellen Streukern ergibt zu

$$\bar{\mu} = \frac{\delta}{3}$$

so daß

$$\sum_T D_1 = \frac{1}{3 \left(1 - \frac{\beta \delta}{3}\right)} \quad (5.43)$$

Um die Abweichungen der Diffusionskonstante D von D_1 zu studieren, bilden wir mit einigen Umformungen

$$\frac{D}{D_1} = \frac{(3 - \beta \delta) \left(1 + \frac{\delta(1 - \beta)}{y}\right)}{y^2 \left(\frac{T_0}{T_0 - 2}\right) + \frac{\delta}{y} - \frac{\beta \delta}{y^2}}$$

oder

$$\frac{D}{D_1} = \frac{(3 - \beta \delta) \left(1 + \frac{\delta(1 - \beta)}{y}\right)}{\frac{T_0 y^2}{T_0 - 2} - \beta \delta + \frac{\delta}{y}}$$

Mit Berücksichtigung, daß

$$T_0 = \frac{1}{y} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{2}{y} \operatorname{Ar} \operatorname{th} y$$

ist, wird

$$\frac{D}{D_1} = \frac{(3 - \beta \delta) \left(1 + \frac{\delta(1 - \beta)}{y}\right)}{f(y) - \beta \delta + \frac{\delta}{y}} \quad (5.44)$$

mit

$$f(y) = \frac{y \operatorname{Ar} \operatorname{th} y}{\frac{1}{y} \operatorname{Ar} \operatorname{th} y - 1} = \frac{y^2}{1 - \frac{y}{\operatorname{Ar} \operatorname{th} y}}$$

Unter der Annahme, daß $y \ll 1$ ist, wird

$$\text{Ann } f(y) \approx y + \frac{y^3}{3} \quad (5.45)$$

und $f(y) \approx 3$

so daß

$$\frac{D}{D_1} = \frac{(3-\beta\gamma)(1 + \frac{\delta(1-\beta)}{y})}{3-\beta\gamma + \delta y} \quad (5.46)$$

Wir erhalten also, daß schon diesem Fall nur die gewöhnliche Diffusionskonstante gilt, wenn $\delta = 0$ ist. Da der Ausdruck im Nenner keine große Rolle spielt, wenn beide Werte klein gegen 1 sind, ist es das Verhältnis $\frac{\delta}{y}$, das die "transporttheoretische Diffusionskonstante" erhöht, und nur im Falle $\beta = 1$ ist wieder der gewohnte Fall gegeben. Ist jedoch $\beta = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{\delta}{y}$ etwa 1, so ergibt sich auch für $y \ll 1$ eine 50% höhere Diffusionskonstante als in der P1-Näherung (s. Abb.6).

Dieses hat folgende Konsequenz: Rechnet man mit der gewöhnlichen Diffusionsrechnung und benutzt D_1 , dann erhält man für den Absolutwert von ϕ

$$\phi_1 = \frac{j}{(1-\beta) - y^2 D_1 \Sigma_T} \quad (5.47)$$

Richtig ist jedoch

$$\phi = \frac{j}{(1-\beta) - y^2 D \Sigma_T} \quad (5.48)$$

Und das Verhältnis beider wird wiederum

$$\frac{\phi_1}{\phi} = \frac{(1-\beta) - y^2 \frac{1 + \frac{\delta(1-\beta)}{y}}{\beta(y) - \beta\gamma + \delta y}}{(1-\beta) - \frac{y^2}{3-\beta\gamma}} \quad (5.49)$$

oder

$$\frac{\phi_1}{\phi} = \frac{(3-\beta\gamma)(1-\beta) - y^2 \left(1 + \frac{\delta(1-\beta)}{y}\right)}{(3-\beta\gamma)(1-\beta) - y^2} \quad (5.50)$$

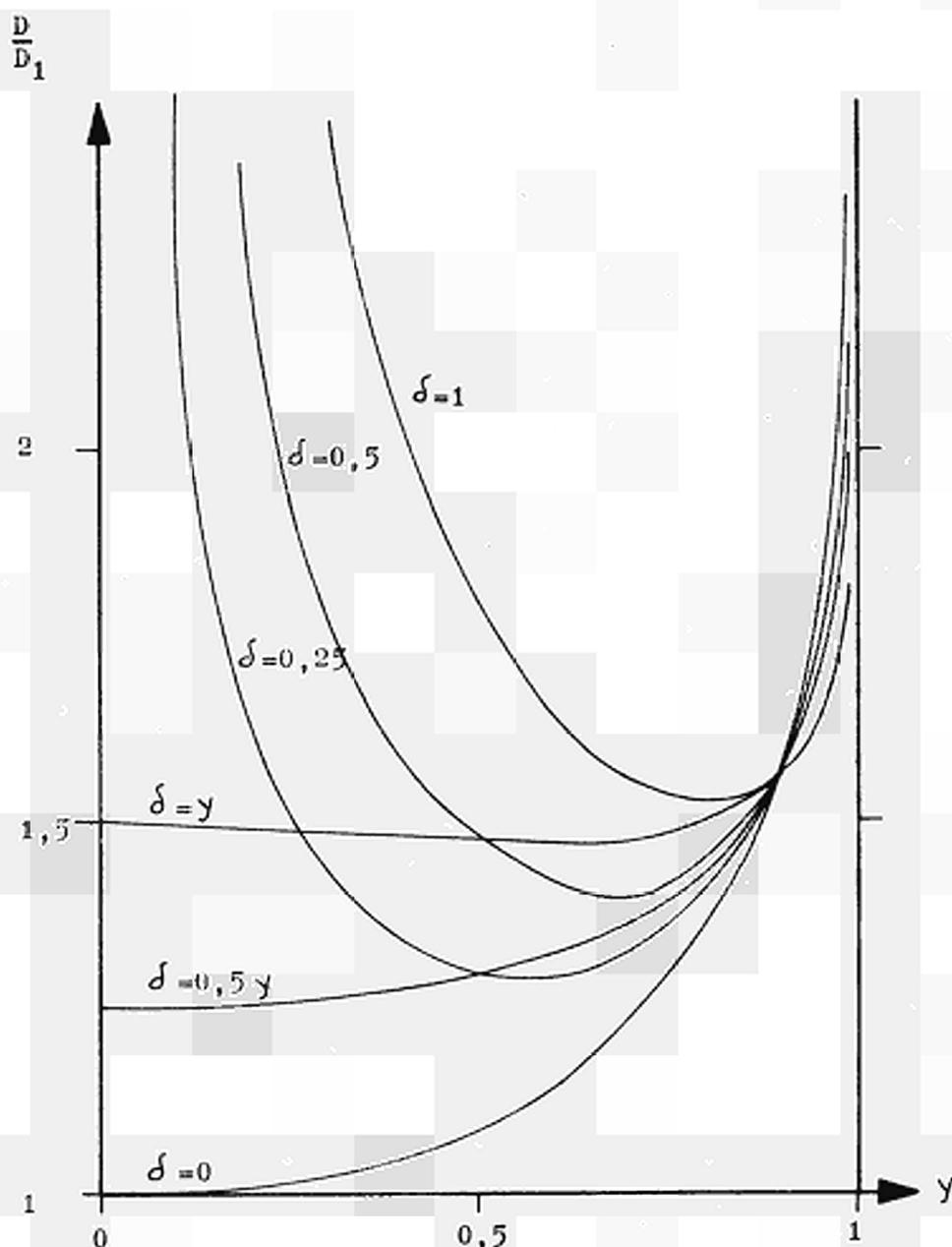


Abb. 6

Das Verhältnis D/D_1 in der B1-Approximation als Funktion von $y = \frac{\lambda}{\sum \tau}$. Parameter ist der Quellanisotropieparameter δ , bzw. $\alpha = \delta/y$. Der Punkt, in dem sich alle Kurven schneiden, entspricht dem Verhältnis D/D_1 der homogenen Lösung.

Für $y \ll 1$ bzw. $y \ll (3 - \beta\gamma)(1 - \beta)$ wird

$$\frac{\phi_1}{\phi} \approx 1 - \frac{y\tilde{J}}{3 - \beta\gamma} = 1 - \frac{\alpha y^2}{3 - \beta\gamma}$$

d.h. ϕ_1 wird systematisch zu klein, z.B. wird mit $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0,2$, $\gamma = 1$ $y = 0,8$

$$\frac{\phi_1}{\phi} = \frac{0,715}{1,208} = \frac{1}{1,69}$$

Die Wahl von α ist dabei unkritisch, für $\alpha = 0$ wird bei sonst gleichen Parametern

$$\frac{\phi_1}{\phi} = \frac{0,715}{1,130} = \frac{1}{1,58}$$

Dabei ist D/D_1 nur 1,39 bzw. 1,35.

d) Die gebietsweise Mittelung

Wie in Abschnitt 5.6 gezeigt, ist es möglich, aus den Transportrechnungen folgende Größen zu erhalten:

den Removalquerschnitt $\overline{\Sigma_r(x)} = \frac{\overline{\Sigma_r \phi}}{\overline{\phi}}$
 den inelastischen Removalquerschnitt $\overline{\Sigma_{inel.}} = \frac{\overline{\Sigma_{inel} \phi(x)}}{\overline{\phi(x)}}$

die transporttheoretische Diffusionskonstante

$$D(x) = - \frac{\overline{j(x)}}{\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x}} \quad (5.51)$$

und die P1-Diffusionskonstante

$$D_1(x) = \frac{\overline{j(x)}}{3 \overline{\Sigma_r j(x)}} \quad (5.52)$$

Eine Rechnung mit den ersten drei Größen und den dazugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten sollte die Trans-

portrechnungen reproduzieren. Diese Größen sind jedoch noch x -abhängig und im allgemeinen keine Materialkonstanten. So wird $\bar{\Sigma}_{rem}(x)$ in schlechten Moderatoren im wesentlichen den Fluß an der unteren Gruppengrenze im Verhältnis zum Gesamtfluß widerspiegeln, und in die transporttheoretische Diffusionskonstante sind quasi alle Korrekturen hineingesetzt, die sich aufgrund der Vernachlässigungen in der Diffusionstheorie ergeben. Die P_1 -Diffusionskonstante wird dagegen mehr die Ströme in ihrer spektralen Abhängigkeit innerhalb der Gruppe repräsentieren. Es kommt also darauf an, geeignete gemittelte Größen zu erhalten, die jeweils für bestimmte Ortsbereiche gelten. Geht man von der Gleichung (5.8) aus

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial x} + \bar{\Sigma}_a \bar{\phi} + \bar{\Sigma}_r \bar{\phi} = Q$$

so scheint es vernünftig, gebietsweise die Bilanz erhalten zu lassen. Durch Integration über ein Gebiet (a, b) erhält man

$$j_b - j_a + \int_a^b \bar{\Sigma}_a \bar{\phi} dx + \int_a^b \bar{\Sigma}_r \bar{\phi} dx = \int_a^b Q dx \quad (5.53)$$

und definiert

$$\langle \bar{\Sigma}_a \rangle = \frac{\int_a^b \bar{\Sigma}_a \bar{\phi} dx}{\int_a^b \bar{\phi} dx} \quad (5.54)$$

$$\langle \bar{\Sigma}_r \rangle = \frac{\int_a^b \bar{\Sigma}_r \bar{\phi} dx}{\int_a^b \bar{\phi} dx} \quad (5.55)$$

Setzt man jedoch $\bar{j} = -D \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$

so erhält man auf gleiche Weise

$$\langle D \rangle = - \frac{\bar{j}_b - \bar{j}_a}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \Big|_b - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \Big|_a} = - \frac{\int_a^b \bar{j} d\sigma}{\int_a^b \bar{\phi} d\sigma} \quad (5.56)$$

Diese sogenannte Diffusionskonstante ist jedoch im allgemeinen nicht brauchbar, weil einzig und allein das Verhalten von Flußgradient und Strom auf dem Rande eingehen und hier Verhältnisse herrschen, die für das Verhalten im Inneren nicht ohne weiteres maßgeblich sind. Immerhin ist dieses Verfahren eindeutig, weil es sich um Oberflächenintegrale handelt, die in Relation zueinander gesetzt werden.

Eine andere Betrachtungsweise geht vom Transportquerschnitt aus:

$$\mathfrak{Z} \sum_{\pm}(x) = \frac{1}{D(x)} = \frac{\mathfrak{Z} \overline{\sum_{\pm} j(x)}}{\bar{j}(x)} \quad (5.56)$$

Hier kann die Mittelung ohne weiteres auch über das räumliche Gebiet durchgeführt werden, und man erhält

$$\langle \mathfrak{Z} \sum_{\pm}(x) \rangle = \left\langle \frac{1}{D(x)} \right\rangle = \mathfrak{Z} \frac{\int_a^b \overline{\sum_{\pm} j(x)} dx}{\int_a^b \bar{j}(x) dx} \quad (5.57)$$

Definiert man jetzt als einen effektiven Transportquerschnitt

$$\mathfrak{Z} \sum_{\pm}^{\text{eff}}(x) = \frac{1}{D(x)} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\bar{j}(x)} \quad (5.58)$$

so läßt sich die obige Mittelung wiederum ohne Zwang durchführen, und es wird

$$\langle \mathfrak{Z} \sum_{\pm}^{\text{eff}} \rangle = \left\langle \frac{1}{D(x)} \right\rangle = - \frac{\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_a}{\int_a^b \bar{j}(x) dx} \quad (5.59)$$

Diese Mittelung sagt einiges mehr über das Verhalten im Inneren des Gebietes aus, obwohl sie sich nicht als Invariante darstellen läßt, weil eine Größe, die einen Zusammenhang zwischen $\nabla \phi$ und \bar{j} darstellt, im allgemeinen eine Matrix ist und in diesem Spezialfall nur die x-Komponenten verglichen werden.

Die gebietsweise Bilanzkontrolle wird durch Integration der Gleichung (5.8) erreicht:

$$j_b - j_a + \int \overline{\Sigma_a} \phi dx + \int \overline{\Sigma_a^{eff}} \phi dx + \int \overline{\Sigma_r} \phi dx = \int \overline{Q} dx \quad (5.60)$$

und damit ein über das Gebiet gemittelter effektiver Absorptionsquerschnitt

$$\langle \overline{\Sigma_a^{eff}} \rangle = \frac{1}{\int \overline{\phi} dx} \left\{ \int \overline{Q} dx + j_a - j_b - \int \overline{\Sigma_r} \phi dx - \int \overline{\Sigma_a} \phi dx \right\} \quad (5.61)$$

Für $\langle \overline{\Sigma_a^{eff}} \rangle$ gilt dann ebenfalls das im Abschnitt 5.a) Gesagte.

e) Auswerteprogramm

Ein Auswerteprogramm wurde geschrieben, das die Größen

$$\overline{D}(x), \overline{D_1}(x), \overline{\Sigma_{rem}}(x), \overline{\Sigma_{res}}(x)$$

für alle Stützpunkte x und beliebig vorgegebene Energiegruppen ermittelt. Die erforderlichen Integrationen in Winkel und Lethargie wurden wiederum mit Hilfe einer linearen Approximation vorgenommen. Außerdem berechnet es die Größen

$$\langle D \rangle, \langle D_1 \rangle, \langle \overline{\Sigma_{rem}} \rangle, \langle \overline{\Sigma_{res}} \rangle, \langle \overline{\Sigma_a^{eff}} \rangle$$

nach den oben angegebenen Formeln. Der Differentialquotient

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x}$$

wurde mittels einem Interpolationspolynom 2. Ordnung, die Integration in x mittels linearer Interpolation erhalten.

6. Die Berechnung von Spektren innerhalb einer Wasser-Eisen-Wasser-Abschirmung

a) Verwendete Librarydaten

Die Wirkungsquerschnitte von Sauerstoff und Eisen sind in dem Bericht NDA 2111 - 3 Vol. C [9] mit einem Lethargieintervall von 0.05 tabelliert sowie die Entwicklungsfaktoren f_1 bis f_8 der Winkelverteilung für elastische Streuung. Diese Einteilung ist für das vorliegende Problem gut geeignet, ist aber noch zu grob. Deswegen wurden noch einmal durch Interpolation Zwischenwerte ermittelt, um eine Einteilung von $\Delta U = 0.025$ zu erhalten. In Abb. 7 ist der Verlauf der NDA-Daten für σ_T von Eisen zusammen mit den dem BNL 325 [10] entnommenen Verläufen dargestellt. Man erkennt, daß unterhalb 0.75 MeV die Einteilung fein genug ist, um den Verlauf gut darzustellen. Darüber sind jedoch fast alle Streuresonanzen nur noch im Mittel erfaßt. Da die Breite dieser Resonanzen jedoch schon kleiner als das Stoßintervall für Eisen ist, erscheint es gerechtfertigt, zunächst mit diesen Daten zu rechnen. Folgende Anordnungen wurden durchgerechnet:

- 1) Anordnung 2.10 bestehend aus 15.18 cm H_2O , 2 cm Fe, 25.30 cm H_2O
- 2) Anordnung 4.10 bestehend aus 18.98 cm H_2O , 4 cm Fe, 31.63 cm H_2O
- 3) Anordnung 10.25 bestehend aus 10.0 cm H_2O , 10 cm Fe, 15.0 cm H_2O

Die Ziffern hinter dem Punkt in der Anordnungsbezeichnung geben dabei die Zahl der Stützpunkte in der Eisenschicht an.

b) Die Neutronenspektren inner- und außerhalb der Eisenschicht

In Abb. 7 ist der Verlauf der berechneten Flüsse in der 4 cm dicken Eisenplatte als Funktion der Lethargie einge-

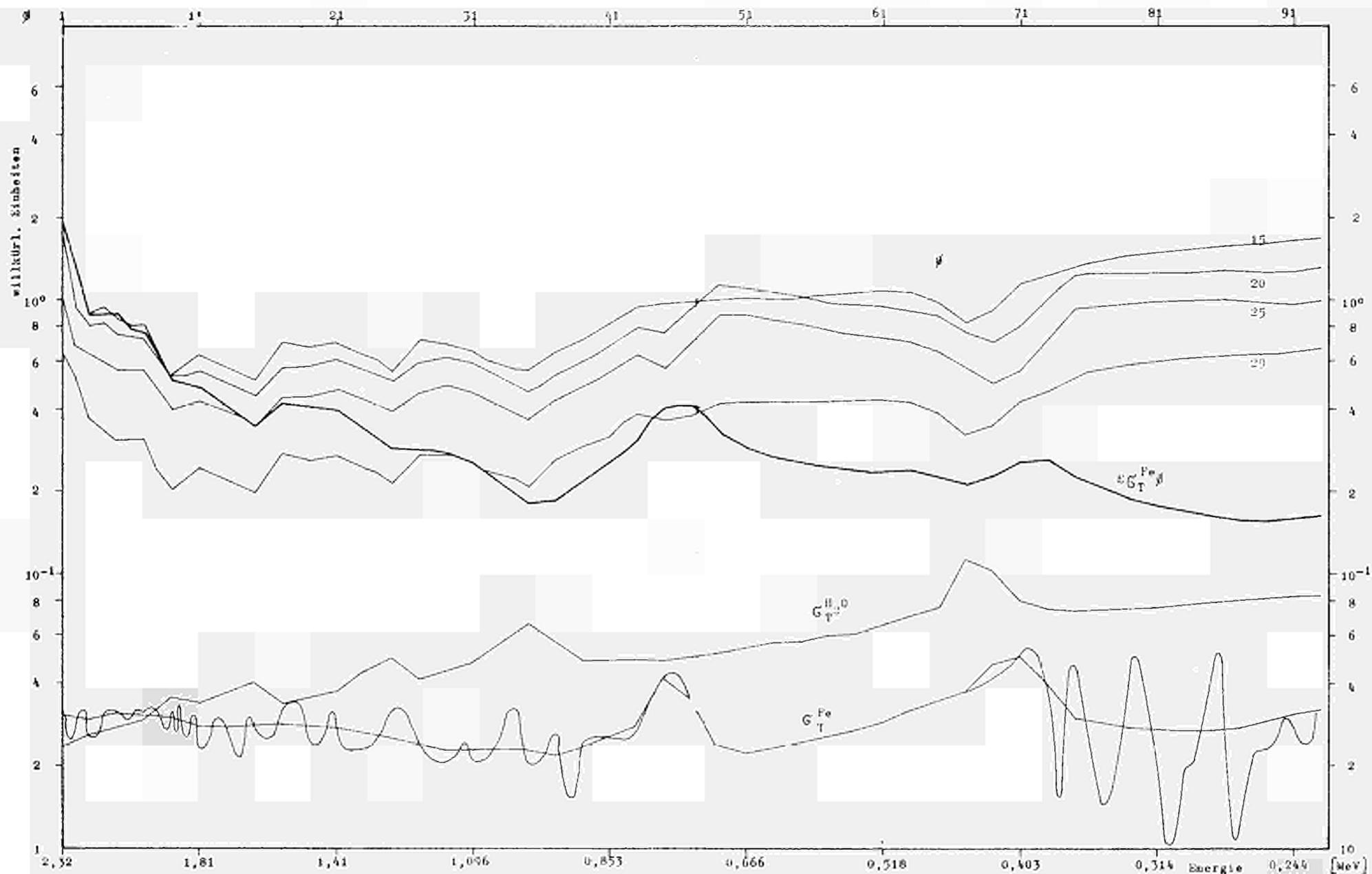


Abb. 7a Die Verläufe von $\beta(E)$ als Funktion der Lethargie u in der Anordnung 3,10. Angegeben sind die Kurven für die Ortstützpunkte 15, 20, 25 und 29 entsprechend 0,8 cm Entfernung von den Rändern der Eisenplatte

innerhalb des Eisens und 1,20 cm Entfernung außerhalb des Eisens. Im unteren Teil G_T von Eisen nach NPA 2111-3 Vol. C und dazu der DNL 325 entnommene kontinuierliche Verlauf. Ferner die Stoßdichte in der Eisenmitte $E_{G_T^{Fe}}$.

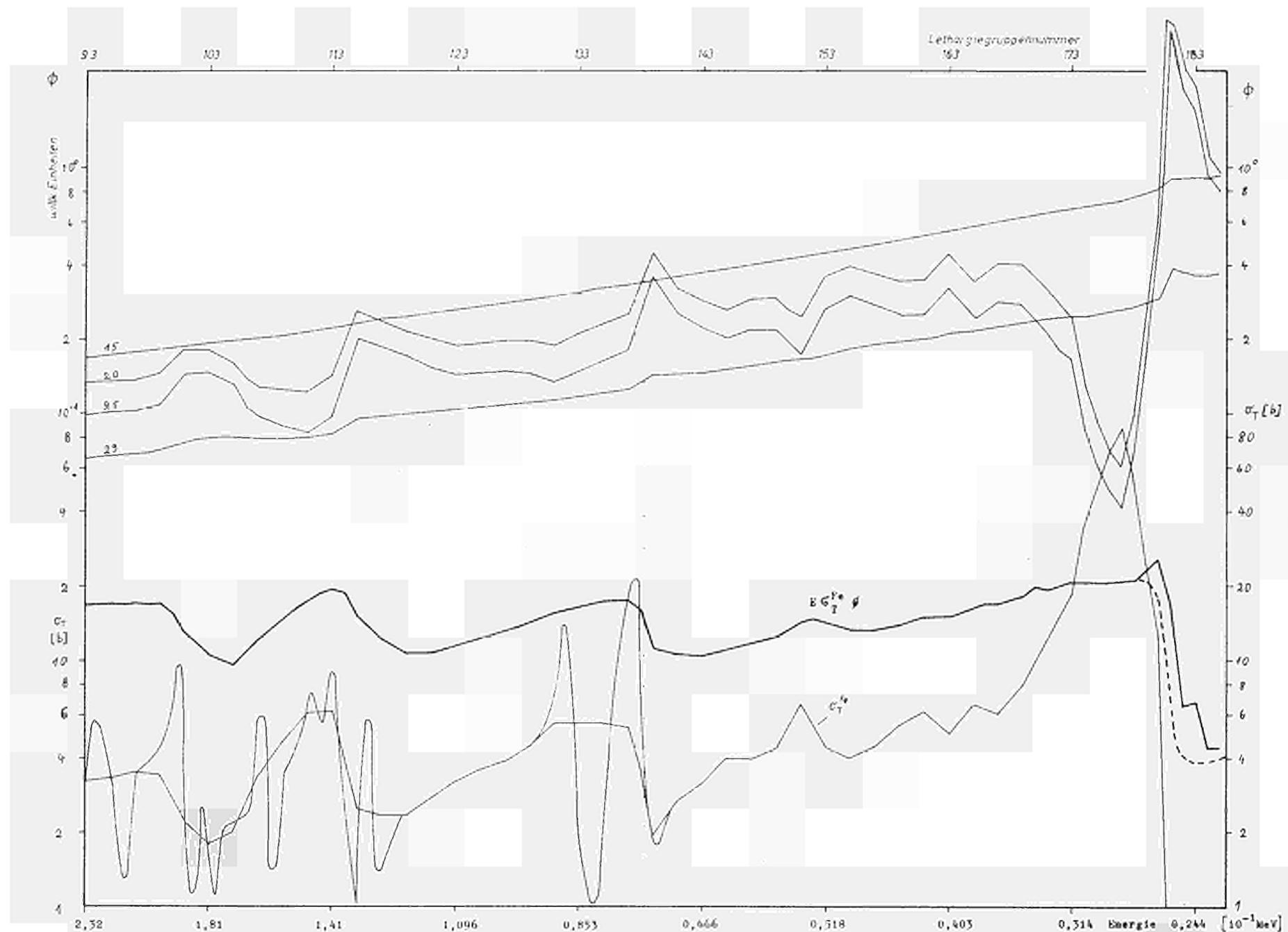


Abb. 7b Die Verläufe von $\phi(E)$ als Funktion der Leithargie u in der Anordnung 4.10. Angegeben sind die Kurven für die Ortstutzpunkte 15, 20, 25 und 29 entsprechend 0,8 cm Entfernung von den Rändern der Eisenplatte

innerhalb des Eisens und 1,265 cm Entfernung außerhalb des Eisens. Im unteren Teil σ_T von Eisen nach NDA 2111-3 Vol. C und dann der DNL 325 entnommene kontinuierliche Verlauf. Ferner die Stoßdichte in der Eisenmitte $E 0_{Fe}^{Fe}$.

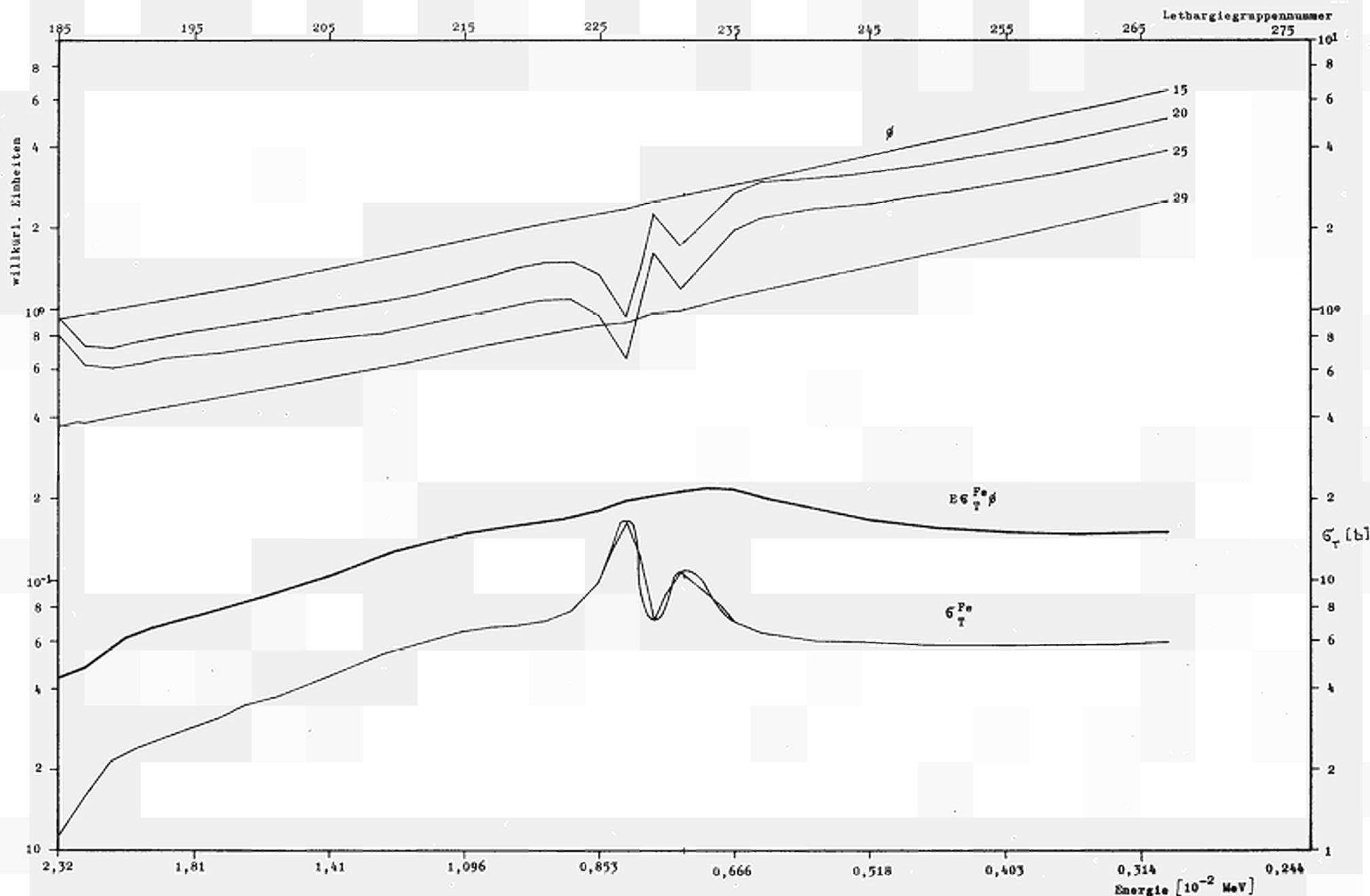


Abb. 7c Die Verläufe von $\beta(E)$ als Funktion der Lethargie u in der Anordnung 4.10. Angegeben sind die Kurven für die Ortsstützpunkte 15, 20, 25 und 29 entsprechend 0,8 cm Entfernung von den Rändern der Eisenplatte

innerhalb des Eisens und 1,265 cm Entfernung außerhalb des Eisens. Im unteren Teil σ_T von Eisen nach NDA 2111-3 Vol. C und dazu der DNL 325 entnommene kontinuierliche Verlauf. Ferner die Stoßdichte in der Eisenmitte $E \sigma_T^{Fe} / \sigma_T^{Fe} \cdot \beta$.

tragen. Man erkennt, daß sich der Fluß innerhalb des Eisens umgekehrt wie der Wirkungsquerschnitt verhält. Das heißt, daß Maxima des Wirkungsquerschnittes Minima des Flusses entsprechen. Die zusätzlich eingezeichnete Stoßdichte pro Lethargieintervall $E \sigma_T(E) \phi(E)$ in der Mitte der Platte zeigt oberhalb von 1 MeV etwa den Verlauf des reinen Wasserspektrums. Unterhalb von 1 MeV verläuft sie etwa wie der totale Wirkungsquerschnitt von Eisen. Dies hängt damit zusammen, daß in diesem Gebiet einerseits aus dem Wasser einfließende Neutronen dominieren, wenn die Abbremskraft von Wasser größer als die von Eisen ist, andererseits fließen die Neutronen rasch in das umgebende Wasser aus, wenn innerhalb des Eisens mehr Neutronen in eine bestimmte Gruppe eingestreut werden als dem Fluß im umgebenden Wasser entspricht.

Im Gebiet der großen Streuresonanz bei 25 keV liegen jedoch etwas veränderte Verhältnisse vor. Solange der Streuquerschnitt ansteigt, werden die Neutronen innerhalb des Eisens stärker und stärker abgebremst, ohne daß die einfließenden Neutronen den Abfall des Flusses ergänzen können, da jetzt die Eisenplatte dick gegen die Streulänge wird. Dies drückt sich in der Konstanz der Stoßdichte im Innern der Platte aus. In dem Augenblick, in dem der Wirkungsquerschnitt ins Minimum abfällt, baut sich ein hoher Neutronenfluß auf, der zwar in den Richtungen um die Flächennormale schnell abfließt, in senkrechter Richtung $\mu \ll 1$ jedoch erhalten bleibt. Hieraus ergeben sich die hohen Flußspitzen bei 25 keV. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß an dieser Stelle die Winkelverteilung des Flusses in der Umgebung von $u = 0$ durch eine lineare Approximation nicht mehr richtig dargestellt wird, so daß hier scheinbar eine gewisse Neutronenerzeugung stattfindet. Wie man der Winkelverteilung (Abb. 8)

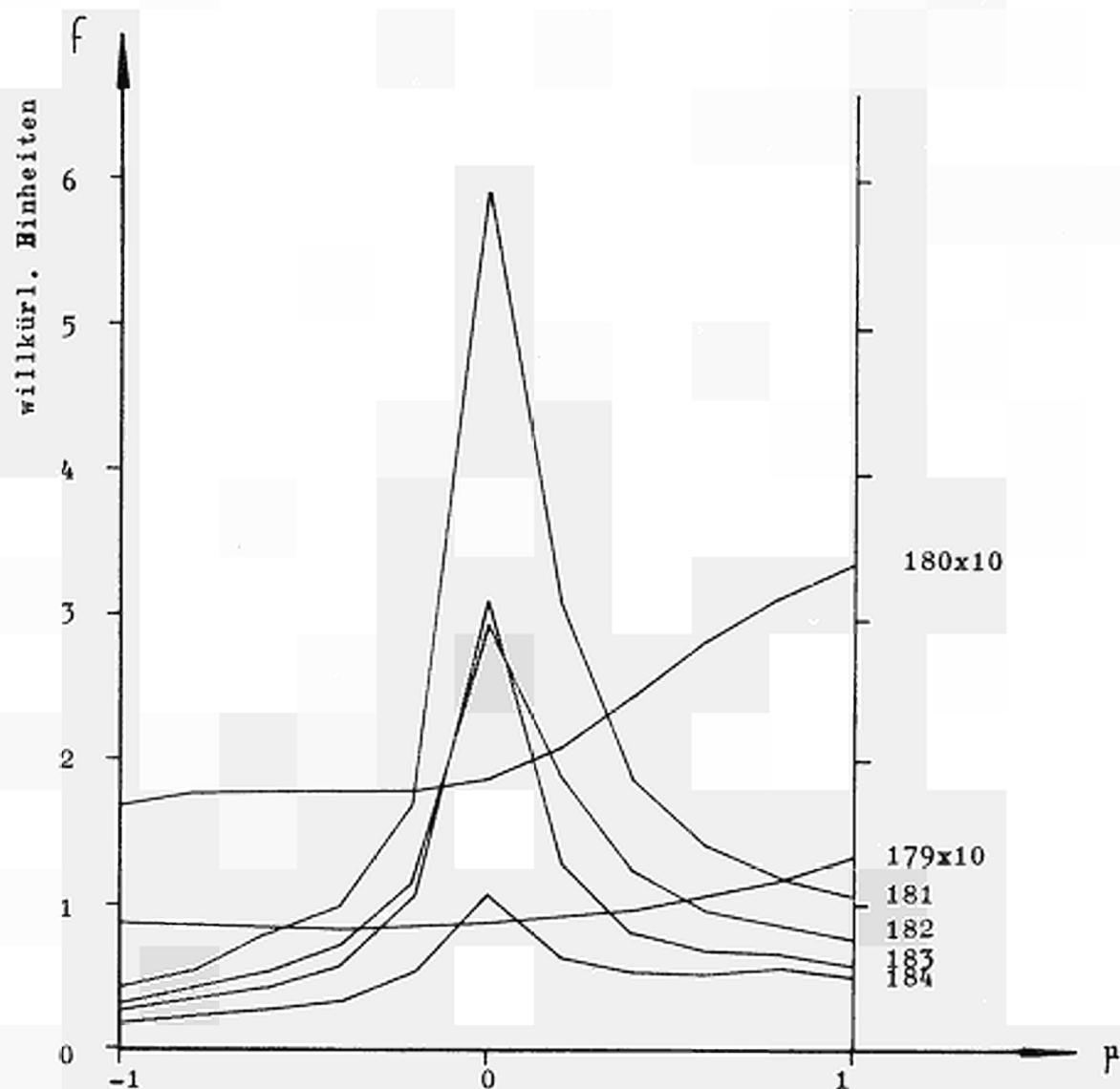


Abb. 8

Der Verlauf der Winkelverteilungen in der Mitte des Eisens (Stützpunkt 22 der Anordnung 4.10) in der Umgebung der Streuresonanz. Die Ziffern bezeichnen die Lethargiestützpunktnummern (Lethargiegruppennummern) wie in Abb. 7.

entnimmt, ist der wahre Verlauf etwa der durch die gestrichelte Kurve in Abb. 7 angegebene und das Maximum in der Stoßdichte bei Gruppe 183 auf diesen Effekt in Gruppe 180 zurückzuführen. Ab Gruppe 189 normalisieren sich die Verhältnisse jedoch wieder, und da die Bremskraft des Eisens klein gegen die des Wassers bleibt, ergeben sich Verhältnisse wie oberhalb der großen Streuresonanz. Ein Unterschied besteht jedoch darin, daß die Platte im Mittel schon optisch dick wird, so daß zum Beispiel die beiden Resonanzen bei 7,3 und 8,1 keV in der Stoßdichte nicht mehr zu erkennen sind

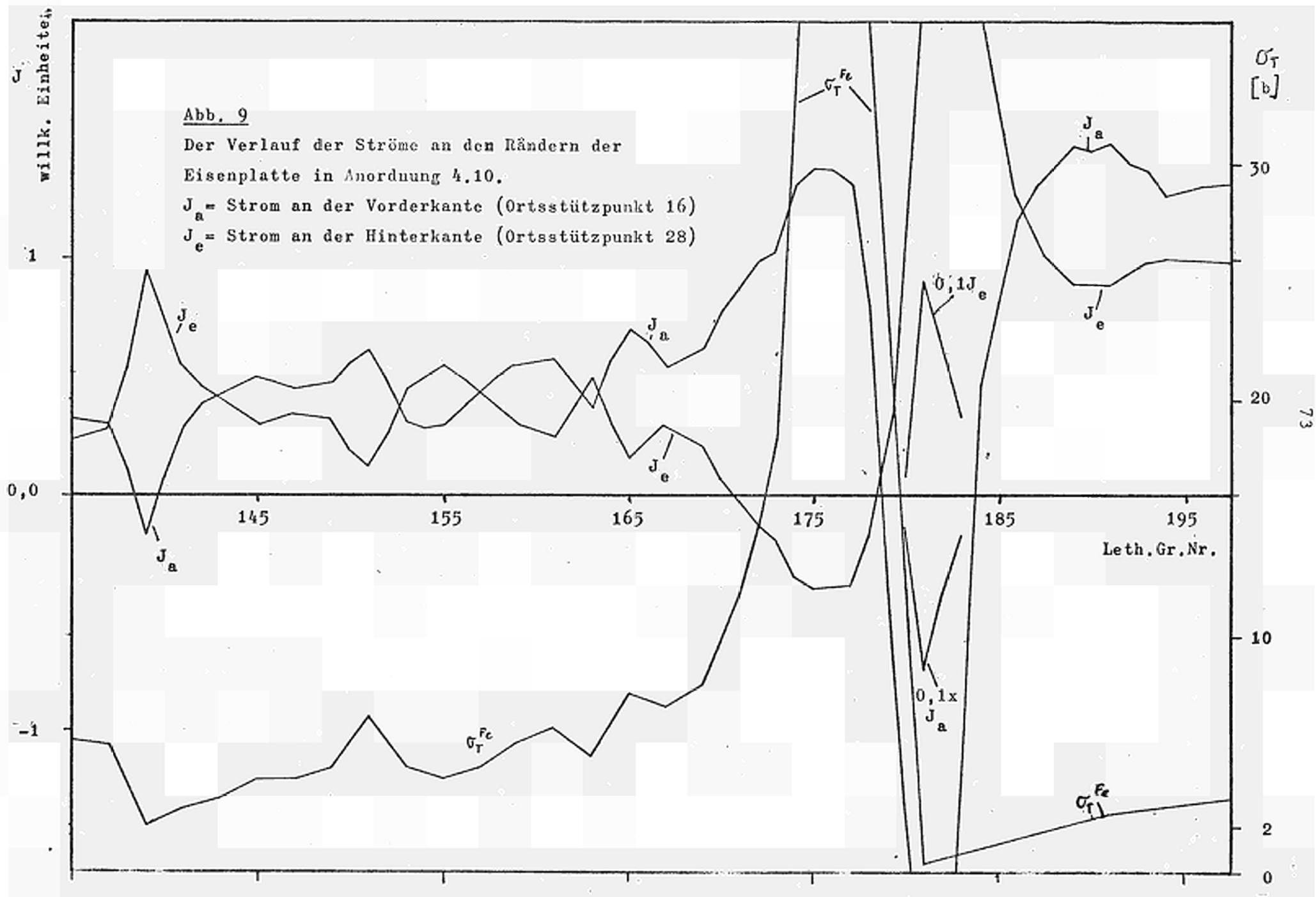
c) Der Verlauf der Ströme an den Rändern der Eisenplatte

Den Verlauf der Ströme an den Rändern der Eisenplatte (Abb.9) bestätigt das im vorigen Abschnitt beschriebene Verhalten der Neutronenflüsse. Die Ströme zeigen bei kleinen Änderungen des Wirkungsquerschnittes des Eisens ein gegenläufiges Verhalten, und zwar steigt der Strom an der Vorderseite der Eisenplatte an, wenn der Wirkungsquerschnitt zunimmt, während an der Rückseite der Strom abfällt oder gar seine Richtung umkehrt.

Da der Transportquerschnitt von Diffusionsgruppen über die Ströme zu mitteln ist, diese sich an der Vorderseite etwa wie Σ_T / E , an der Rückseite jedoch etwa wie $1 / (\Sigma_T E)$ verhalten, ist eine kräftige Änderung der Diffusionskonstanten innerhalb einer Eisenschicht zu erwarten.

7. Aus den Ergebnissen abgeleitete Gruppenkonstanten

Die Ergebnisse der Rechnungen für die 2 cm, 4 cm und 10 cm dicke Eisenschicht wurden mit Hilfe des Auswerteprogramms zur Ermittlung von Gruppenkonstanten benutzt. Es wurde in Anlehnung an ein bekanntes Abschirmungsprogramm [7] die folgende Gruppeneinteilung gewählt:



1. Gruppe	2.32 - 2	MeV
2. Gruppe	2.00 - 0.3	MeV
3. Gruppe	0.30 - 0.03	MeV
4. Gruppe	0.03 - 0.01	MeV
5. Gruppe	0.01 - 0.0031	MeV

Für diese Gruppen wurde punktweise für jeden Ortsstützpunkt die Größe

$$D1(x) = \frac{\bar{f}(x)}{3 \sum_r(x)}, \quad D(x) = \frac{\bar{f}(x)}{\frac{d\bar{\phi}}{dx}}, \quad \sum_r(x) = \frac{\overline{\sum_r \phi(x)}}{\bar{\phi}(x)},$$

$$\sum_r^i(x) = \frac{\overline{\sum_i \phi(x)}}{\bar{\phi}(x)} \quad \text{und ihre im Abschnitt 5d angegebenen}$$

Mittelwerte für die einzelnen Schichten berechnet. Die Gruppengrenzen sind in Abb. 7 markiert.

a) Die Verläufe der "Diffusionskonstanten" in den berechneten Anordnungen

Die erhaltenen Werte von $D(x)$ und $D1(x)$ für die Anordnung 2.10 sind in Abb. 10, für die Anordnung 4.10 in Abb. 11 und für die Anordnung 10.25 in der Abb. 12 aufgetragen. Man erkennt, daß im Wasser vor und hinter der Eisenplatte sowohl $D(x)$ wie auch $D1(x)$ dazu tendieren, konstante Werte in einiger Entfernung von der Eisenplatte anzunehmen. Allerdings liegt $D(x)$ durchweg höher als $D1(x)$, was mit dem in Abschnitt 5 c) besprochenen Effekt zusammenhängt, daß bei Anwesenheit einer gerichteten Quelle in einer Eingruppentransporttheorie die effektive Transportlänge größer wird, nach der obigen Abschätzung bis zu einem Faktor 1,5. Im Innern des Eisens liegt $D(x)$ nur in der

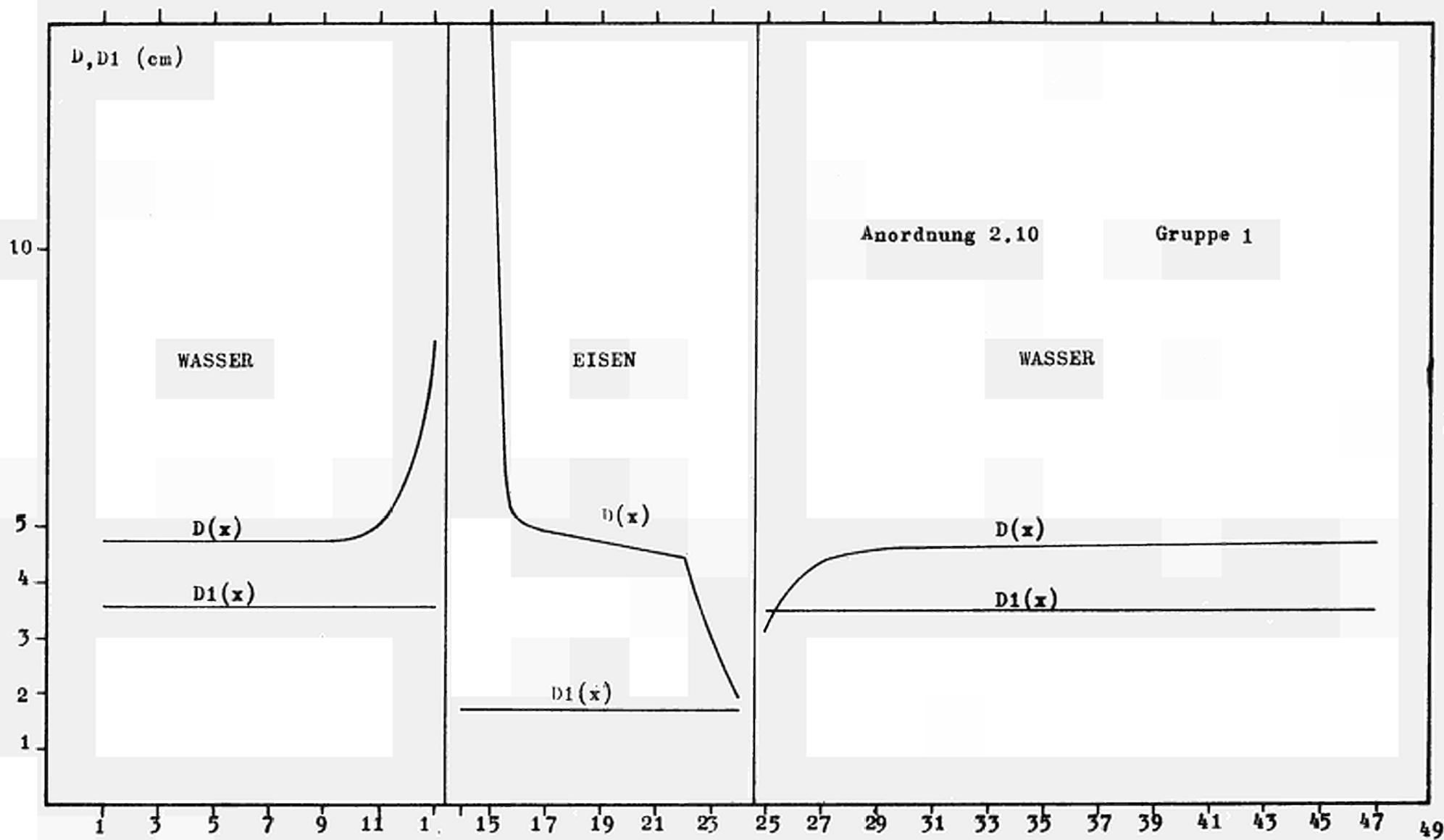


Abb. 10a Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppe 1. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt im Eisen 0,2 cm, im Wasser 1,265 cm.

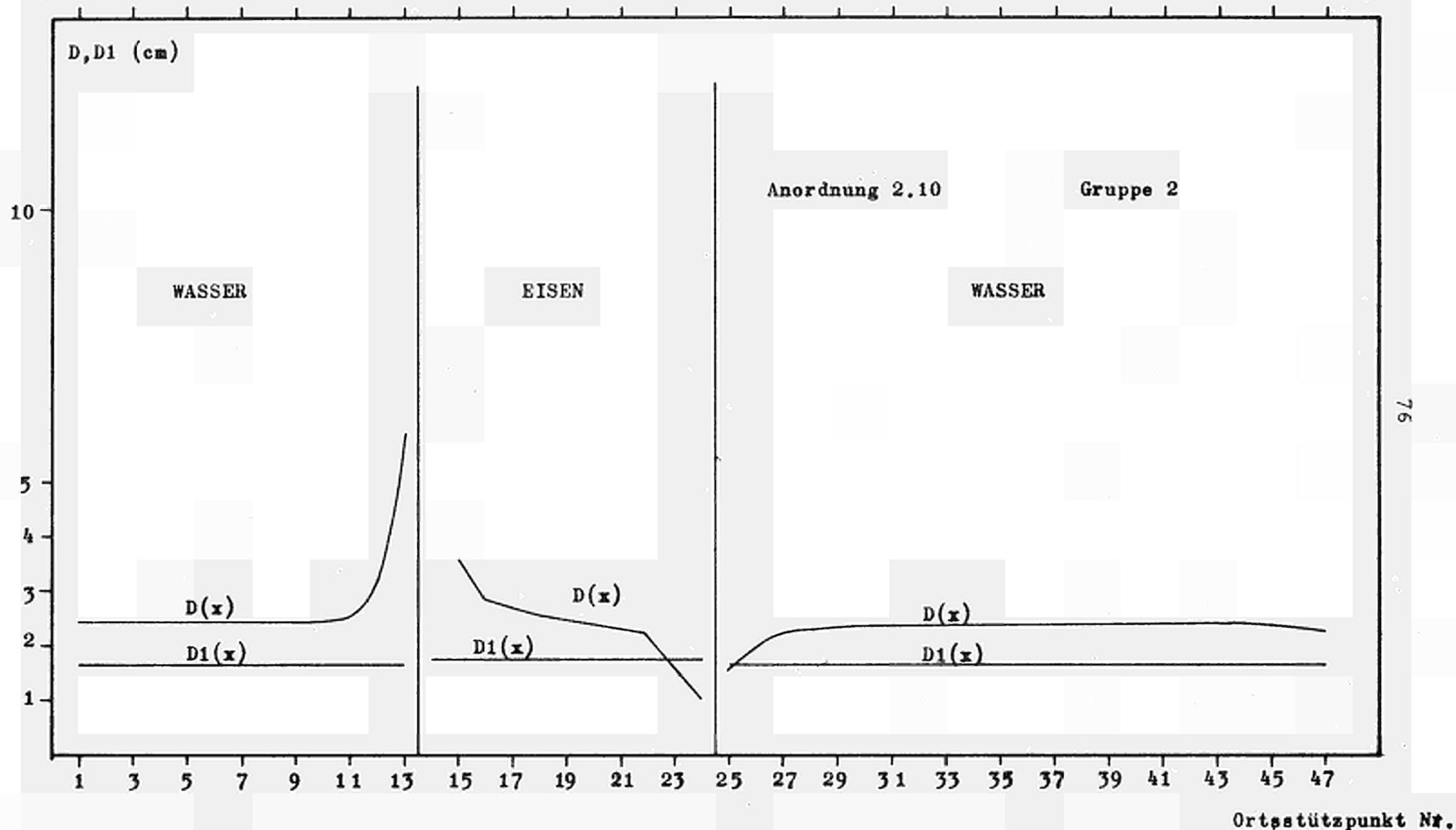


Abb. 10b Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppe 2. Abstände zwischen Ortsstützpunkten siehe Abb. 10a.

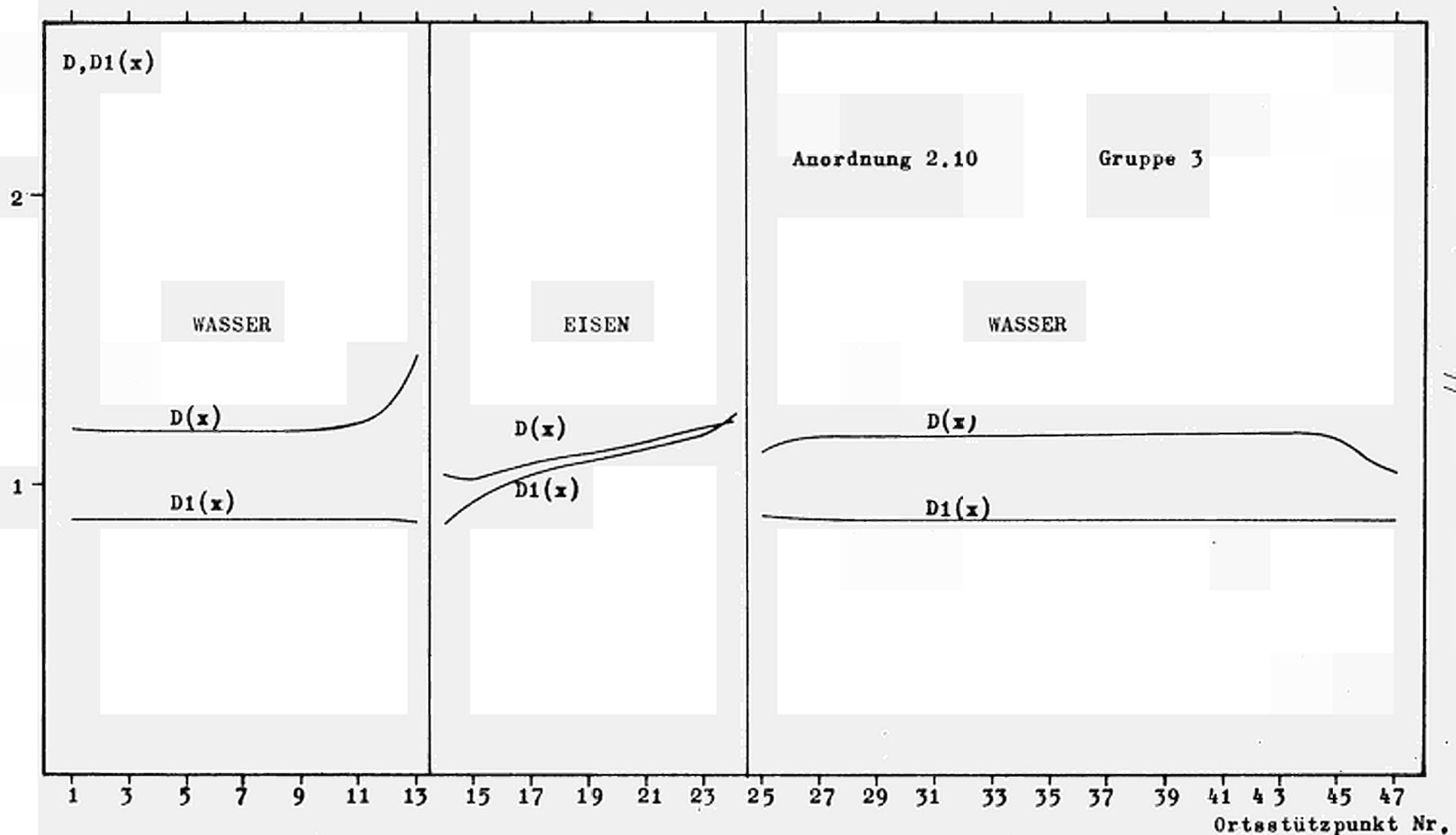


Abb. 10c Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der D_1 -Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppe 3. Abstände zwischen den Ortsstützpunkten siehe Abb.10a.

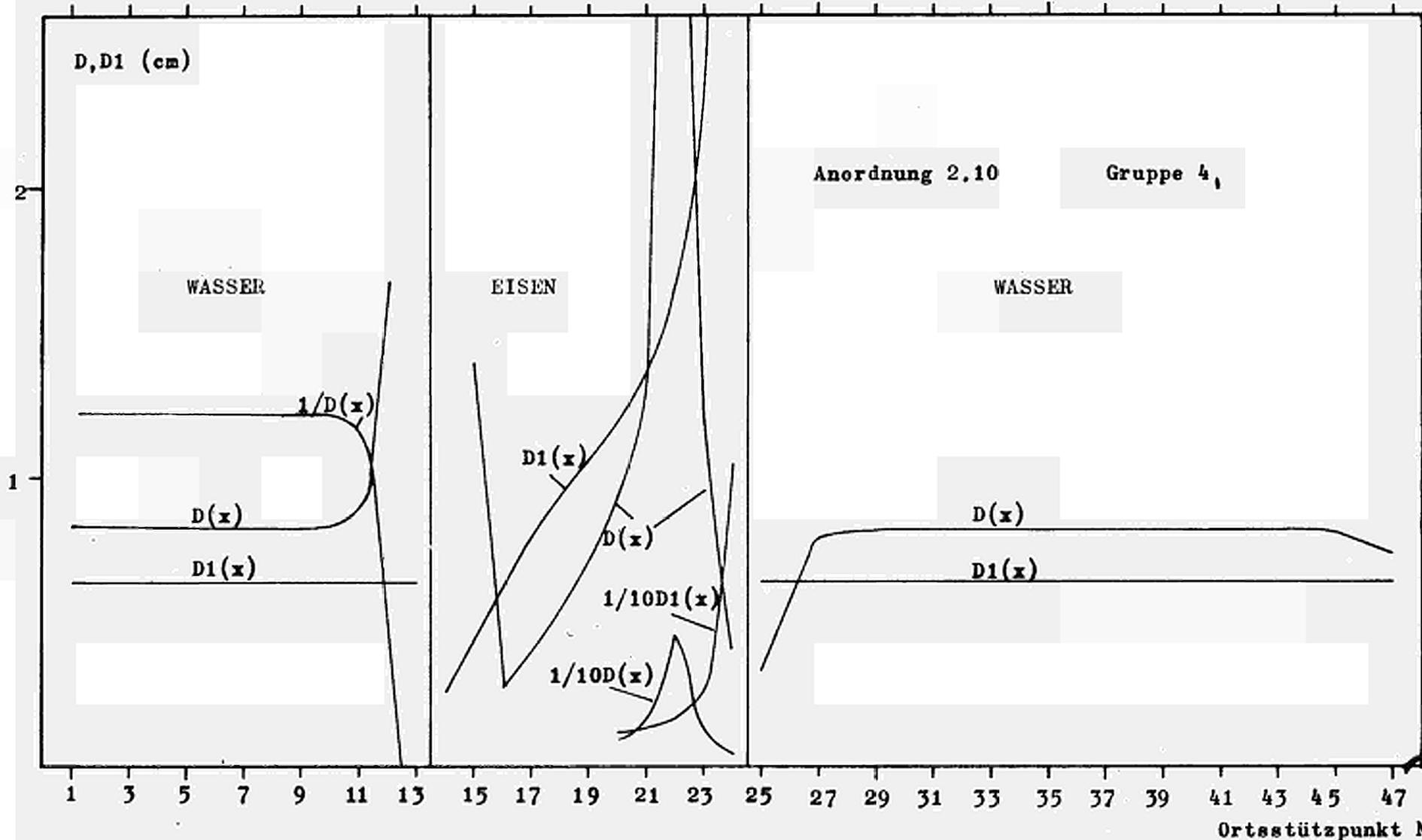


Abb. 10d Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der $D1$ -Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppe 4. Abstände siehe Abb.10a.

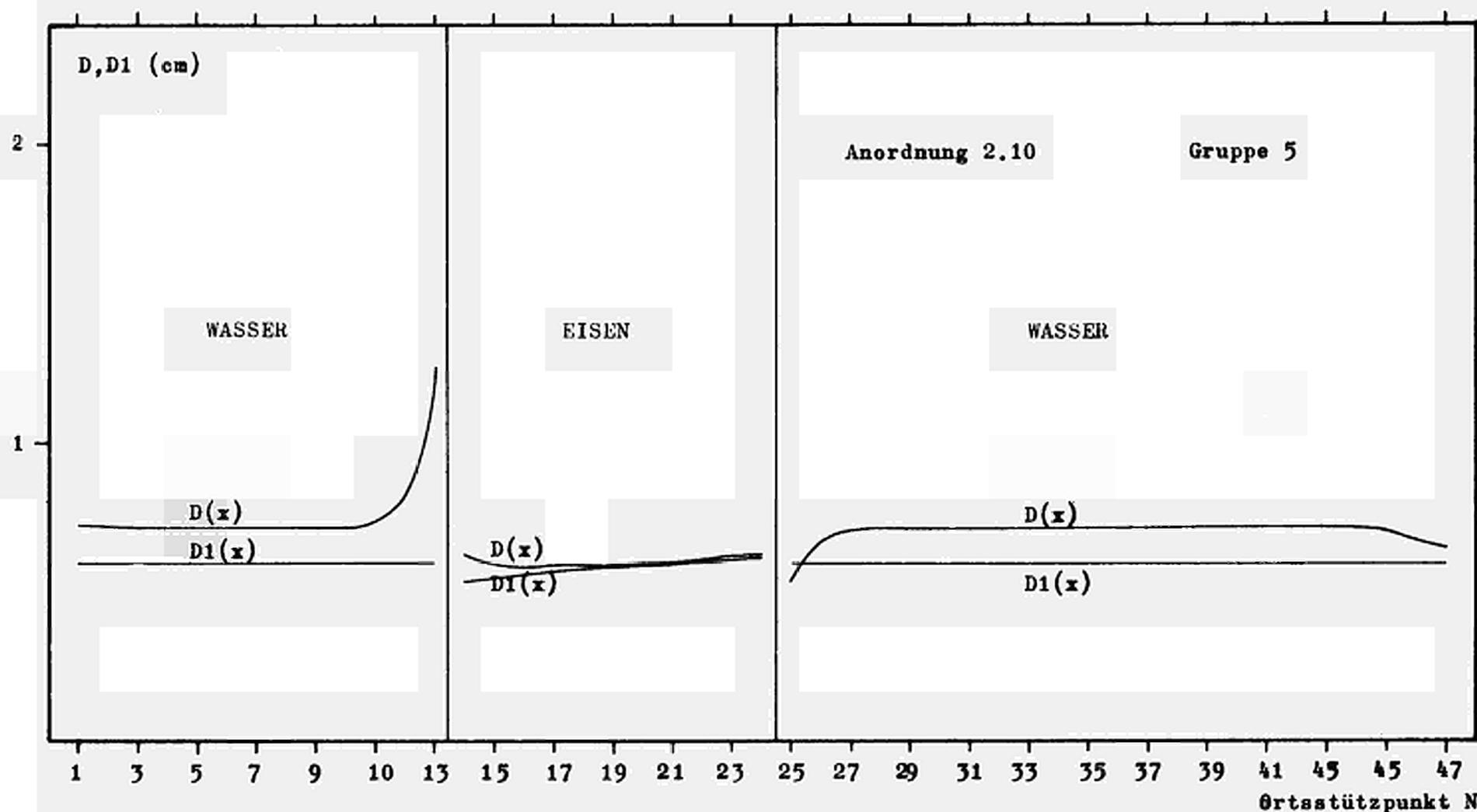


Abb. 10e Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der D_1 -Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 2.10 für die Gruppe 5. Abstände siehe Abb. 10a.

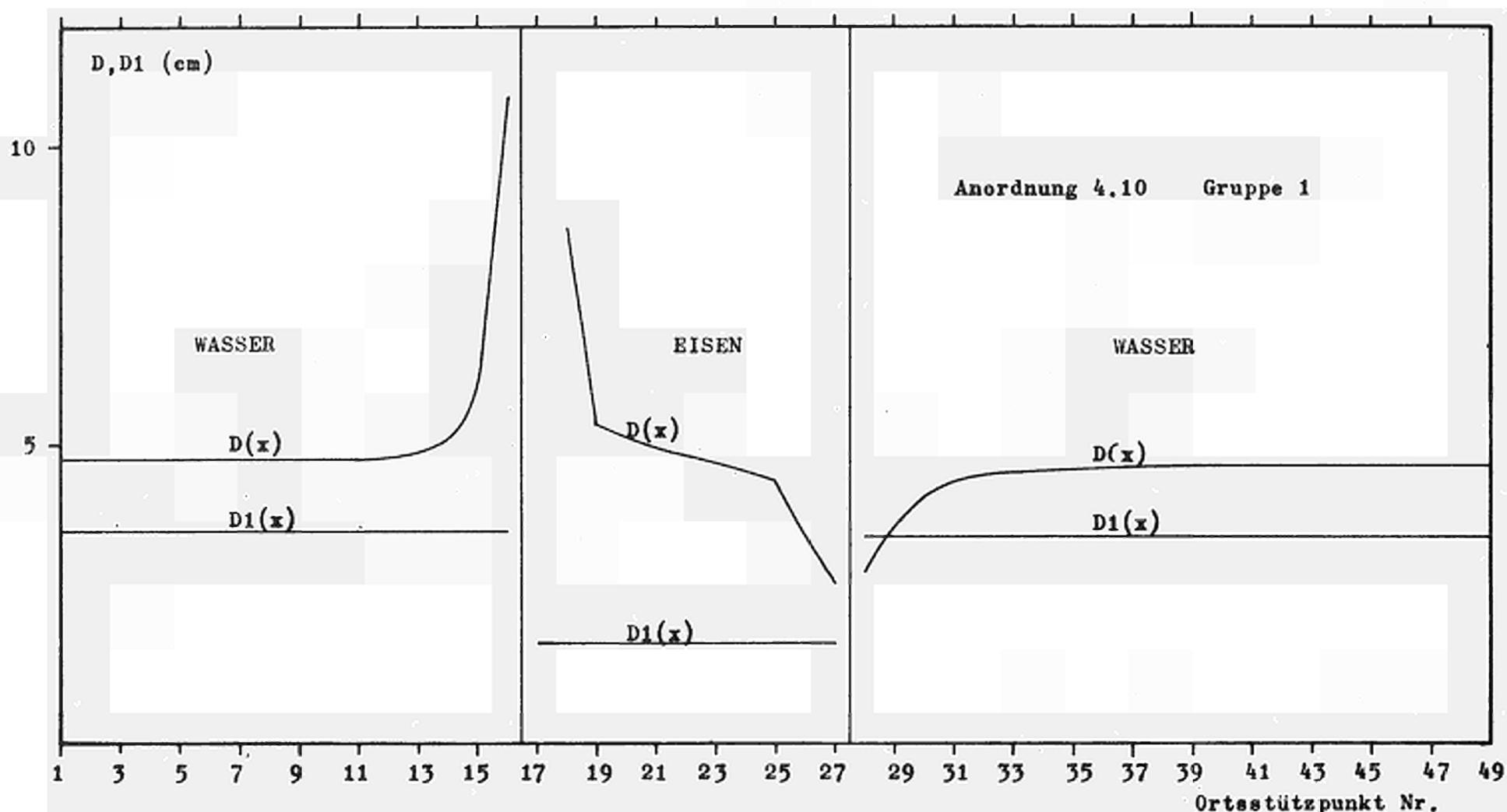


Abb. 11a Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D1(x)$, in der Anordnung 4.10 für die Gruppe 1. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt in Eisen 0,4 cm, in Wasser 1,265 cm.

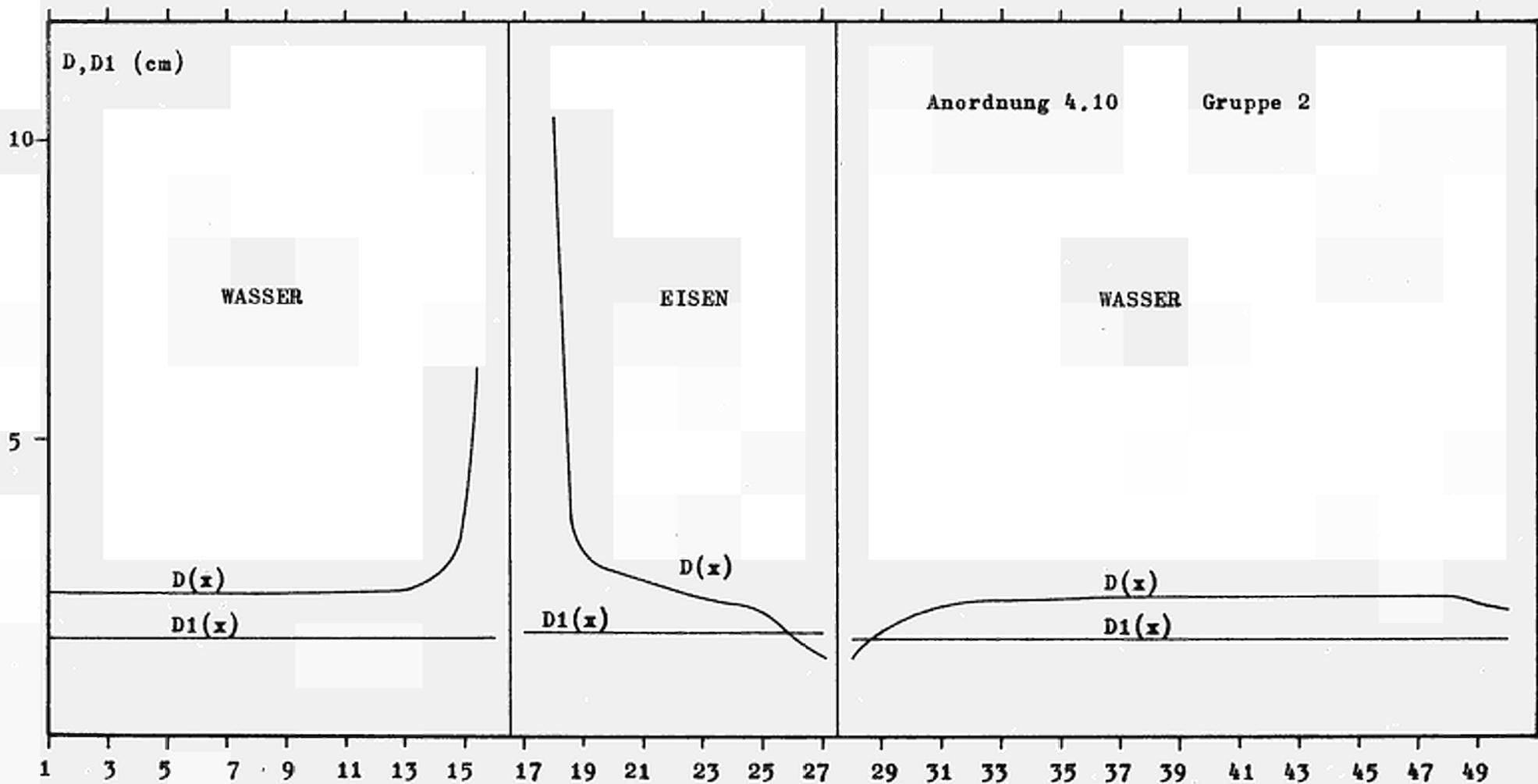


Abb. 11b Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 4.10 für die Gruppe 2. Abstände siehe Abb. 11a. Ortsstützpunkt Nr.

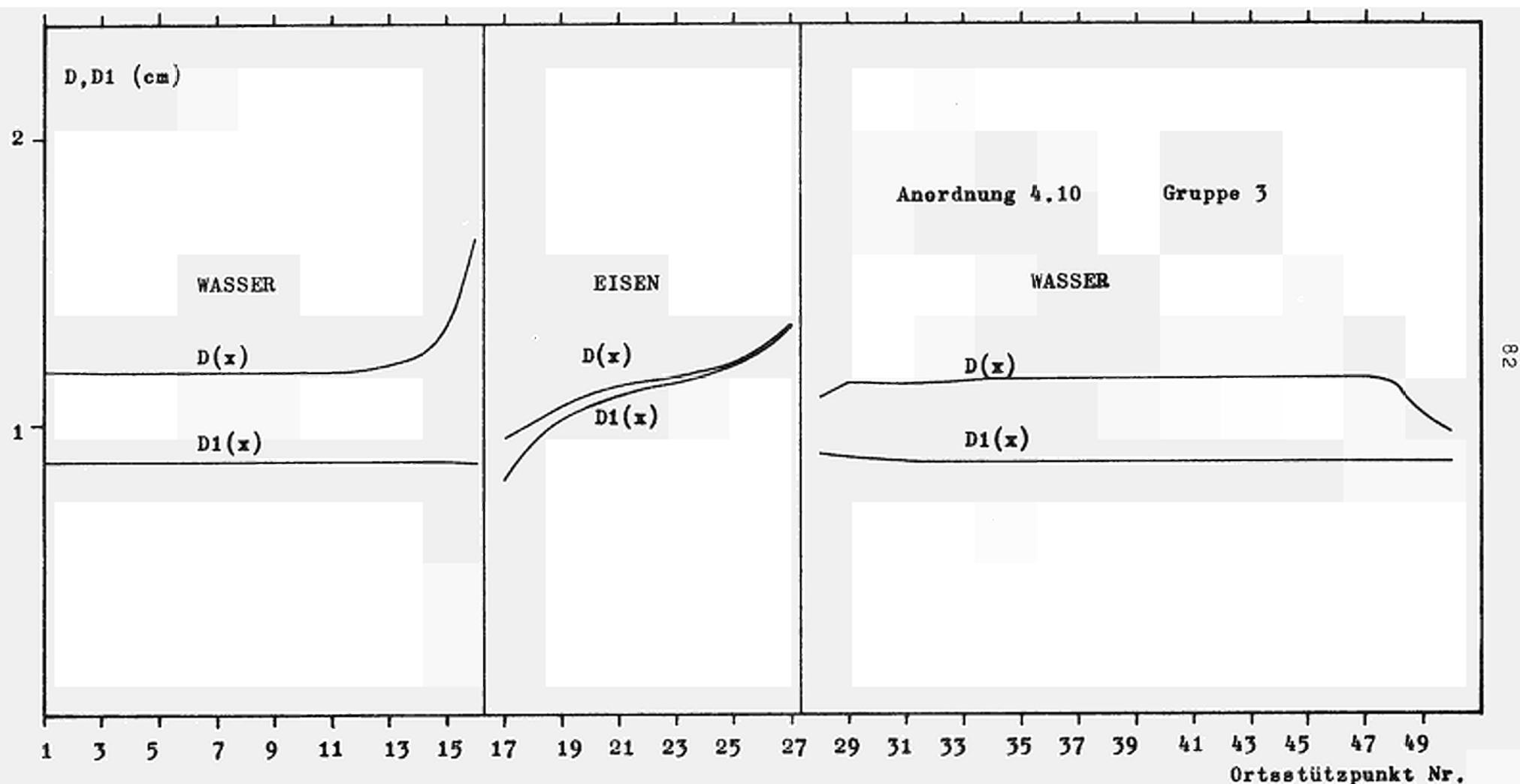


Abb. 11c Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der $P1$ -Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 4.10 für die Gruppe 3. Abstände siehe Abb. 11a.

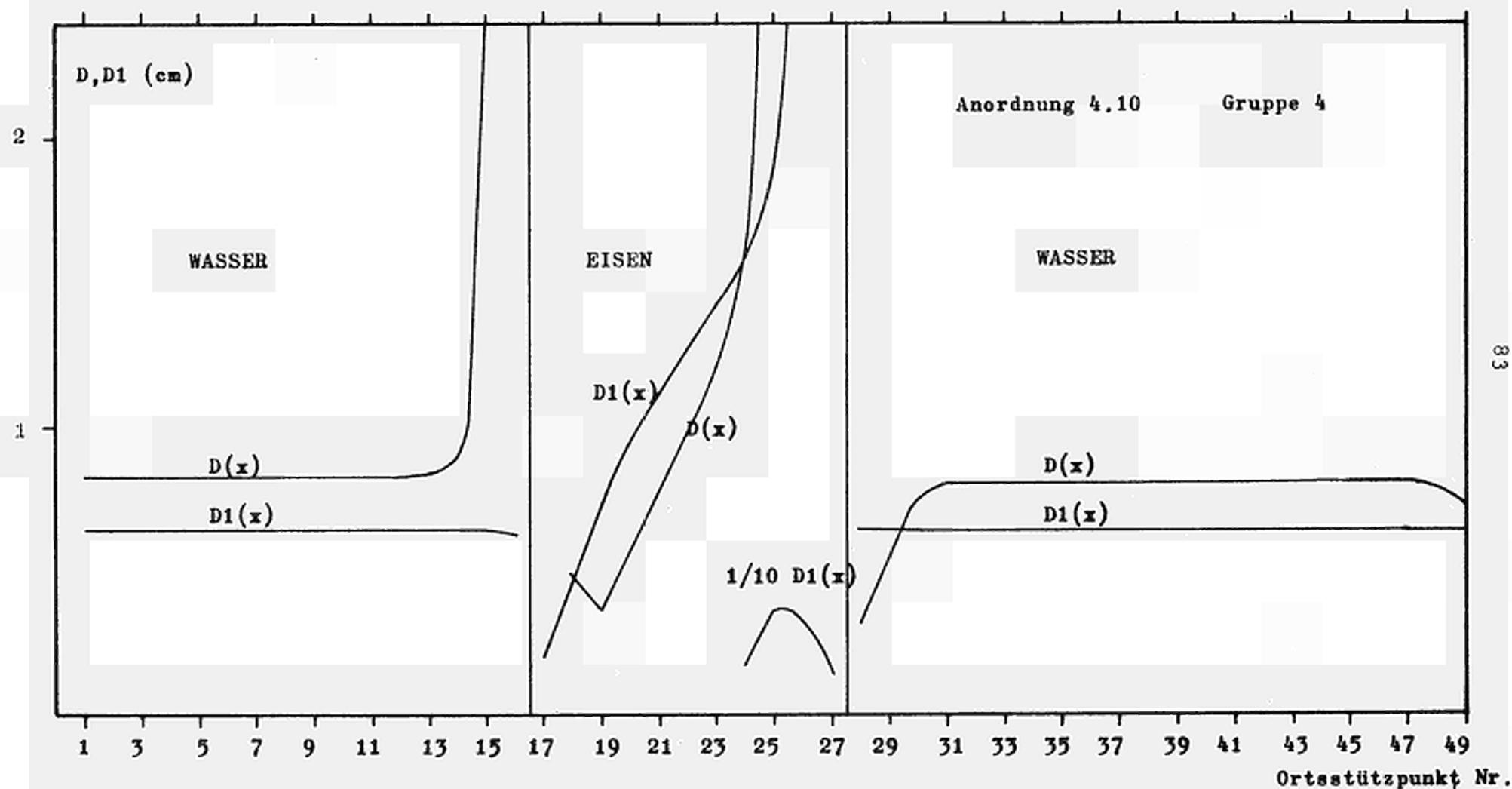


Abb. 11d Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der F_1 -Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 4.10 für die Gruppe 4. Abstände siehe Abb. 11a.

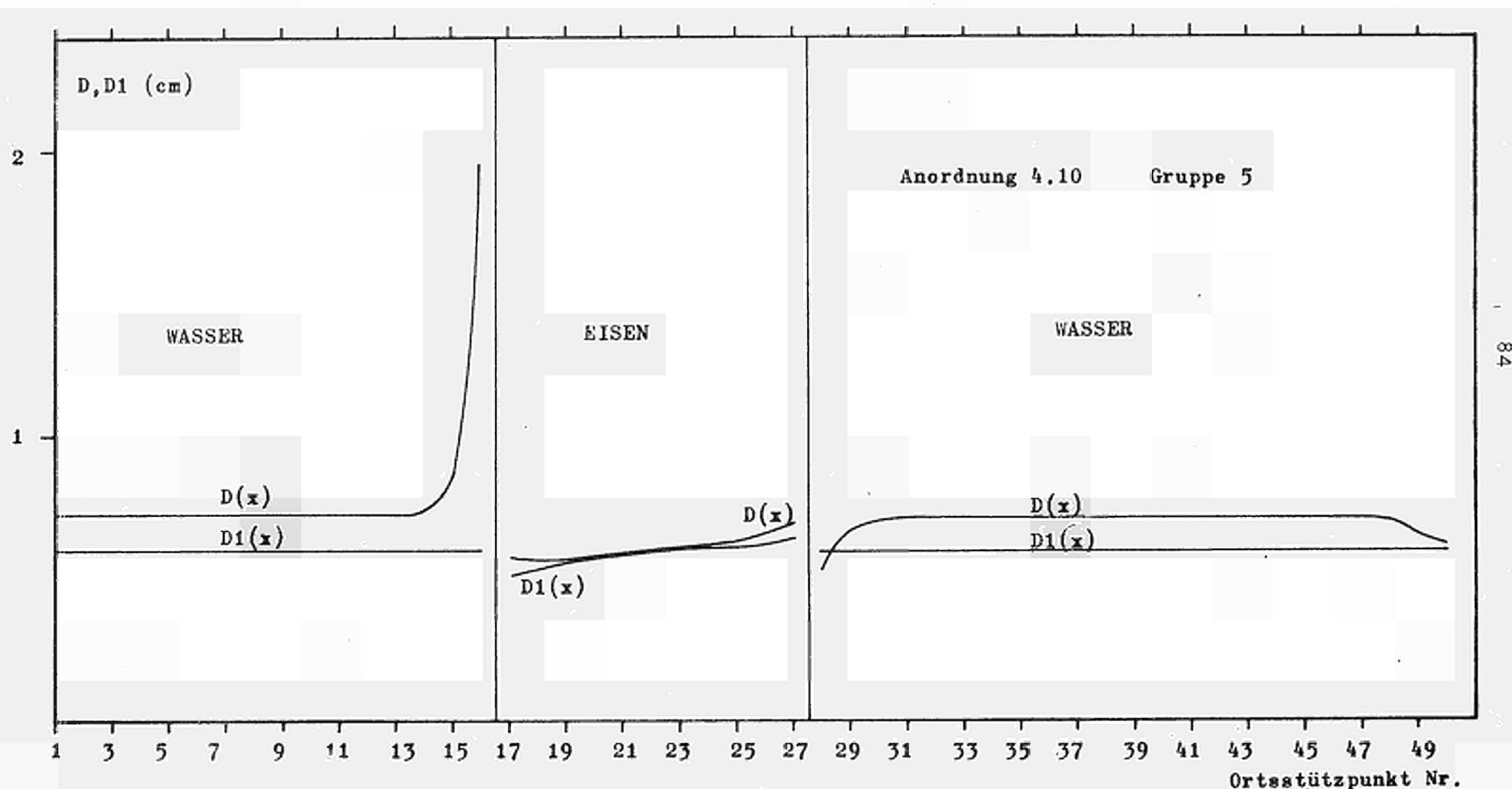


Abb. 11e Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 4.10 für die Gruppe 5. Abstände siehe Abb. 11a.

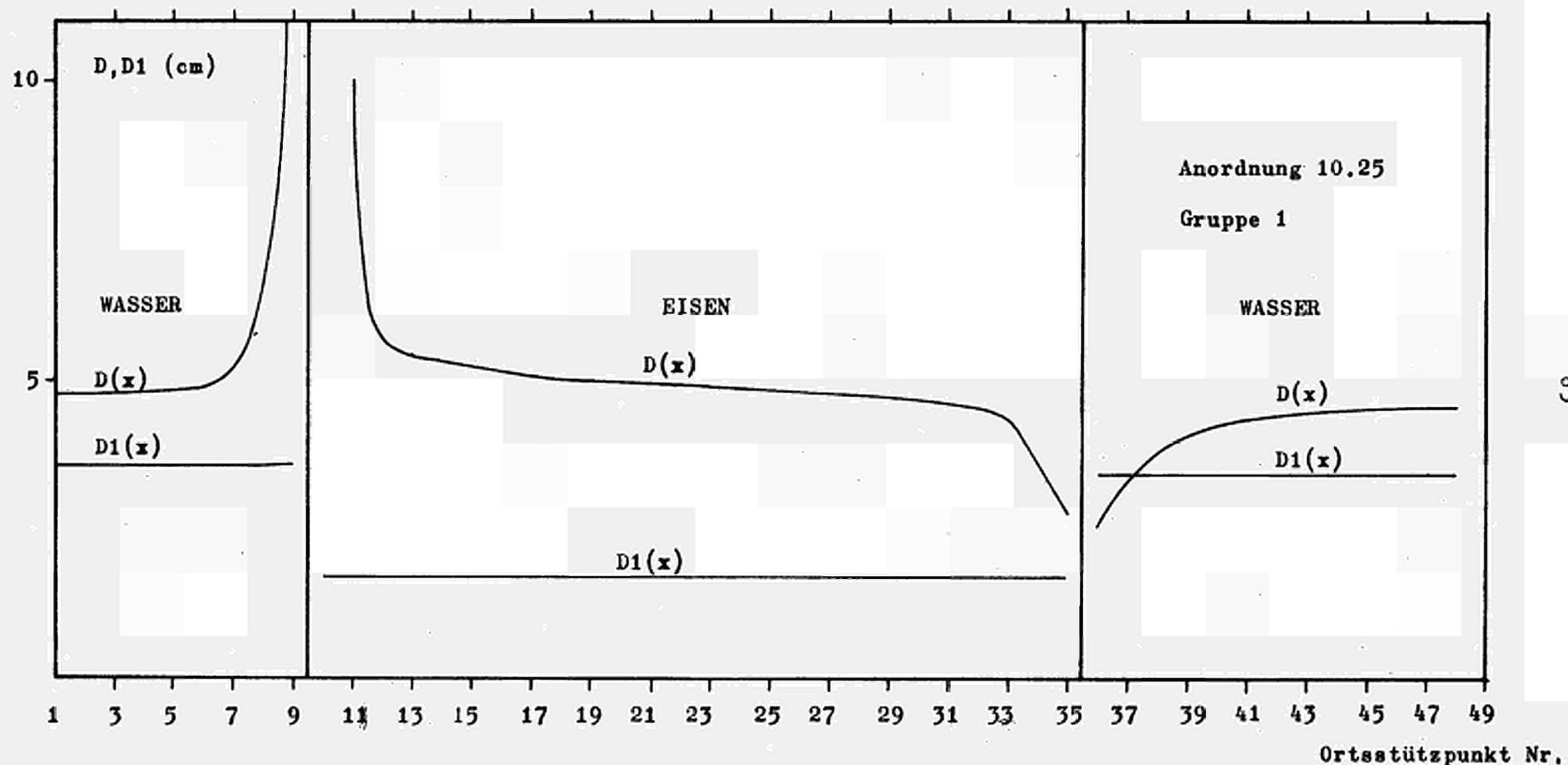


Abb. 12a Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der I1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppe 1. Der Abstand zwischen zwei Ortsstützpunkten beträgt im Eisen 0,4cm, im Wasser 1,25 cm.

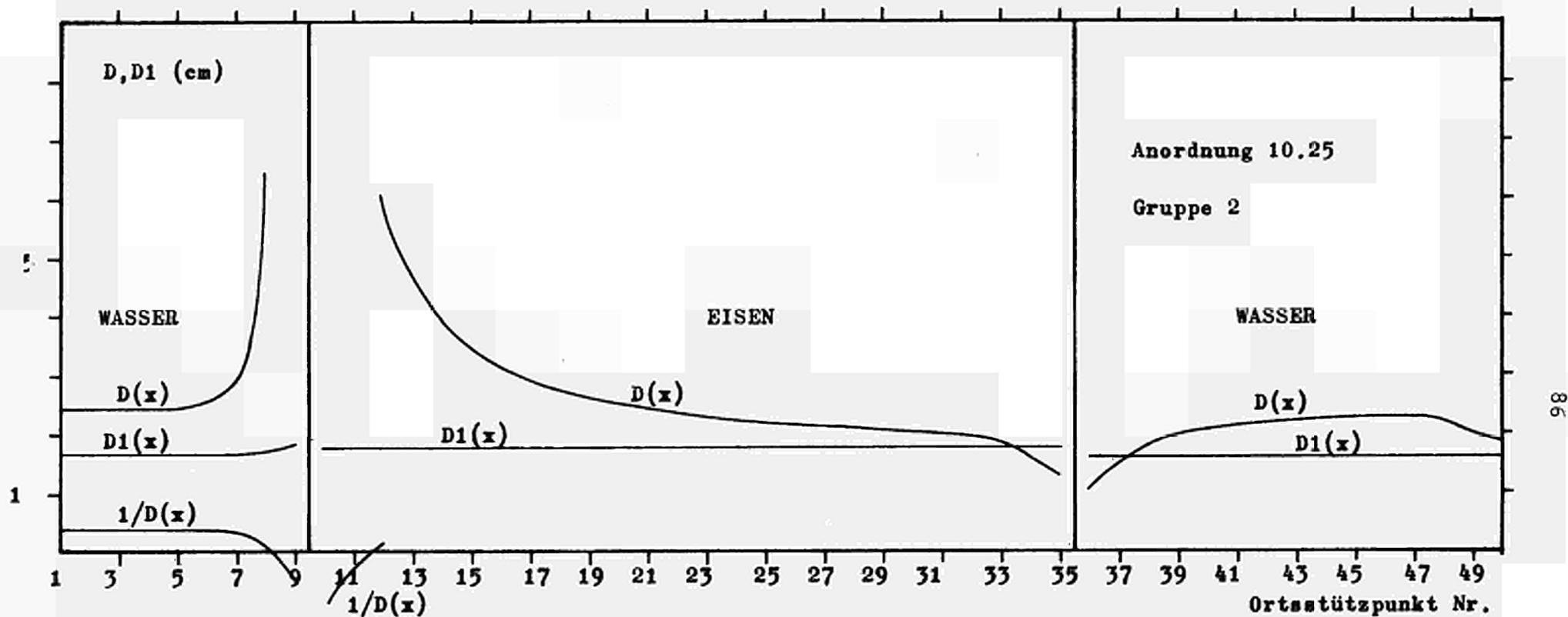


Abb. 12b Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppe 2. Abstände siehe Abb. 12a. Ferner eingetragen $3 \sum_{tr}(x) = 1/D(x)$, da $D(x)$ eine Singularität besitzt.

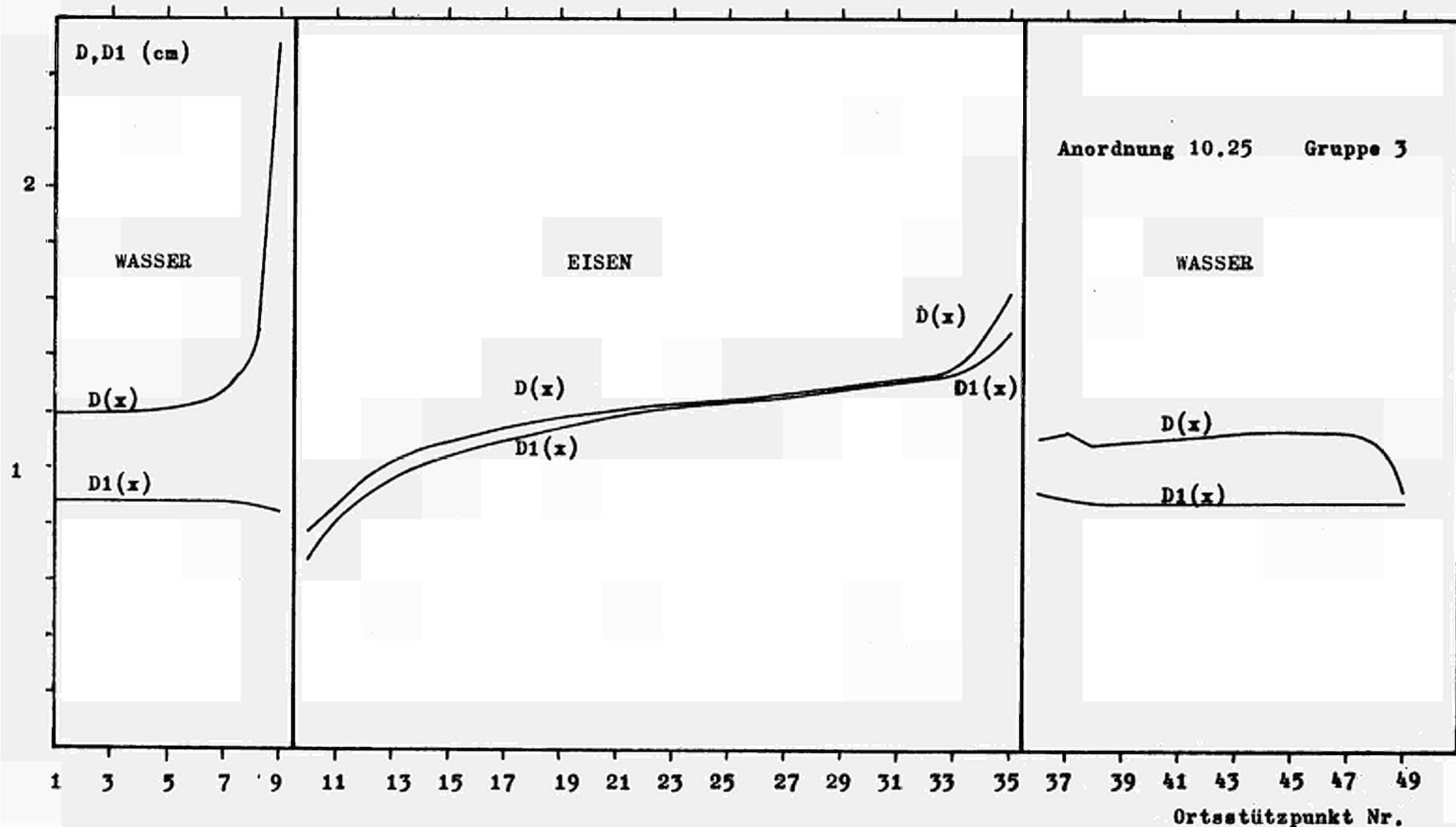
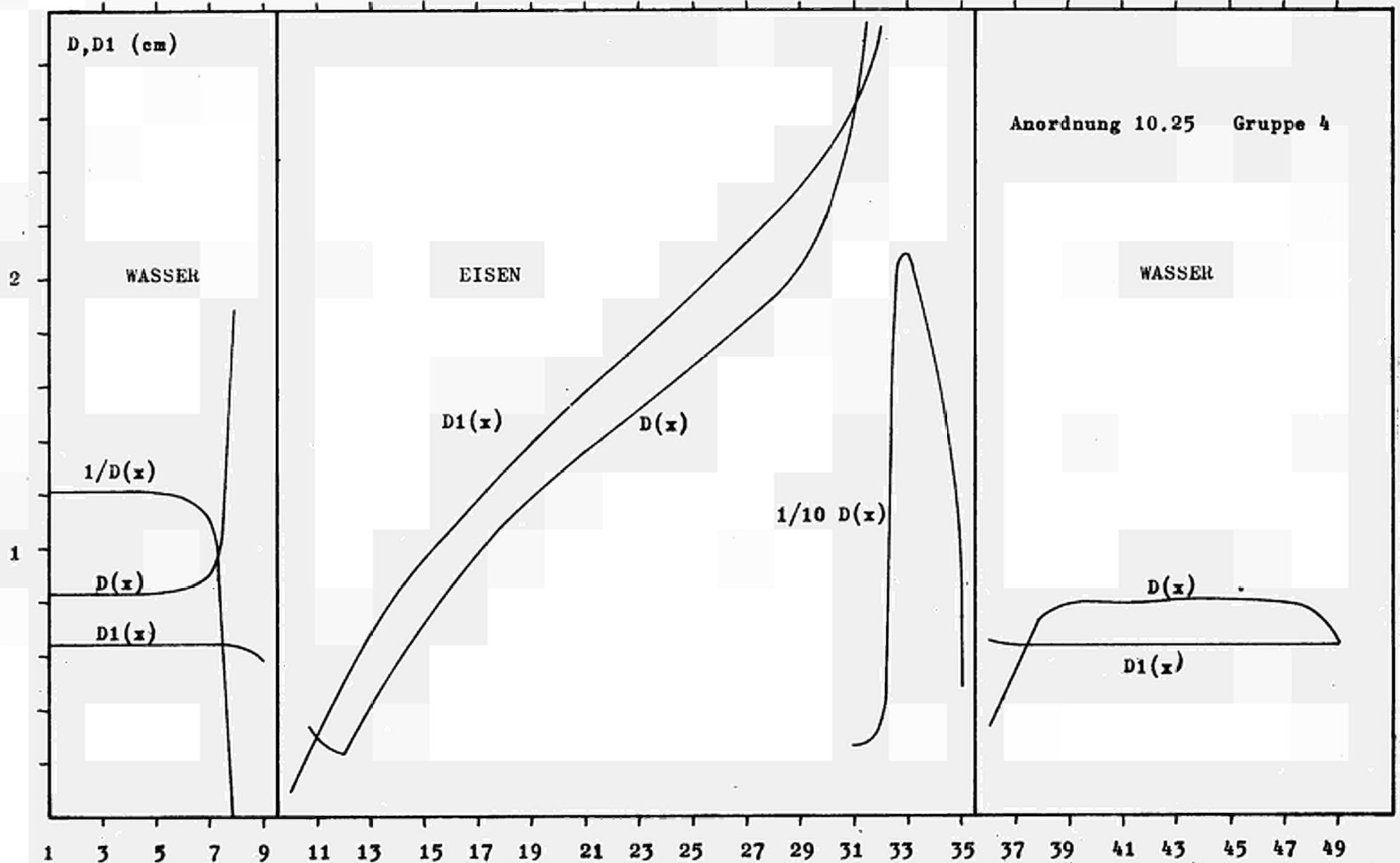


Abb. 12c Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppe 3. Abstände zwischen Ortsstützpunkten siehe Abb. 12a.



Anordnung 10.25 Gruppe 4

88

Abb. 12d Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppe 4. Abstände siehe Abb. 12a.

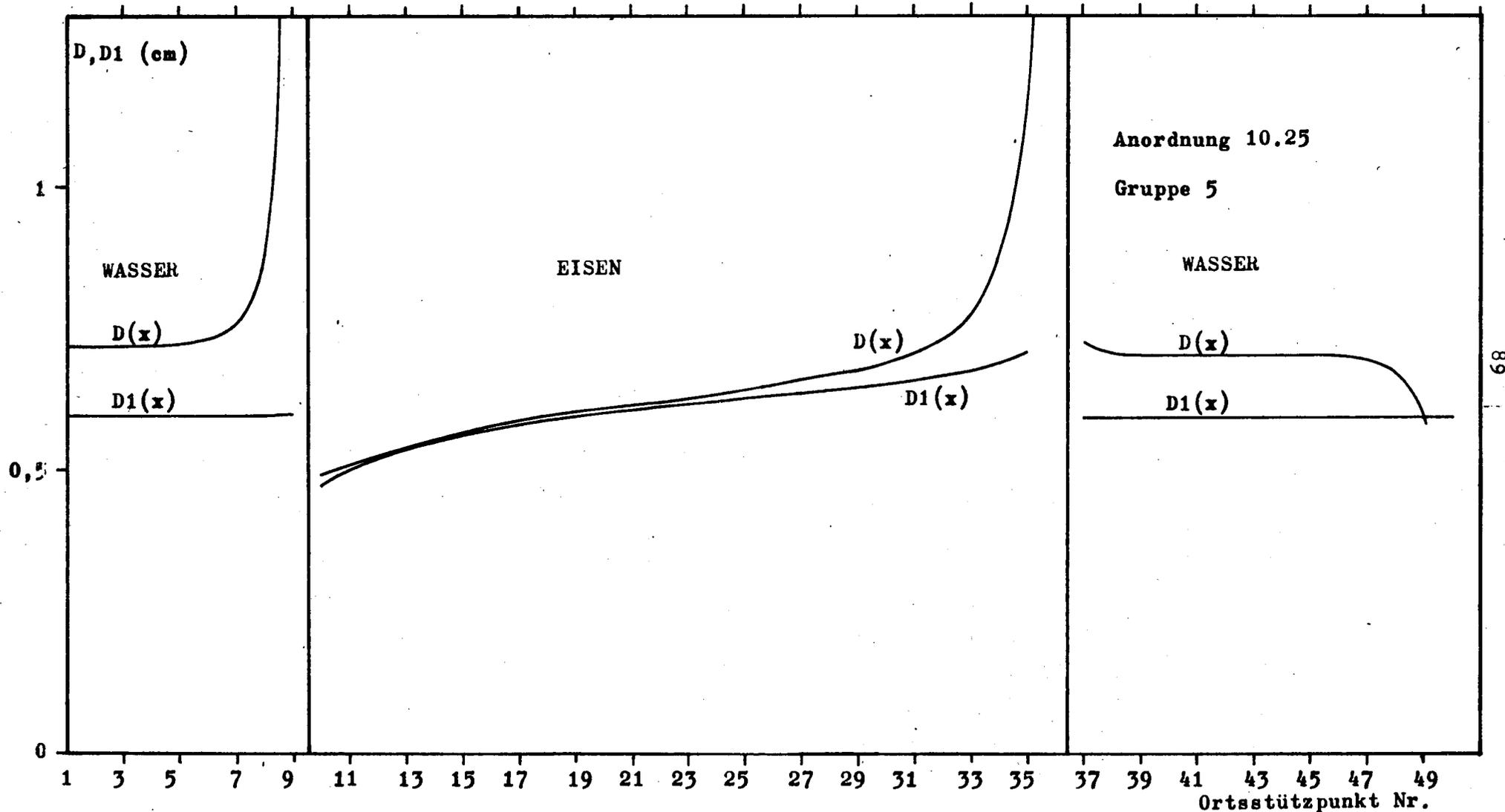


Abb. 12e Der Verlauf der transporttheoretischen Diffusionskonstanten $D(x)$ und der P1-Diffusionskonstanten $D_1(x)$ in der Anordnung 10.25 für die Gruppe 5. Abstände zwischen den Ortsstützpunkten siehe Abb. 12a.

ersten und zweiten Gruppe wesentlich über $D_1(x)$ und tendiert, wie Gruppe 2 in der Anordnung 10.25 zeigt, dazu, $D_1(x)$ asymptotisch zu erreichen. Im Energiegebiet der Gruppe 2 ist dabei, wie im vorigen Abschnitt diskutiert, die 4 cm Eisenplatte noch optisch dünn, die 10 cm Eisenplatte ist es jedoch nicht mehr. Ab Gruppe 3 nähern sich die Kurven von $D(x)$ und $D_1(x)$ immer mehr. Außerdem sind innerhalb des Eisens beide Größen ortsabhängig. Dieser Effekt beruht darauf, daß hier eine kräftige Änderung der Ströme innerhalb des Eisens vorliegt, wie im vorigen Abschnitt gezeigt. Auffällig sind die starken Variationen von $D(x)$ an den Rändern der Eisenplatte. An der Vorderseite steigt $D(x)$ stark an, was auf ein Kleinerwerden von $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$ hindeutet. Man kann dieses auch so interpretieren, daß die effektive Transportweglänge größer wird. Das Umschlagen von $D(x)$ zu negativen Werten in Gruppe 3 und 4 zeigt jedoch, daß diese Interpretation jedoch nicht mehr aufrechtzuerhalten ist. In Abb. 12 b) ist auch noch $1/D(x) = 3 \sum_{tr}(x)$ eingetragen, und man erkennt, daß diese Kurve glatt durch Null geht. Da auch ein negativer Transportquerschnitt seine Bedeutung verliert, kann man nur feststellen, daß eine Betrachtung in Begriffen der P1-Approximation nicht mehr am Platze ist.

Allgemein kann man feststellen, daß dieser Effekt darauf beruht, daß das Eisen dem Durchgang der Neutronen wegen seiner nahezu isotropen Streuung einen Widerstand entgegengesetzt. Diese hat nämlich zur Folge, daß das Verhältnis von Strom zu Fluß gegenüber dem umliegenden Wasser erheblich kleiner wird (siehe Tab. I). Dadurch entspricht einem glatt durch das Eisen verlaufenden Strom ein Ansteigen des Flusses mit einem kleiner werdenden Flußgradienten vor der Eisenplatte der ^{im} Fall, daß die Eisenplatte optisch dick wird sogar sein Vorzeichen umkehrt. An der Hinterseite der Platte findet ein entsprechender Abfall des Flusses statt, der dazu führt,

daß $D(x)$ absinkt. Die Abb. 17 illustriert diese Verhältnisse. Man sieht, daß in Gruppe 2, 3 und 5 bei nahezu konstantem Strom im Innern des Eisens der Fluß zu einem relativen Maximum ansteigt. Das Minimum des Stromes an der Vorderseite des Eisens in Gruppe 4 rührt offenkundig daher, daß der Strom in einem Teilbereich der Gruppe umgekehrtes Vorzeichen besitzt (vergl. Abb. 9). Der extreme Verlauf von $D(x)$ in Gruppe 4 ergibt sich daraus, daß in ihr einem noch ansteigenden Strom ein immer flacher verlaufender Neutronenfluß entspricht. Dieses rührt daher, daß die in das Minimum der Streuresonanz eingestreuten Neutronen nach beiden Seiten ohne wesentliche Behinderung ablaufen und dabei einen örtlich fast konstanten Fluß aufbauen. Dies um so mehr, als sie sich vor dem Stoß im Maximum der Streuresonanz befanden, die optisch dick ist. Die Übereinstimmung des Verlaufes von $D(x)$ mit dem von $D_1(x)$ zeigt die grundsätzliche Richtigkeit dieses Effektes.

Daß die Abweichungen von $D(x)$ und $D_1(x)$ zueinander in den tieferen Gruppen geringer werden, ergibt sich daraus, daß in diesen Energiebereichen auch im Wasser der Fluß schon erheblich isotroper geworden ist, so daß die P1-Approximation nicht mehr wesentlich falsch wird, wenn man die Gruppe 4 einmal ausnimmt. Die Tabelle I zeigt das Verhältnis von Strom zu Fluß in den einzelnen Gruppen für Wasser und die Mitte der 4 cm starken Eisenplatte.

Tabelle I: Das Verhältnis von Strom und Fluß
in der Anordnung 4.10

Gruppe	1	2	3	4	5
1. Wasser	0.944	0.482	0.236	0.163	0.141
2. Eisen	0.696	0.293	0.159	0.122	0.086

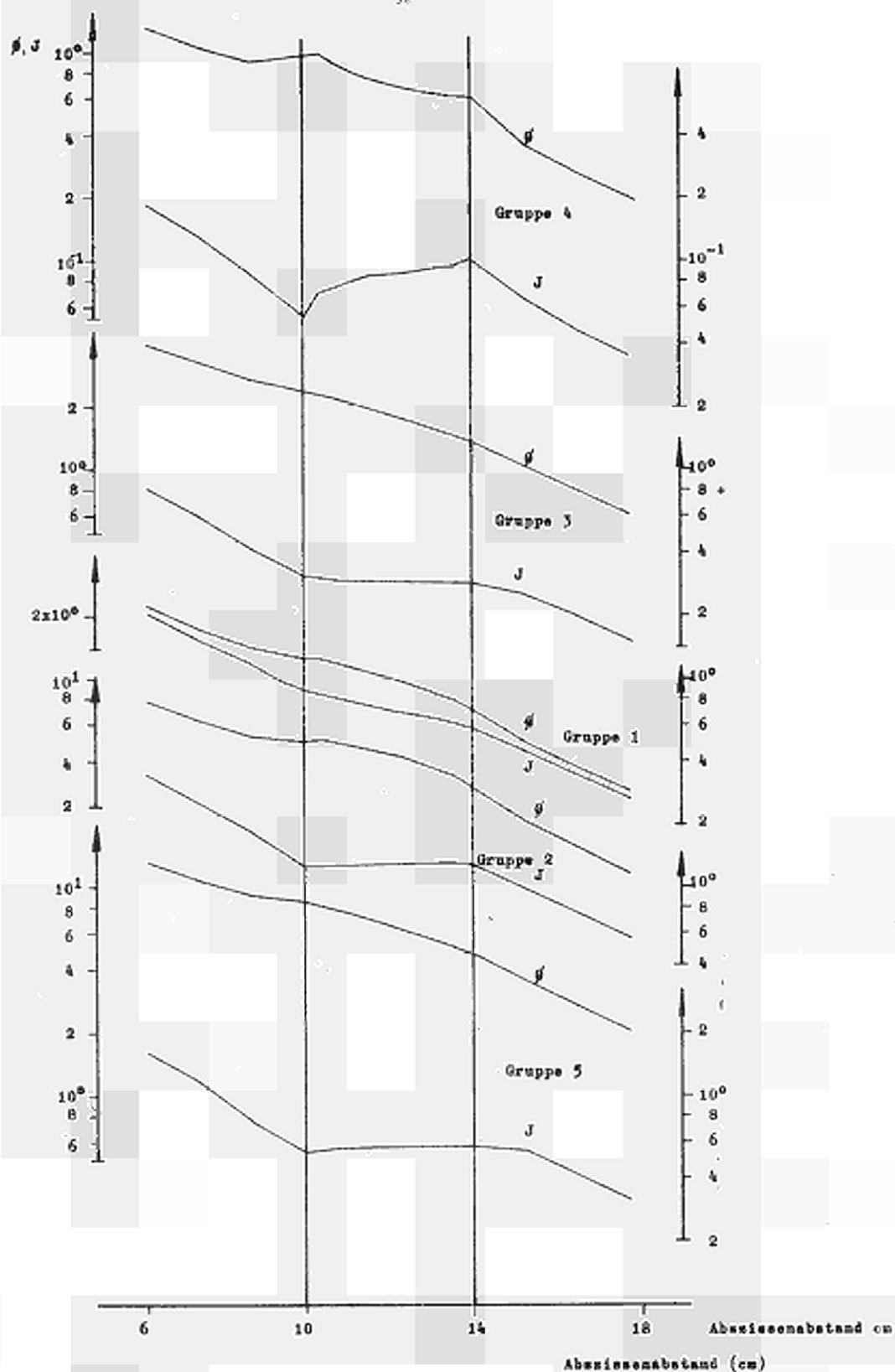


Abb. 17

Die örtlichen Verläufe von Strömen J und Flüssen ϕ in den einzelnen Gruppen in der Anordnung 4.10. Abszisse in cm, Ordinate in willkürlichen Einheiten.

Die unterschiedliche Bremskraft und der im Mittel höhere Streuquerschnitt des Eisens führt in diesen Gruppen jedoch dazu, daß sich das Neutronenspektrum im Innern des Eisens ändert, so daß die Diffusionskonstante auch außerhalb der Randstreifen keine Materialkonstante mehr ist.

Zum Abschluß dieser Diskussion soll noch darauf hingewiesen werden, daß die Wasserschichten hinter dem Eisen in den unteren Gruppen nicht ausreichen, daß die Neutronen das Gleichgewichtsspektrum wieder erreichten, was sich außer im Nichterreichen des asymptotischen Wertes der Diffusionskonstanten auch im Abknicken der Kurven am rechten Rande zeigt. Wie die Abbildungen zeigen, reicht der Einfluß der nicht ganz korrekten Randbedingungen jedoch nicht über einige Stützpunkte hinaus.

b) Der Verlauf der Removalquerschnitte

Die Verläufe der Removalquerschnitte in den drei Anordnungen sind in Abb. 13 dargestellt. Wie man den Abbildungen entnimmt, sind sie im Wasser fast konstant, obwohl in den Gruppen 3 und 4 an der Grenze zum Eisen ein gewisser Einfluß der Veränderung des Spektrums des Neutronenflusses festzustellen ist. Im Eisen spiegeln die Verläufe von \sum_{rem} im wesentlichen das Verhältnis von Fluß an der unteren Gruppengrenze zum Gesamtfluß in der ganzen Gruppe wieder. So ergibt sich in Gruppe 1, 2 und 5, wie es aufgrund der Verläufe der Wirkungsquerschnitte in ihnen zu erwarten ist, daß nur relativ kleine Variationen auftreten. In Gruppe 3 ist es jedoch das Ansteigen des Wirkungsquerschnittes an der unteren Gruppengrenze, das zu einem Abfall des Flusses führt. Da dieser Bereich jedoch zum Gesamtfluß in der Gruppe nicht mehr wesentlich beiträgt, ergibt sich ein entsprechender Verlauf des Removalquerschnittes, wie ihn die Lethargiegruppe Nr. 175 in Abb. 14 zeigt. In der 4. Gruppe trägt andererseits das

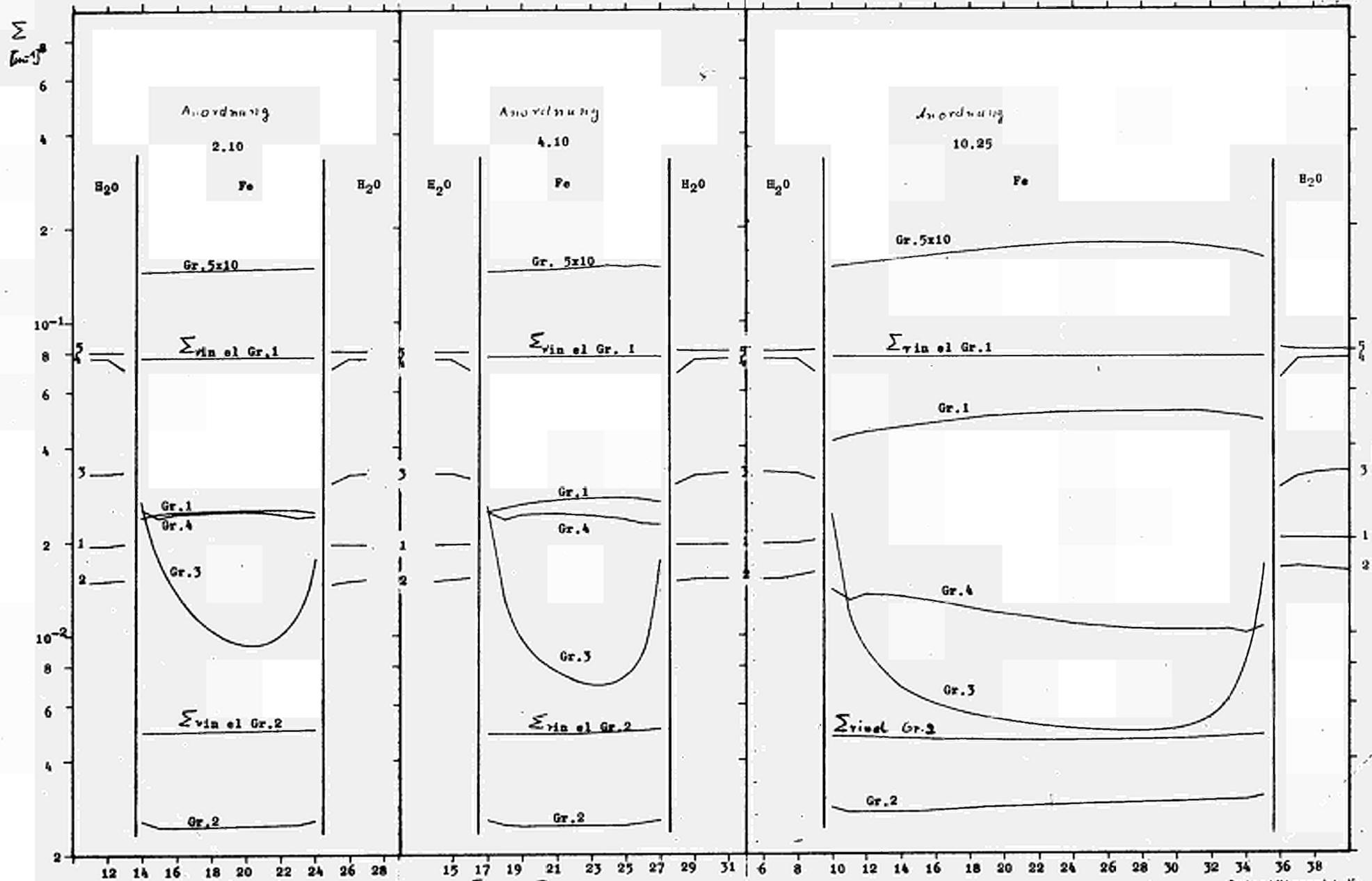


Abb. 13 Die Verläufe der Removalquerschnitte Σ_r und Σ_{vind} in den drei Anordnungen 2.10, 4.10 und 10.25. Vom Wasser ist nur ein kurzes Stück angegeben, da die Removalquerschnitte nur in der nächsten Umgebung des Eisens variieren.

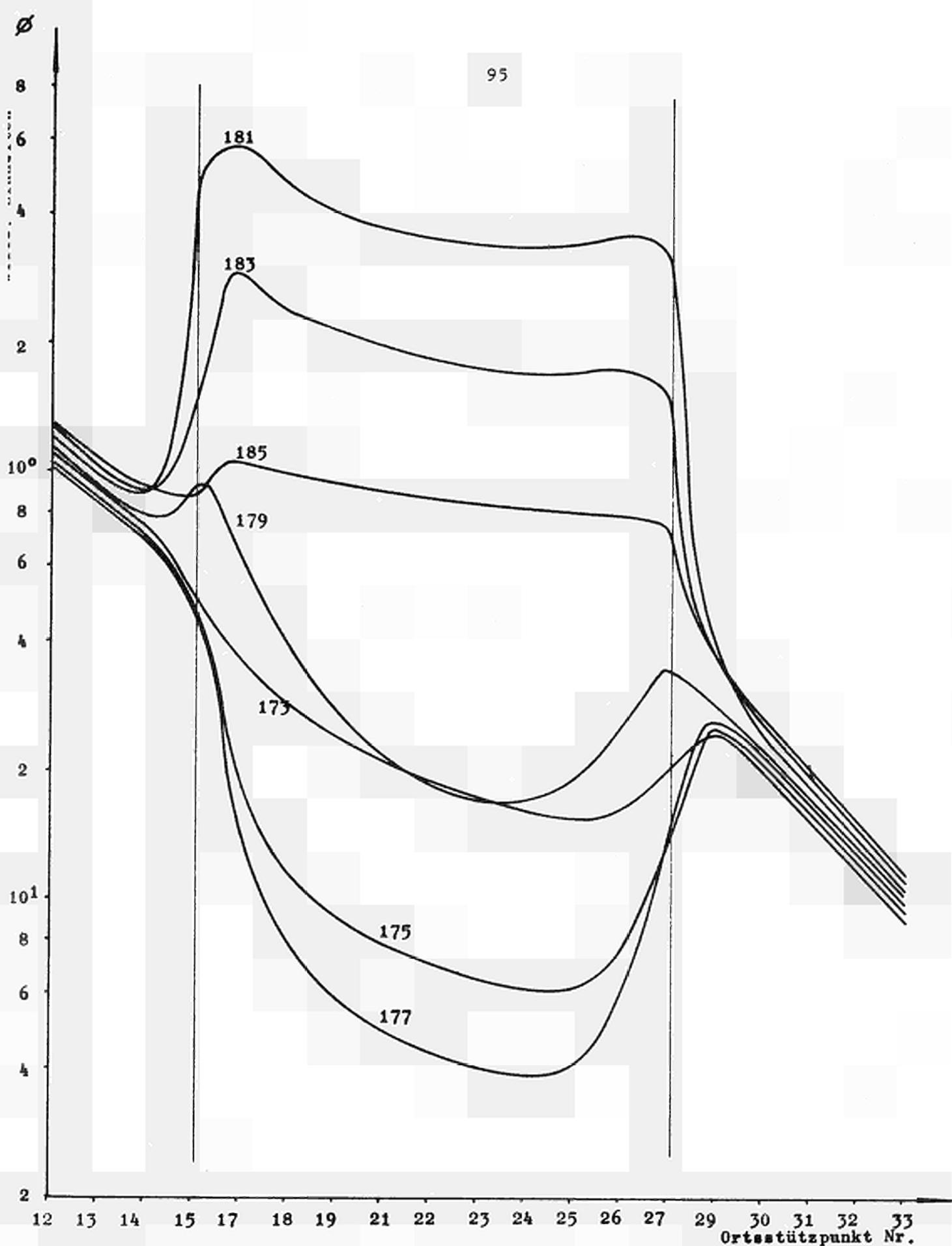


Abb. 14

Der Verlauf der Neutronenflüsse in der 4 cm Eisenschicht in der Umgebung der großen Streuresonanz. Ziffern = Lethargiegruppennummern wie in Abb. 7.

Tabelle II: Die Gruppenkonstanten des asymptotischen
Wasserspektrums für Wasser

Gruppe	D	D1	\sum_{rem}
1	4.7297	3.5387	1.9582-1
2	2.4188	1.6537	1.4847-1
3	1.1845	0.8792	3.2838-1
4	0.8166	0.6385	7.6006-1
5	0.7099	0.5976	8.0251-1

Tabelle III: Die gemittelten Diffusionskonstanten $\langle D \rangle$ und $\langle D_1 \rangle$ für die Gruppen 1 - 5 und die drei Anordnungen mit 2 cm, 4 cm und 10 cm Eisenstärke sowie für ein 1/E-Spektrum

Gruppe	Anordnung Material	2.10		4.10		10.25		1/E
		$\langle D \rangle$	$\langle D_1 \rangle$	$\langle D \rangle$	$\langle D_1 \rangle$	$\langle D \rangle$	$\langle D_1 \rangle$	$\langle D_1 \rangle$
1	H ₂ O	4.7831	3.5396	4.7717	3.594	4.8956	3.5452	3.3351
	Fe	4.9941	1.7010	5.0748	1.7017	5.2208	1.7033	1.6913
	H ₂ O	4.2537	3.4982	4.0491	3.4640	3.7647	3.3986	3.3351
2	H ₂ O	2.4529	1.6537	2.4466	1.6536	2.5827	1.6602	1.3825
	Fe	2.6495	1.7431	2.6410	1.7497	2.6197	1.7607	1.6433
	H ₂ O	2.1326	1.6472	1.9956	1.6391	1.7082	1.5951	1.3825
3	H ₂ O	1.1987	0.8791	1.1974	0.8970	1.2188	0.8788	0.8307
	Fe	1.1114	1.0659	1.1450	1.0999	1.1887	1.1519	0.8031
	H ₂ O	1.1639	0.8816	1.1474	0.8826	1.1111	0.8857	0.8307
4	H ₂ O	0.8389	0.6385	0.8334	0.6385	0.8902	0.6382	0.6373
	Fe	0.8087	0.8925	0.9330	1.0271	1.1643	1.3197	0.4177
	H ₂ O	0.6639	0.6387	0.6430	0.6394	0.6225	0.6408	0.6373
5	H ₂ O	0.7235	0.5976	0.7224	0.5976	0.7339	0.5976	0.5973
	Fe	0.5964	0.5783	0.6060	0.5862	0.6150	0.5955	0.5600
	H ₂ O	0.6839	0.5974	0.6803	0.5972	0.6862	0.5971	0.5973

Maximum des Flusses im Minimum der Streuresonanz noch zum Gesamtfluß bei, so daß der Removalfluß einen entgegengesetzten Trend zeigt. Dieser Einfluß ist jedoch namentlich in den dünneren Schichten bei weitem nicht so stark wie in Gruppe 3, deren untere Grenze daher als äußerst ungünstig angesetzt betrachtet werden muß.

c) Die inelastischen Wirkungsquerschnitte

Die inelastischen Wirkungsquerschnitte sind nahezu konstant. Für die Gruppe 1 ist die Variation in Abb. 13 nicht mehr darzustellen, in Gruppe 2 ergibt sich ein leichter Abfall im Innern insbesondere der 10 cm Eisenschicht, die mit dem weicheren Neutronenspektrum des Eisens zusammenhängt.

8. Die Beziehungen der gemittelten Gruppenkonstanten untereinander und im Vergleich für die verschiedenen Anordnungen

a) Die Diffusionskonstanten

Sind innerhalb des Eisens und auch am Rande der Wasserschichten erhebliche Variationen der Gruppenkonstanten festzustellen, so zeigen jedoch die gemittelten Konstanten nur schwache Abhängigkeiten von der Eisenstärke. Allerdings ist der Unterschied zu den mit einem $1/E$ -Spektrum ermittelten Konstanten schon beträchtlich, insbesondere für die Diffusionskonstanten (siehe Tabelle III). Der Unterschied zwischen Diffusionsnäherung und Transportrechnung macht sich darin bemerkbar, daß in der zweiten Gruppe noch erhebliche Unterschiede bestehen, die sich mit abnehmender Energie vermindern. Während im Eisen $\langle D \rangle$ in der 5. Gruppe schon fast gleich $\langle D_1 \rangle$ ist, unterscheiden sich die beiden Größen im Wasser noch um etwa 10 %. Dieser Effekt wurde schon im letzten Abschnitt und in Abschnitt 5 c) besprochen.

Der Vergleich der Diffusionskonstanten für die verschiedenen Eisenstärken zeigt, daß nur in Gruppe 4 mit etwa 40 % Unterschied zwischen 2 cm und 10 cm starker Eisenplatte wesentliche Variationen auftreten, und zwar gilt dieses sowohl für $\langle D \rangle$ und $\langle D_1 \rangle$. Der Einfluß der Ränder und der Vernachlässigung der höheren Kugelfunktionsentwicklungsglieder zeigt sich nur darin, daß $\langle D_1 \rangle$ um 10 % höher als $\langle D \rangle$ liegt. Die übrigen Variationen stammen aus den starken Veränderungen des Neutronenspektrums, die sich in dieser Gruppe selbst nach Mittelung über die Eisenschicht noch bemerkbar machen.

Auf die Unterschiede der Diffusionskonstanten $D(x)$ von Wasser vor und hinter der Eisenplatte wurde oben schon hingewiesen. Bei der Mittelung über das Gebiet kommt hinzu, daß die Werte an den linken Rändern wegen der höheren Flüsse dort ein höheres Gewicht erhalten und dadurch die Konstanten $\langle D \rangle$ für Wasser hinter der Platte durch die niedrigen Werte von $D(x)$ am Rande der Eisenplatte bestimmt sind. Diese Konstanten hängen daher von der Stärke der Wasserschichten ab und sind für eine Verwendung nur bedingt brauchbar. Deswegen sind in Tabelle II noch zusätzlich die Gruppenkonstanten des asymptotischen Wasserspektrums angegeben.

b) Die Removalquerschnitte

Gegenüber den Diffusionskonstanten variieren die Removalquerschnitte stärker. Dieses liegt daran, daß auch im Mittel das Verhältnis von Fluß an der unteren Gruppengrenze zum Gesamtfluß der Gruppe bei dicker werdender Eisenschicht aufgrund des Überganges des Wasserabbremsspektrums zu einem Eisenabbremsspektrum stärker variiert. Während in Gruppe 1, 2 und 5 der Removalquerschnitt mit dicker werdendem Eisen zunimmt, ist in Gruppe 4 und 5 eine Abnahme festzustellen. In Gruppe 3 ist dieses darauf zurückzuführen, daß der Fluß an der unteren Gruppengrenze gegenüber dem Gesamtfluß bei

dicker werdendem Eisen abnimmt, während in Gruppe 4 der Gesamtfluß gegenüber dem Fluß an der unteren Gruppengrenze aufgrund des "Kanals" im Minimum der Streuresonanz zunimmt. In den übrigen Gruppen ist die leichte Zunahme auf die Zunahme der optischen Dicke an der unteren Gruppengrenze zurückzuführen, die dazu führt, daß mehr Neutronen im Eisen moderiert werden statt wieder auszufließen. Dieses Verhalten läßt sich auch der Abb. 13 entnehmen.

c) Die inelastischen Wirkungsquerschnitte

Die inelastischen Wirkungsquerschnitte sind nur in den beiden oberen Gruppen von Null verschieden. Da der Aufbau eines Eisenabbremsspektrums bei zunehmender Eisendicke bewirkt, daß die niederenergetischeren Bereiche höher gewichtet werden.

Da die inelastischen Querschnitte mit der Energie monoton abnehmen, ergibt sich daraus die in Tabelle IV dargestellte leichte Abnahme mit zunehmender Eisenstärke.

d) Die scheinbaren Absorptionsquerschnitte (Bilanzprüfung)

In Tabelle V sind zu den gesamten Removalquerschnitten aus inelastischer Streuung und elastischer Streuung die sich bei der Auswertung ergebenden effektiven Absorptionsquerschnitte in Eisen angegeben. Bei ihrer Ermittlung ist aus Einfachheitsgründen angenommen worden, daß alle inelastisch gestreuten Neutronen, die die zweite Gruppe verlassen, in die dritte Gruppe gestreut werden. Wegen des nahezu konstanten Energieverlustes bei inelastischer Streuung ist der Anteil der in die Bereiche unter 0,03 MeV gestreuten Neutronen jedoch nur klein, insbesondere wenn man bedenkt, daß dieser auf einen sehr breiten Lethargiebereich verteilt wird.

Tabelle IV: Die gemittelten Removalquerschnitte und inelastischen Übergangsquerschnitte in den drei Anordnungen mit 2 cm, 4 cm und 10 cm Eisenstärke sowie für ein 1/E-Spektrum

Gruppe	Anordnung Material	2.10		4.10		10.25		1/E	
		Σr	Σin						
1	H ₂ O	0.1923		0.1924		0.1928		0.2045	
	Fe	2.49-2	7.71-2	2.67-2	7.69-2	3.05-2	7.65-2	6.73-2	7.62-2
	H ₂ O	0.1937		0.1948		0.1970		0.2045	
2	H ₂ O	0.1486		0.1485		0.1496		0.1865	
	Fe	2.48-3	4.95-3	2.50-3	4.89-3	2.75-3	4.63-3	4.22-3	
	H ₂ O	0.1493		0.1507		0.1598		0.1865	
3	H ₂ O	0.3284		0.3284		0.3281		0.3866	
	Fe	1.27-2		1.01-2		6.88-3		5.34-2	
	H ₂ O	0.3252		0.3241		0.3211		0.3866	
4	H ₂ O	0.7596		0.7598		0.7576		0.7751	
	Fe	1.45-2		1.40-2		1.17-2		1.85-2	
	H ₂ O	0.7517		0.7472		0.7378		0.7751	
5	H ₂ O	0.8026		0.8026		0.8029		0.8140	
	Fe	1.46-2		1.48-2		1.66-2		1.50-2	
	H ₂ O	0.8039		0.8048		0.8064		0.8140	

Tabelle V: Die Removalquerschnitte und die effektiven Absorptionsquerschnitte in den drei Anordnungen im Eisen

Anordnung	2.10		4.10		10.25	
Gruppe	Σ_{rem}	Σ_{aeff}	Σ_{rem}	Σ_{aeff}	Σ_{rem}	Σ_{aeff}
1	1.02-1	-3.07-2	1.04-1	-3.51-2	1.07-1	-6.01-2
2	7.43-3	1.58-2	7.39-3	1.34-2	7.38-3	9.94-3
3	1.27-2	9.64-3	1.01-2	9.71-3	6.88-3	1.04-2
4	1.45-2	-3.46-3	1.40-2	-5.21-3	1.17-2	-3.78-3
5	1.46-2	-1.46-5	1.48-2	-8.97-5	1.66-2	-1.71-4

Wie man der Tabelle V entnimmt, ist die Forderung, daß \sum_{aeff} klein gegen \sum_{rem} sein soll, außer in Gruppe 5 nicht erreicht worden. Nun stellt diese Forderung eine sehr harte dar, da \sum_{rem} in Eisen bei breiten Gruppen eine sehr kleine Größe ist. Vergleicht man die effektiven Absorptionsquerschnitte mit den totalen Wirkungsquerschnitten im Eisen, die sich zwischen 0,25 und 0,57 im Mittel über die einzelnen Gruppen bewegen, dann belaufen sich im Maximum die Interpolationsfehler (in Gruppe 2 für Anordnung 2.10) auf 6 %. Dieses Programm ist daher nicht geeignet, allzu dicke Eisenschichten durchzurechnen. Im einzelnen ergeben sich die Fehler aus folgendem: In Gruppe 1 ist es die zu grobe Lethargieeinteilung zusammen mit der sehr starken Vorwärtsstreuung, die dazu führt, daß die Größe $\frac{V}{\sum T}$ (0.578 bei 2.32 MeV) nicht mehr ausreichend klein gegen eins ist. Dies führt zu einer scheinbaren Neutronenerzeugung. In Gruppe zwei sieht man, daß mit zunehmender Eisenstärke der scheinbare Absorptionsquerschnitt mit zunehmender Eisenstärke abnimmt. Hier, wie auch in Gruppe 3, wirkt die Eisenplatte im wesentlichen aufgrund ihrer isotroperen Streuung im Laborsystem. Da die Eisenplatte in diesen Gruppen im Übergangsbereich von optisch dick zu optisch dünn ist, ergibt sich ein gewisses Maximum des Winkelflusses um $\mu = 0$, dessen konvexe Form durch die lineare Interpolation abgeschnitten wird (Abb. 18). Die Neutronenerzeugung in Gruppe 4 war bei der Besprechung des Neutronenspektrums schon behandelt worden. Nur in Gruppe 5 kann die Genauigkeit befriedigen. Hier ist jedoch die Eisenplatte schon überall optisch dick und außerdem der makroskopische Streuquerschnitt etwa gleich dem von Wasser. Da zudem auch im Wasser der Fluß schon sehr isotrop ist, kommt es nicht mehr zu solchen extremen Erscheinungen um $\mu = 0$, so daß keine wesentlichen Fehler mehr auftreten. Im reinen Wasser gibt es solche Singularitäten nicht (vergl. Abschnitt 3), und dort zeigte sich das oben genannte Kriterium für die Genauigkeit erfüllt.

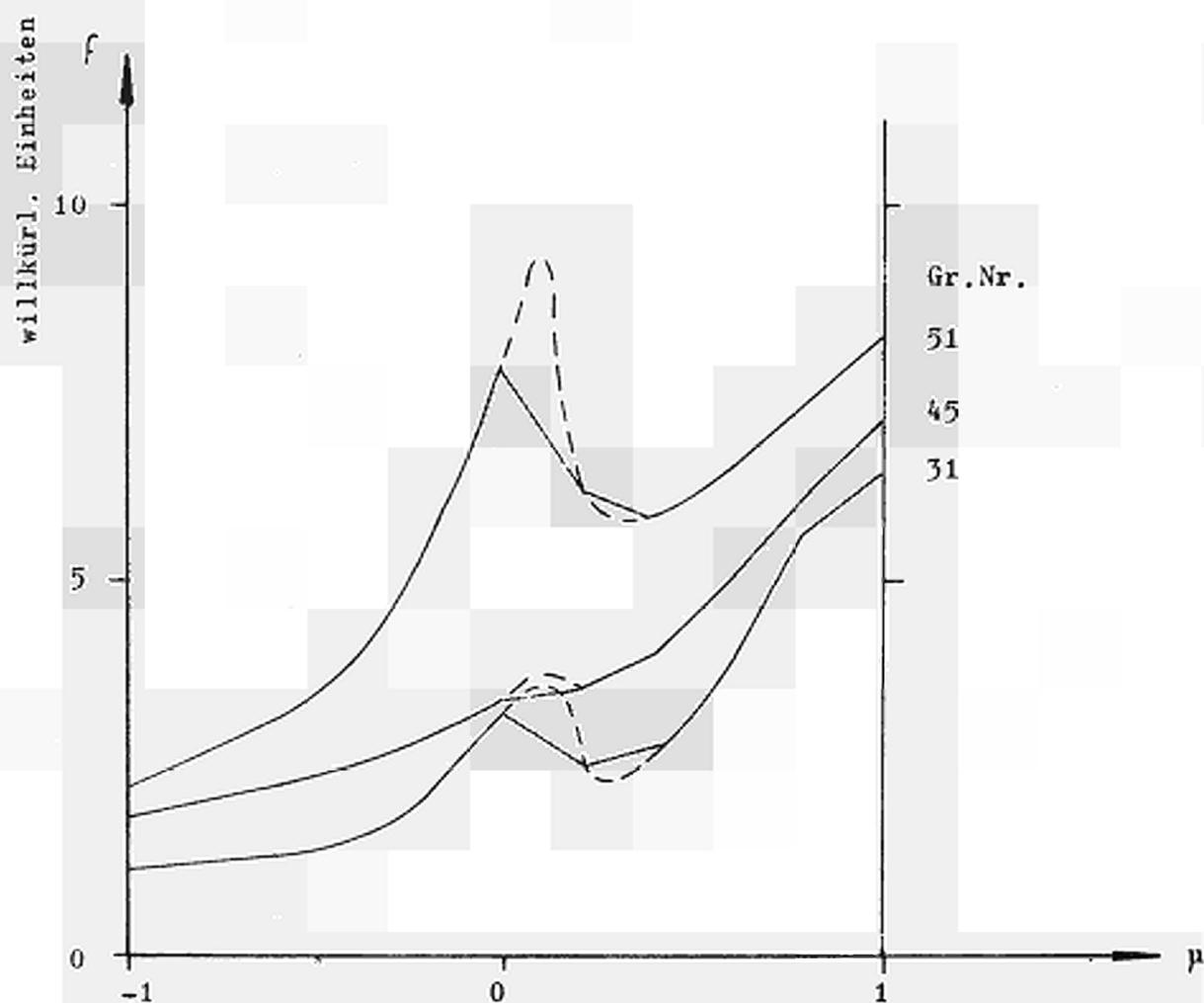


Abb. 18

Winkelflüsse im optisch dünnen Eisen. Die Ziffern bezeichnen die Lethargiegruppennummern wie in Abb. 7. Gestrichelt: der zu vermutende wahre Verlauf, ausgezogen: benutzte Interpolation.

9. Reproduzierung der transporttheoretisch erhaltenen Flüsse mit einer Diffusionsrechnung

Die in Tabelle III und IV angegebenen Gruppenkonstanten für Eisen wurden zusammen mit den asymptotischen Gruppenkonstanten für Wasser dazu benutzt, mittels eines Diffusionsprogramms die transporttheoretisch erhaltenen Flüsse nachzurechnen. Die Ergebnisse sind in den Abb. 15 und 16 gestrichelt eingetragen. Man erkennt, daß bei recht genauer Reproduktion im Wasser namentlich in Gruppe 1 und 2 starke Abweichungen auftreten. In Gruppe 1 ist dies zu einem großen Teil auf die im Neutronentransportprogramm stattgefundene scheinbare Neutronenerzeugung zurückzuführen. Dieser Einfluß erstreckt sich auch noch in die Gruppe 2, nur daß in dieser sehr breiten Gruppe nicht unterscheidbar ist, wieweit nicht auch die andersartigen Randbedingungen noch einen Beitrag liefern. Die Abweichungen in Gruppe 4 sind auf den in dieser Gruppe sehr stark variierenden Wirkungsquerschnitt des Eisens zurückzuführen. Wie ein Vergleich der Abb. 15 mit der Abb. 16 ergibt, werden in den unteren drei Gruppen die gemittelten Gruppenkonstanten mit wachsender Eisenstärke besser, was sich eindeutig auf den geringeren Einfluß der Ränder zurückführen läßt. Eine Rechnung mit der konventionellen Methode des RASH-B-Programms unter Verwendung des Flusses der ersten Gruppe als Stelle des Removalflusses ergibt schon im Wasser in der Gruppe 4 um einen Faktor 3 zu niedrige Ergebnisse, die aus dem Fehlen der Transportkorrektur der Diffusionskonstante herrühren.

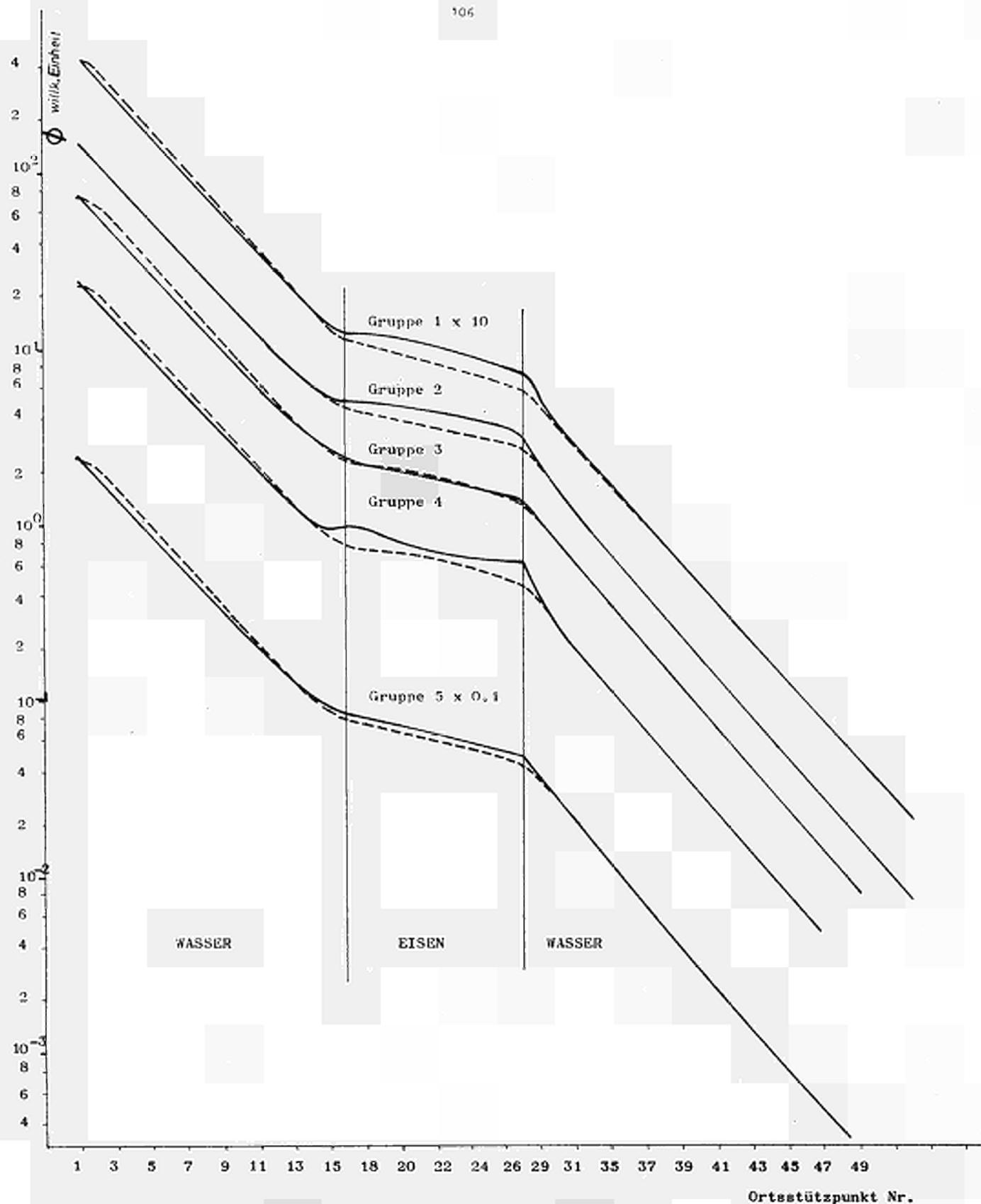


Abb. 15 Die örtlichen Verläufe der Flüsse in der Anordnung 4.10
 Ausgezogen die transporttheoretischen Flüsse nach dem
 BINE-Programm für die Gruppen 1 bis 5. Gestrichelt die
 mittels der gemittelten Gruppenkonstanten erhaltenen
 Flüsse. Ortseinteilung wie Abb. 11.a

Ortstützpunkt Nr.

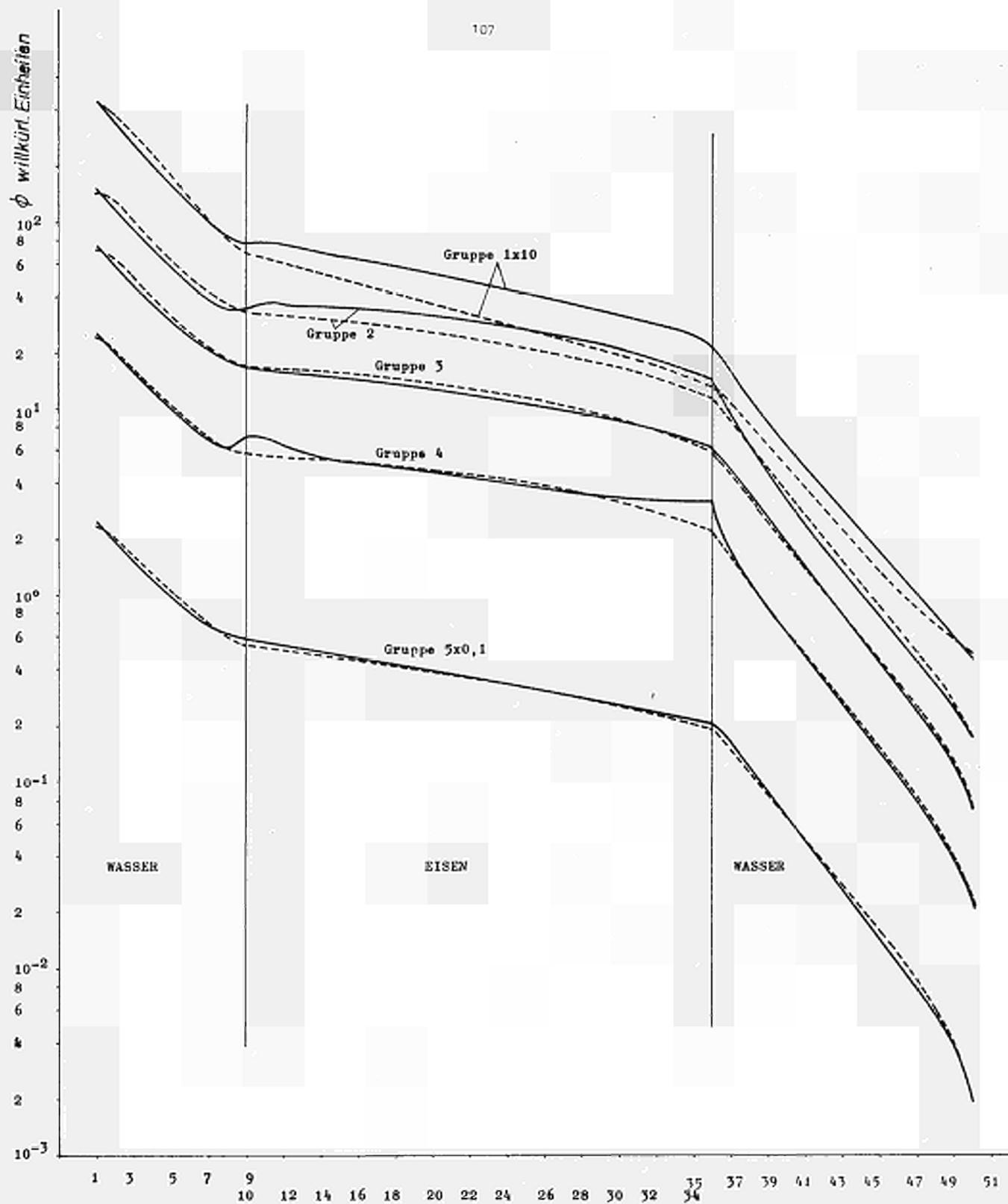


Abb. 16

Die örtlichen Verläufe der Flüsse in der Anordnung 10.25.
 Ausgezogen die transporttheoretischen Flüsse nach dem
 SINE-Programm für die Gruppen 1 bis 5. Gestrichelt
 die mittels der gemittelten Diffusionskonstanten
 erhaltenen Flüsse, Ortseinteilung wie Abb. 12a.

— Transportrechnung
 - - - - Diffusionsrechnung

Ortsstützpunkt Nr.

10. Zusammenfassung

Eine transporttheoretische Berechnung des Neutronenflusses durch eine in Wasser eingebettete Eisenplatte verschiedener Stärken erlaubte es, durch Auswertung der erhaltenen Neutronenspektren für Ströme und Flüsse die in den gebräuchlichen Diffusionsprogrammen benutzten Gruppenkonstanten als Funktion des Ortes und für mehrere Energiegruppen zu ermitteln. Während die Removalquerschnitte im Sinne des Mehrgruppenkonzeptes sich im wesentlichen als Materialkonstanten, d.h. nur als spektrumsabhängig herausstellten, zeigten die Diffusionskonstanten je nach Herleitung starke Unterschiede. Schon die nach der P1-Approximation ermittelten Diffusionskonstanten sind in den unteren Energiegruppen keine Materialkonstanten mehr, sondern im Eisen stark ortsabhängig. Die aus dem Vergleich von Flußgradienten und Strom ermittelten Diffusionskonstanten zeigen an den Rändern der Eisenschicht Abweichungen, die sich aus der Vernachlässigung der höheren Kugelfunktionsentwicklungsglieder in der P1-Approximation ergeben. In den Energiegruppen, in denen die P1-Approximation nicht erlaubt ist, ergibt sich zudem, daß die P1-Diffusionskonstanten zu niedrig liegen. Dieses bedeutet, daß eine Rechnung mit den letzteren auf zu niedrige Neutronenflüsse führt. Dieses Verhalten läßt sich schon an einer Eingruppentransportrechnung zeigen. Nach Mittelung über einzelne Gebiete variieren die Removalquerschnitte als Funktion der Eisendicke allerdings stärker als die gleichermaßen gemittelten Diffusionskonstanten. Eine Nachrechnung der transporttheoretisch erhaltenen Flüsse mit den so gefundenen Gruppenkonstanten ergibt in den unteren Gruppen eine gute Übereinstimmung, in den oberen Gruppen jedoch stärkere Abweichungen im Eisen. Diese sind bereits auf Approximationsfehler im Transportprogramm, andererseits aber auch auf die Verwendung der gemittelten Gruppenkonstanten zurückzuführen.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Assoziierungsvertrages
Nr. 002-61-1 PNID der GKSS mit EURATOM durchgeführt.

Herrn Professor Dr. E. Bagge und meinen Kollegen des In-
stituts für Reaktorphysik in Geesthacht-Tesperhude danke
ich für viele wertvolle Diskussionen und Hinweise.

Anhang I : Die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß unter einer Energieschwelle

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Stoß mit dem Stoßwinkel $\hat{\mu}$ im Schwerpunktsystem stattfindet, ist [9] durch die Entwicklung nach Legendrepolyomen vorgegeben

$$g(\hat{\mu}) = \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l(E') P_l(\hat{\mu}) \quad (\text{I } 1)$$

wobei die Normierung so gehalten ist, daß $f_0(E') = 1$ ist. Dabei ist nach (2.41 c) und (2.41 e)

$$\hat{\mu} = \frac{1}{A} (\tilde{\mu}^2 - 1 + \tilde{\mu} \sqrt{A^2 - 1 + \tilde{\mu}^2}) \quad (\text{I } 2)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E'}{E}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right] \quad (\text{I } 3)$$

Durch Übergang zum Stoßwinkel kann die Integration der Stoßwahrscheinlichkeit durchgeführt werden. Es ist

$$\int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2}^{E'} W(E', E) dE = \int_{-1}^{+1} g(\hat{\mu}) \frac{dE}{d\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{\mu}}{d\hat{\mu}} d\hat{\mu} \quad (\text{I } 4)$$

Dabei ist $\frac{dE}{d\tilde{\mu}} = \frac{dE}{d\hat{\mu}}$ und nach (2.30)

$$\frac{dE}{d\tilde{\mu}} \bigg/ \frac{d\hat{\mu}}{d\tilde{\mu}} = \frac{2E'A}{(A+1)^2} = \frac{\alpha}{2} E' \quad (\text{I } 5)$$

Damit wird

$$\int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2}^{E'} W(E', E) dE = \int_{-1}^{+1} g(\hat{\mu}) \frac{\alpha}{2} E' d\hat{\mu} = \alpha E' \quad (\text{I } 6)$$

da

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx = \begin{cases} 2 & \text{für } l=0 \\ 0 & \text{für } l \neq 0 \end{cases} \quad \text{und } f_0(E') = 1$$

Das teilweise Integral über die Stoßwahrscheinlichkeit wird analog zu (I 4)

$$\frac{1}{\alpha E'} \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{E_1} W(E', E) dE = \frac{1}{\alpha E'} \int_{-1}^{\hat{m}_1} g(\hat{m}) \frac{dE}{d\hat{m}} \frac{d\hat{m}}{d\hat{m}} d\hat{m} = \frac{1}{\alpha E'} \int_{-1}^{\hat{m}_1} g(\hat{m}) \frac{dE'}{d\hat{m}} d\hat{m} \quad (\text{I } 7)$$

wobei \hat{m}_1 sich aus (I 2) und (I 3) durch Einsetzen von E_1 ergibt. Das Integral

$$\int_{-1}^{\hat{m}_1} g(\hat{m}) d\hat{m} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\hat{m}_1} \sum_{\ell=0}^N (2\ell+1) f_{\ell}(E') P_{\ell}(\hat{m}) d\hat{m}$$

wird durch Benutzung der Formel

$$(2\ell+1) P_{\ell}(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)$$

bzw.

$$(2\ell+1) \int P_{\ell}(x) dx = P_{\ell+1}(x) - P_{\ell-1}(x)$$

zu

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{\ell=0}^N f_{\ell}(E') (P_{\ell+1}(\hat{m}) - P_{\ell-1}(\hat{m})) \right]_{\hat{m}=-1}^{\hat{m}=\hat{m}_1}$$

und durch Umordnen erhält man

$$\frac{1}{\alpha E'} \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{E_1} W(E', E) dE = \sum_{\ell=1}^{N-1} \frac{(f_{\ell-1}(E') - f_{\ell+1}(E'))}{2} (P_{\ell}(\hat{m}_1) - (-1)^{\ell}) \quad (\text{I } 8)$$

mit

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{A} \left(\hat{m}_1^2 - 1 + \tilde{m}_1 \sqrt{A^2 - 1 + \hat{m}_1^2} \right)$$

und

$$\tilde{m}_1 = \frac{1}{2} \left((A+1) \sqrt{\frac{E_1}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E_1}} \right)$$

Anhang II: Das P1-Glied des Stoßterms

Der Stoßterm der Gleichung (5.23) lautet nach Einsetzen von

$\Sigma_2(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu)$ nach 2.33

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} \mu \left\{ \Sigma_2(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) f(x', \mu', E') \right\} dE' d\mu' d\mu = \\
 & = \int_{-1}^{+1} \mu \int_{-1}^{+1} \int_{E'}^{E(\frac{A+1}{A-1})^2} \frac{g(\hat{\mu})}{\sqrt{(1-\hat{\mu}^2)(1-\mu^2) - (\mu' - \mu\hat{\mu})^2}} \frac{\Sigma_2(E')}{\pi \alpha E'} f(x', \mu', E') d\mu' dE' d\mu \quad (\text{II 1})
 \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge von u' und u erhält man

$$\begin{aligned}
 & \int_{E'}^{E(\frac{A+1}{A-1})^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(1-\hat{\mu}^2)(1-\mu^2) - (\mu' - \mu\hat{\mu})^2}} \frac{\Sigma_2(E')}{\pi \alpha E'} g(\hat{\mu}) f(x', \mu', E') d\mu' d\mu dE' \\
 & = \int_{E'}^{E(\frac{A+1}{A-1})^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma_2(E')}{\alpha E'} g(\hat{\mu}) f(x', \mu', E') d\mu' dE' \quad (\text{II 2})
 \end{aligned}$$

Mit $\int_{-1}^{+1} \mu' f(x', \mu', E') d\mu' = \gamma(x', E')$ und der Definition

$$\Sigma_2(E' \rightarrow E) = \frac{\Sigma_2(E')}{\alpha E'} g(\hat{\mu})$$

wird also

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^{+1} \mu \left\{ \Sigma_2(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) f(E', \mu', x') \right\} dE' d\mu' d\mu = \quad (\text{II 3}) \\
 & = \int_{E'}^{E(\frac{A+1}{A-1})^2} \hat{\mu}(E', E) \Sigma_2(E' \rightarrow E) \gamma(E', x') dE'
 \end{aligned}$$

Anhang III : Der mittlere Streuwinkel im Laborsystem

Der mittlere Streuwinkel im Laborsystem ergibt sich durch Übergang zum Stoßwinkel im Schwerpunktsystem wie in I 4, 5, 6 zu

$$\bar{\mu}(E') = \frac{1}{\alpha E'} \int_{E' \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2}^{E'} \bar{\mu} W(E', E) dE = \frac{1}{\alpha E'} \int_{-1}^{+1} \bar{\mu}(\hat{\mu}) g(\hat{\mu}) \frac{\alpha}{2} E' d\hat{\mu} \quad (\text{III } 1)$$

wobei der letzte Ausdruck direkt zeigt, daß es sich um den mittleren Streuwinkel im Laborsystem handelt. Aus (2.27) mit $Q = 0$ ergibt sich

$$\bar{\mu} = \frac{A \hat{\mu} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\hat{\mu} + 1}} \quad (\text{III } 2)$$

und daher

$$\bar{\mu}(E') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} g(\hat{\mu}) \frac{A\hat{\mu} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\hat{\mu} + 1}} d\hat{\mu} \quad (\text{III } 3)$$

Da $g(\hat{\mu})$ als Legendre-Polynomentwicklung bekannt ist, empfiehlt es sich, $\bar{\mu}$ als Funktion von $\hat{\mu}$ ebenfalls nach Legendre-Polynomen zu entwickeln. Mit Hilfe des Theorems

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} P_{\nu}(x) \quad (\text{III } 4)$$

und der Relation zwischen den Legendre-Polynomen

$$(2\ell+1) x P_{\ell}(x) = (\ell+1) P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x)$$

wird

$$\frac{A\hat{\mu} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\hat{\mu} + 1}} = \frac{1}{A} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-A)^{\nu} P_{\nu}(\hat{\mu}) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-A)^{\nu} \left(\frac{\nu+1}{2\nu+1} P_{\nu+1}(\hat{\mu}) + \frac{\nu}{2\nu+1} P_{\nu}(\hat{\mu}) \right) \quad (\text{III } 5)$$

Mit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(x) P_{2m}(x) dx = \delta_{\ell 2m} \quad (\text{III } 6)$$

wird

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E') &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{A} (-A)^{-\ell} + (-A) \frac{-\ell}{2\ell+1} + (-A)^{-\ell} \frac{\ell+1}{2\ell+3} \right) f_{\ell}(E') = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(E') \frac{\ell(2\ell+3)A^2 - (2\ell-1)(\ell+2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)} \left(\frac{-1}{A} \right)^{\ell+1} \end{aligned} \quad (\text{III } 7)$$

Für $l = 0$ und $l = 1$ erhält man das bekannte Ergebnis

$$\bar{\mu}(E') = \frac{2}{3A} + f_1(E') \left(1 - \frac{3}{5A^2} \right) = \frac{2}{3A} + \bar{\mu}' \left(1 - \frac{3}{5A^2} \right) \quad (\text{III } 8)$$

mit $\bar{\mu}' = f_1(E')$ = mittlerer Stoßwinkel im Schwerpunktsystem.

Literaturverzeichnis:

- 1 Heller, H.B., and J. Keller, On the Numerical Integration of the Neutron Transport Equation, NYO 6481, (1955)
- 2 Certaine, J., and F.B. Chafets, Status Report Project NIOBE, NDA 43-3, (1956)
- 3 Penkuhn, H., A Numerical Solution of the Gamma Transport Equation Applied to Concrete Slabs, EUR 2488.e, (1965)
- 4 Certaine, J., A Solution of the Neutron Transport Equation, NYO 3081, (1954)
- 5 Hurwitz, H., Jr., and P.F. Zweifel, J., Appl. Phys. Vol. 6, (1955) 923
- 6 Weinberg, A.M., and E.P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, (1958)
- 7 Avery, A.F., D.E. Bendall, J. Butler, and K.T. Spinney, Methods of Calculation for Use in the Design of Shields for Power Reactors, AERE-R 3216, (1960)
- 8 Joanou, G.D., and J.S. Dudek, GAM-II, A B-3-Code for the Calculation of Fast Neutron Spectra and Associated Multi-group Constants, GA-4265, (1963)
- 9 Troubetzkoy, E.S., M. Kalos, and H. Lustig, Fast Neutron Cross Sections of Iron, Silicon, Aluminum, and Oxygen, NDA 2111-3, Vol. C, (1959)
- 10 Hughes, D.J., Neutron Cross Sections, BNL 325, 2nd Edition, (1958)



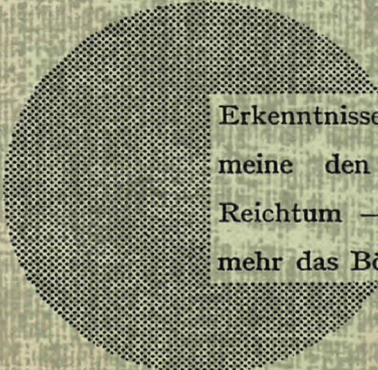
AN UNSERE LESER

Alle Euratom-Berichte werden nach Erscheinen in der von der Zentralstelle für Information und Dokumentation (CID) herausgegebenen Monatszeitschrift **EURATOM INFORMATION** angezeigt. Abonnements (1 Jahr : DM 60) und Probehefte sind erhältlich bei :

Handelsblatt GmbH
"Euratom Information"
Postfach 1102
D-4 Düsseldorf (Deutschland)

oder

Office central de vente des publications
des Communautés européennes
2, Place de Metz
Luxembourg



Erkenntnisse verbreiten ist soviel wie Wohlstand verbreiten — ich meine den allgemeinen Wohlstand, nicht den individuellen Reichtum — denn mit dem Wohlstand verschwindet mehr und mehr das Böse, das uns aus dunkler Zeit vererbt ist.

Alfred Nobel

VERTRIEBSSTELLEN

Alle Euratom-Berichte sind bei folgenden Stellen zu den auf der ersten Rückseite des Umschlags angegebenen Preisen erhältlich (bei schriftlicher Bestellung bitte die EUR-Nummer und den Titel, die beide auf der ersten Umschlagsseite jedes Bericht stehen, deutlich angeben).

OFFICE CENTRAL DE VENTE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES

2, place de Metz, Luxembourg (Compte chèque postal N° 191-90)

BELGIQUE — BELGIË

MONITEUR BELGE
40-42, rue de Louvain - Bruxelles
BELGISCH STAATSBAD
Leuvenseweg 40-42 - Brussel

LUXEMBOURG

OFFICE CENTRAL DE VENTE
DES PUBLICATIONS DES
COMMUNAUTES EUROPEENNES
9, rue Goethe - Luxembourg

DEUTSCHLAND

BUNDESANZEIGER
Postfach - Köln 1

NEDERLAND

STAATSDRUKKERIJ
Christoffel Plantijnstraat - Den Haag

FRANCE

SERVICE DE VENTE EN FRANCE
DES PUBLICATIONS DES
COMMUNAUTES EUROPEENNES
26, rue Desaix - Paris 15^e

ITALIA

LIBRERIA DELLO STATO
Piazza G. Verdi, 10 - Roma

UNITED KINGDOM

H. M. STATIONERY OFFICE
P. O. Box 569 - London S.E.1

EURATOM — G.I.D.
51-53, rue Belliard
Bruxelles (Belgique)

CDNA03472DEC