EUR 4381 d

ASSOZIATION

Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM
Commissariat à l'Energie Atomique - CEA

DER WÄRMEÜBERGANG IN GLATTEN ROHREN, ZWISCHEN PARALLELEN PLATTEN, LÄNGS DER EBENEN PLATTE, IN RINGSPALTEN UND LÄNGS ROHRBÜNDELN BEI EXPONENTIELLER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG IN ERZWUNGENER LAMINARER ODER TURBULENTER STRÖMUNG

von

H. GRÄBER

1969

Bericht abgefasst beim
Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay - Frankreich

Assoziation Nr. 006-61-1 RAAF

HINWEIS

Dieser Bericht wird in den auf der vierten Umschlagseite genannten Vertriebsstellen

zum Preise von DM 30,–	FF 41,60	FB 375,–	Lit. 4 680	Fl. 27,–

verkauft.

Es wird gebeten, bei Bestellungen die EUR-Nummer und den Titel anzugeben, die auf dem Umschlag jedes Berichts aufgeführt sind.

Gedruckt von Smeets
Brüssel, Oktober 1969

Das vorliegende Dokument wurde an Hand des besten Abdruckes vervielfältigt, der zur Verfügung stand.

EUR 4381 d

ASSOZIATION
Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM
Commissariat à l'Energie Atomique - CEA

DER WÄRMEÜBERGANG IN GLATTEN ROHREN, ZWISCHEN PARALLELEN PLATTEN, LÄNGS DER EBENEN PLATTE, IN RINGSPALTEN UND LÄNGS ROHRBÜNDELN BEI EXPONENTIELLER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG IN ERZWUNGENER LAMINARER ODER TURBULENTER STRÖMUNG

von

H. GRÄBER

1969

Bericht abgefasst beim
Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay - Frankreich

Assoziation Nr. 006-61-1 RAAF

ZUSAMMENFASSUNG

Durch Einführen eines zusätzlichen Parameters F_o werden die bisher bekannten Verfahren zur Berechnung des Wärmeübergangs auf die exponentielle Wärmeflussverteilung $q_w = \exp(mx)$ erweitert, die bei laminarer und turbulenter Strömung mit linearem Druckabfall einen vom Ort unabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten ergibt. Bei der laminaren Strömung längs einer ebenen Platte ergibt die einem Potenzgesetz $q_w = x^m$ gehorchende Verteilung der Wärmestromdichte eine mit der Temperaturgrenzschichtdicke gebildete ortsunabhängige Nusselt-Zahl. Ein Näherungsverfahren gestattet, diese Grenzschichtdicke und damit die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante definierte Nusselt-Zahl zu berechnen. Für den Ringspalt werden Gleichungen zur expliziten Berechnung des Temperaturfeldes und der Nusselt-Zahl bei laminarer Strömung und konstantem Wärmefluss für ein- oder beidseitigen Wärmeaustausch angegeben. Für den Fall turbulenter Strömung im Ringspalt und längs Rohrbündeln ermöglicht eine Anpassung der von H. Reichardt für das Rohr ermittelten Verteilung der Impulsaustauschgrösse die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes und des Reibungskoeffizienten und damit die Lösung der Wärmeübergangsgleichungen. Die Ergebnisse der numerischen Auswertung werden für einen breiten Bereich der verschiedenen Einflussgrössen in Tabellen und Diagrammen zusammengestellt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen : Geschwindigkeits-, Temperatur- und wandnormaler Wärmestromdichteverlauf, Nusselt-Zahl und Mischungstemperatur. Zur Abschätzung der thermischen Einlauflänge wird ein einfaches Berechnungsverfahren angegeben.

SCHLAGWORTE

HEAT TRANSFER
TUBES
PLATES
LAMINAR FLOW
LIQUID FLOW
TURBULENCE
NUSSELT NUMBER
PRANDTL NUMBER
REYNOLDS NUMBER

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNIS DER TABELLEN

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

Seite

Seite

Seite

Seite

BEZEICHNUNGEN

a	Temperaturleitfähigkeit, $\lambda/(\rho c_p)$
a,b,c,d	Konstanten
c_p	Spezifische Wärme bei konstantem Druck
d	Durchmesser
d_h	Hydraulischer Durchmesser, 4S/U
$f(\eta)$	Blasius-Funktion, Glg.(149)
f_1	Proportionalitätsfaktor, Glg.(171c)
F	Oberfläche
F_o	Parameter der Wärmestromdichteverteilung
F_m	Hilfsgrösse zur Berechnung von F_o
$\dot{G}$	Massenstrom
h	Wandabstand bei parallelen Platten
k	Wärmedurchgangszahl
l	Länge der wärmetauschenden Wand stromab des hydrodynamischen und thermischen Einlaufs
m	Exponent der Wärmeflußverteilung
m_1, m_2	Konstanten, Glg.(87)
M_i	Verhältnis der Wasserwerte $(\dot{G}c_p)_i$ bei Wärmeaustauschern
n	Exponent der Geschwindigkeitsverteilung, Glg.(73a)
n_i	Konstanten
Nu	Nußelt-Zahl, bezogen auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_m)$, $\alpha d_h/\lambda$
Nu_o	dto., bezogen auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_o)$, $\alpha_o d_h/\lambda$, bzw. $\alpha\delta_t/\lambda$ bei der ebenen Platte
Nu_q	Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmefluß
p	Abstand der Rohrmitten beim Rohrbündel
Pe	Péclet-Zahl, $RePr=u_m d_h/a$
Pr	Prandtl-Zahl, $\mu c_p/\lambda$
Pr^+	Verallgemeinerte Prandtl-Zahl, $Pr\,\varepsilon_h/\varepsilon_m$
q	Wärmestromdichte
$(q_i)_j$	Wandnormale Wärmestromdichte beim Ringspalt im Abschnitt j $(r_i \gtrless r \gtrless r_c)$ bei Wärmeübergang am Zylinder i
q_{wi}	Wärmestromdichte an der Wand i
Q	Wärmefluß
r	Radius, bei ebenen Begrenzungswänden Abstand von der Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$
r_c	r an der Stelle du/dy=0
r_w	r an der wärmeaustauschenden Wand, negativ für die Fälle $r_c > \lvert r_w \rvert$
Re	Reynolds-Zahl, $u_m d_h/\nu$
Re_T	Äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl bei nichtkreisförmigem Strömungsquerschnitt
Re_x	Reynolds-Zahl bei der Plattenströmung, bezogen auf die Lauflänge x, $u_\infty x/\nu$
s	Wandstärke
S	Strömungsquerschnitt
St	Stanton-Zahl, $\alpha/(\rho u_m c_p)=Nu/(RePr)$
u	Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung
u_c	Maximale Strömungsgeschwindigkeit
u_m	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit
u_z	Zusatzgeschwindigkeit gegenüber der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung
u^+	Schubspannungsgeschwindigkeit, $\sqrt{\tau_w/\rho}$
U	Umfang (benetzt)

U^+	Verhältnis aus dem Umfang U der benetzten Wand und U_w der wärmeaustauschenden Wand, U/U_w (s. Abb.1)
v	Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung
W	Reibungswiderstand
x	Koordinate in Strömungsrichtung
x_b	Bezugslänge, Glg. (118)
x_e, x_f	Thermische Einlauflänge, Abb.4c
y	Wandabstand
y^+	Dimensionslose wandnormale Koordinate, $r/\|r_w\|$
z^+	Dimensionsloser "Mitten"-Abstand von der Stelle du/dy=0

Griechische Symbole

α	Wärmeübergangszahl, $q_w/(\vartheta_w-\vartheta_m)$
α_0	dto., bezogen auf die maximale Temperaturdifferenz, $q_w/(\vartheta_w-\vartheta_0)$
δ	Dicke der Strömungsgrenzschicht
δ_t	Dicke der Temperaturgrenzschicht
Δp	Druckverlust
ε_h	Austauschgröße für Wärme, Glg. (6b)
ε_m	dto. für Impuls, Glg. (5b)
ζ	Reibungskoeffizient, Glg. (174)
η	-Dimensionsloser Wandabstand bei turbulenter Strömung, u^+y/ν -Dimensionsloser Wandabstand bei der laminaren Plattenströmung, $\sqrt{u_\infty/(x\nu)}\ y$
η_b	η an der Stelle $q_t=q_m$
η_c	η an der Stelle $r=r_c$
η_m, η_n	Konstanten, Glg. (1,62,192)
η_s	η am Schnittpunkt des ε_m-Wand- und Mittengesetzes
$\eta_\delta, \eta_{\delta_t}$	η an der Stelle $y=\delta$ bzw. $y=\delta_t$
ϑ	Temperatur
ϑ^+	Schubspannungstemperatur, $q_w/(\rho c_p u^+)$
ϑ_m	Mischungstemperatur
ϑ_w	Wandtemperatur
ϑ_0	Temperatur an der Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$
Θ	Dimensionslose Temperatur, $(\vartheta-\vartheta_w)/(\vartheta_0-\vartheta_w)$
Θ_m	Dimensionslose Mischungstemperatur, $(\vartheta_m-\vartheta_w)/(\vartheta_0-\vartheta_w)$
Θ_{xw}	Dimensionslose Wandtemperatur, $(\vartheta_w-\vartheta_{wa})/(\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa})$
Θ_x	Dimensionslose Temperatur, $(\vartheta-\vartheta_{wa})/(\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa})$
Θ_{xo}	Dimensionslose Temperatur an der Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$, $(\vartheta_o-\vartheta_{wa})/(\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa})$
$\varkappa$	Konstante, Glg. (62)
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	Dynamische Viskosität
ν	Kinematische Viskosität, μ/ρ
ρ	Spezifische Masse
τ	Schubspannung
τ_w	Wandschubspannung
φ	Dimensionslose Geschwindigkeit in x-Richtung
ψ	Kennzahl der Wasserwerte bei Wärmeaustauschern, Glg. (44)

Indices

a	Stelle $x=x_a=0$
b	Stelle $x=x_b\neq 0$
A	Ringspalt
B	Rohrbündel
c	Stelle du/dy=0

e,i	Äußerer bzw. innerer Radius bei Rohren
m	-Mittelwert
	-Molekularer Anteil
t	Turbulenter Anteil
P	Ebene Platte
PP	Parallele Platten
PS	Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch
PAS	dto., asymmetrischer Wärmeaustausch
T	Rohr
w	Wand
o	Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$
1,2	-Strömungsquerschnitt 1 bzw. 2 bei Wärmeaustauschern
	-Wärmeaustausch an der Wand 1 ($r=r_1$) bzw. 2 ($r=r_2$) beim Ringspalt
	-Innerer ($r_1<r<r_c$) bzw. äußerer ($r_c>r>r_2$) Ringspaltabschnitt
12	Gesamter Ringspaltquerschnitt
∞	Ungestörte Geschwindigkeit bzw. Temperatur bei der ebenen Platte

DER WÄRMEÜBERGANG IN GLATTEN ROHREN, ZWISCHEN PARALLELEN PLATTEN, LÄNGS DER EBENEN PLATTE, IN RINGSPALTEN UND LÄNGS ROHRBÜNDELN BEI EXPONENTIELLER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG IN ERZWUNGENER LAMINARER ODER TURBULENTER STRÖMUNG*)

1. EINLEITUNG

Die Untersuchungen in den bisher erschienenen Veröffentlichungen über den Einfluß der Wärmeflußverteilung auf den Wärmeaustauschkoeffizienten gehen entweder von speziellen Erfordernissen, wie etwa der in Kernreaktoren vorhandenen näherungsweise sinusförmigen Flußverteilung oder von beliebig vorgegebenem Verlauf der Temperatur bzw. Wärmestromdichte aus /1,2,3,4/. In beiden Fällen muß dabei zur Berechnung des Wärmeaustausches auf die Verfahren der schrittweisen Lösung und Superposition zurückgegriffen werden. Daneben gibt es jedoch zwei wichtige Gruppen von thermischen Randbedingungen, die eine geschlossene Lösung zulassen: die in Wärmeaustauschern vorliegende exponentielle Wärmestromdichteverteilung sowie die einem Potenzgesetz gehorchende Wärmeflußverteilung der laminar angeströmten ebenen Platte. Auf den erstgenannten Fall haben bereits W.B.Hall und P.H.Price /1/ hingewiesen, für den Fall der laminaren Plattenströmung wurden von E.M.Sparrow und S.H.Lin /4/ exakte Lösungen angegeben.

Mit Hilfe einer Ähnlichkeitsbetrachtung wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, daß nur diese beiden Gruppen von Randbedingungen die Forderung einer vom Ort in Strömungsrichtung unabhängigen Wärmeübergangszahl erfüllen. Für die wichtigsten bei Parallelstrom vorkommenden Strömungsquerschnitte: Kreisrohr, Parallele Platten als Grenzfall des Rechteckkanals, Ringspalt und Rohrbündel werden der Wärmeaustausch bei laminarer und turbulenter Strömung berechnet. Bei der ebenen Platte wird nur die laminare Strömungsform behandelt.

Für die Fälle turbulenter Kanalströmung wird das Analogieverfahren des Impuls- und Wärmeaustausches angewandt, wobei das Verhältnis der Austauschgrößen für Wärme ε_h und Impuls ε_m als über den Querschnitt konstant, jedoch nicht notwendigerweise gleich eins gesetzt wird. Diese Vereinfachung, zusammen mit der insbesondere bei nichtkreisförmigen Querschnitten noch mit Unsicherheit behafteten Kenntnis über die Impulsaustauschgröße ε_m, beeinträchtigt die Genauigkeit der Absolutwerte der zu berechnenden Größen, dagegen wird ihr Einfluß beim Vergleich verschiedener Strömungsquerschnitte und Wärmeflußverteilungen -das eigentliche Ziel der vorliegenden Arbeit- auf ein befriedigendes Maß zurückgehen.

Für den Verlauf der Impulsaustauschgröße und der Geschwindigkeit in Rohren und zwischen parallelen Platten werden die von H.Reichardt /6,7/ angegebenen Formeln übernommen, die auf Grund sorgfältiger experimenteller Untersuchungen und theoretischer Betrachtungen, besonders in großer Wandnähe, aufgestellt wurden. Diese Formeln werden für den Ringspalt und das Rohrbündel erweitert. Im Gegensatz zu Rotfus, Walker, Whan /8/ und R.V.Bailey /9/ wird dabei von einem Ansatz über die Impulsaustauschgröße ausgegangen. Dieses Verfahren gestattet, den Radius verschwindender Schubspannung in Abhängigkeit vom Radienverhältnis und von der Reynolds-Zahl zu berechnen, während z.B. in der erstgenannten Arbeit dieser Radius demjenigen bei laminarer Strömung gleichgesetzt wurde, was experimentellen Ergebnissen widerspricht /25/. Nach Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilungen lassen sich die Widerstandskoeffizienten für den Ringspalt und für das Rohrbündel berechnen.

---

*) Manuskript erhalten am 10. März 1969.

Beim Rohrbündel wird die bereits von Lyon /10/ eingeführte Vereinfachung angewandt, die das Hexagon verschwindender Schubspannung durch einen Kreis gleichen Flächeninhalts ersetzt. Dadurch erreicht man, daß die Strömung und der Wärmeübergang für das Rohrbündel aus den für die innere Hälfte eines (sog. zugeordneten) Ringspalts ermittelten Beziehungen berechnet werden können.

Für die laminare Plattengrenzschicht wird durch Integration der hydraulischen und thermischen Grenzschichtgleichung, sowie unabhängig davon durch Anwendung des Impuls- bzw. Energiesatzes, die Schubspannung und Wärmestromdichte in Abhängigkeit vom Wandabstand berechnet.

2. HERLEITUNG ALLGEMEINER GLEICHUNGEN++

2.1. VEREINFACHUNGEN UND ANNAHMEN

Die Berechnungen werden durchgeführt unter Vernachlässigung folgender eventuell auftretender Einflüsse:

- -Dissipation
- -Kompressibilität
- -Strahlung
- -Wärmeleitung in Strömungsrichtung
- -Temperaturabhängigkeit physikalischer Stoffwerte
- -Überlagerung freier Konvektion
- -Abhängigkeit des Verhältnisses der Austauschgrößen ε_h und ε_m vom Wandabstand
- -Exzentrizität beim Ringspalt und Rohrbündel
- -Ungleichförmigkeit der Wärmestromdichteverteilung über den Umfang
- -Hydraulischer und thermischer Einlauf

Für die Verteilung der Impulsaustauschgröße ε_m werden folgende Annahmen getroffen:

-Das Wandgesetz in der Form /6/:

$$\varepsilon_m/\nu = \varkappa\eta_m\left[\eta/\eta_m - \mathrm{tgh}(\eta/\eta_m) - (1/3)\,\mathrm{tgh}^3(\eta/\eta_m)\right] \tag{1}$$

mit $\eta_m = 7{,}15$ und $\varkappa = 0{,}4$ gilt für alle betrachteten Strömungsquerschnitte im wandnahen Bereich

-Das Mittengesetz in der Form /7/:

$$\varepsilon_m/(\nu\eta_c) = (\varkappa/3)(0{,}5+z^{+2})(1-z^{+2}) \tag{2}$$

gilt bei Rohren, parallelen Platten und im Abschnitt $r_c < r < r_2$ bei Ringspalten bis zum Schnittpunkt mit dem Wandgesetz Glg. (1), dagegen wird es im Abschnitt $r_c > r > r_1$ bei Ringspalten und Rohrbündeln zur Anpassung an der Stelle $r = r_c$ mit einem Faktor multipliziert (s. Abb. 12 und Abschnitt 3.4.2c).

++ Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Gleichungen gelten, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nicht für halbunendliche Strömungen. Der Fall der längs angeströmten ebenen Platte wird in Abschnitt 3.4 behandelt.

2.2. FORMELN FÜR DEN WÄRMEÜBERGANG

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen haben die von H.Reichardt für das Rohr und für die parallelen Platten bei der thermischen Randbedingung ϑ_w=konst. gegebene Darstellung /6/ zur Grundlage.

2.2.1. DIE TEMPERATURVERTEILUNG

Trennt man bei der Übertragung von Impuls und Wärme die durch Molekularbewegung einerseits und durch turbulenten Austausch andererseits betroffenen Anteile, so erhält man:

$$\tau=\tau_m+\tau_t=\tau_m(1+\tau_t/\tau_m) \qquad (3)$$

$$q=q_m+q_t=q_m(1+q_t/q_m) \qquad (4)$$

Dabei ist:

$$\tau_m=\mu\frac{du}{dy} \qquad (5a)$$

$$\tau_t=\rho\varepsilon_m\frac{du}{dy} \qquad (5b)$$

$$\tau_w=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_w \qquad (5c)$$

$$q_m=-\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial y} \qquad (6a)$$

$$q_t=-\lambda_t\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=-\rho c_p\varepsilon_h\frac{\partial\vartheta}{\partial y} \qquad (6b)$$

$$q_w=-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_w \qquad (6c)$$

Aus den Gleichungen (6a) und (6b) ergibt sich:

$$\frac{q_t}{q_m}=\frac{\rho c_p\varepsilon_h}{\lambda}=\frac{\mu c_p}{\lambda}\cdot\frac{\rho}{\mu}\cdot\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m}\varepsilon_m=Pr\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m}\,\frac{\varepsilon_m}{\nu} \qquad (7)$$

Mit der von H.Reichardt eingeführten "verallgemeinerten" Prandtl-Zahl:

$$Pr^+=Pr\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m} \qquad (8)$$

geht Glg. (4) nach Einsetzen von Glg. (7) über in:

$$\frac{q_m}{q}=\frac{1}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)} \qquad (9)$$

Das Verhältnis $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ der in den Gleichungen (6b) und (5b) definierten Austauschgrößen für Wärme ε_h und Impuls ε_m ist eine Funktion der Größe ε_m/ν und der Prandtl-Zahl (/11/,Abb.13), bzw.,wenn man den in ε_m/ν implizit enthaltenen Wandabstand und die Reynolds-Zahl herauslöst, eine Funktion des Wandabstandes, der Reynolds- und der Prandtl-Zahl. Damit hängt aber auch die verallgemeinerte Prandtl-Zahl Pr^+ von diesen Größen ab, sie ist also im Gegensatz zu Pr kein reiner Stoffwert mehr. Wie im vorausgegangenen Abschnitt angegeben, wird die Abhängigkeit der Größe $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ vom Wandabstand vernachlässigt.
Die Austauschgröße für den Impuls ergibt sich aus den Gleichungen (3), (5a) und (5b) zu:

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu}=\frac{\tau_t}{\tau_m}=\frac{\tau}{\mu(du/dy)}-1 \tag{10}$$

Für das Temperaturfeld erhält man aus den Gleichungen (6a), (6c) und (9):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_w\frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)} \tag{11}$$

Es erweist sich nun als zweckmäßig, die folgenden dimensionslosen Koordinaten einzuführen:

$$\Theta=\frac{\vartheta-\vartheta_w}{\vartheta_o-\vartheta_w} \tag{12}$$

$$y^+=\frac{r}{|r_w|} \tag{13}$$

Hierbei bedeuten r den Radius bei kreiszylindrischen bzw. den Abstand von der Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$ bei ebenen Begrenzungswänden und $|r_w|$ den Betrag von r an der wärmetauschenden Wand (Abb.1).Die vorzeichenbehaftete Größe r_w nimmt für die einzelnen Strömungsquerschnitte folgende Werte an:

d/2	-Rohr
h/2	-Parallele Platten, symmetrischer Wärmeübergang
h	-Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeübergang
δ_t	-Ebene Platte
$-r_1$	-Ringspalt, Wärmeübergang am inneren Zylinder
r_2	-Ringspalt, Wärmeübergang am äußeren Zylinder
$-r_1$	-Rohrbündel

Die Integration der Gleichung (11), beginnend an der wärmetauschenden Wand ($y^+=y_w^+=1$; $\Theta=0$) ergibt:

$$\Theta=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y^+}\right)_w\int_1^{y^+}\frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)}\,dy^+ \tag{14}$$

Den Proportionalitätsfaktor $(\partial\Theta/\partial y^+)_w$ erhält man aus der Bedingung $\Theta(y^+=y_o^+)=1$:

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y^+}\right)_w=\frac{1}{\int_1^{y_o^+}\frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)}dy^+} \tag{15}$$

und nach einer Zwischenrechnung folgt für den Temperaturverlauf:

$$\Theta = 1 - \frac{\int_{y_0^+}^{y^+} \frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)} dy^+}{\int_{y_0^+}^{1} \frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)} dy^+} \tag{16}$$

2.2.2. DIE WÄRMEÜBERGANGSKENNZAHL Nu

Die Nußelt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha d_h}{\lambda} \tag{17}$$

läßt sich aus den Gleichungen (6c), (12), (13), (15) und

$$\alpha = \frac{q_w}{\vartheta_w - \vartheta_m} \tag{18}$$

unter Beachtung von

$$y = r_w \mp r$$

(Minus-Zeichen in den Fällen a, c, e, f, g, Plus-Zeichen in den Fällen b und d der Abb. 1.) berechnen zu:

$$Nu = -\frac{d_h/r_w}{\Theta_m}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y^+}\right)_w = \frac{d_h/r_w}{\Theta_m \int_{y_0^+}^{1} \frac{q/q_w}{1+Pr^+(\varepsilon_m/\nu)} dy^+} \tag{19}$$

Bei laminarer Strömung entfällt in den vorausgegangenen Gleichungen der Ausdruck $Pr^+(\varepsilon_m/\nu)$.

2.2.3. MISCHUNGSTEMPERATUR UND MITTLERE GESCHWINDIGKEIT

2.2.3.1. KREISZYLINDRISCHE WÄNDE

Die Definitionsgleichung der Mischungstemperatur

$$\Theta_m = \frac{\vartheta_m - \vartheta_w}{\vartheta_0 - \vartheta_w} \tag{20}$$

lautet (Abb. 1):

$$\pi(1-y_o^{+2})\varphi_m\Theta_m = \int_{y_o^+}^{1} 2\pi y^+\varphi\Theta dy^+$$

Daraus erhält man:

$$\Theta_m = \frac{2}{\varphi_m(1-y_o^{+2})}\int_{y_o^+}^{1}\varphi\Theta y^+ dy^+ \qquad (21a)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung Θ und Θ_m durch eins, so ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit φ_m:

$$\varphi_m = \left(\frac{2}{1-y_o^{+2}}\right)\int_{y_o^+}^{1}\varphi y^+ dy^+ \qquad (22a)$$

2.2.3.2. EBENE WÄNDE

Analog zu vorstehender Herleitung gilt hier:

$$(1-y_o^+)\varphi_m\Theta_m = \int_{y_o^+}^{1}\varphi\Theta dy^+$$

In den hier in Frage kommenden Fällen der parallelen Platten (Abb. 1e und 1f) ist $y_o^+ = 0$ und somit wird:

$$\Theta_m = \frac{1}{\varphi_m}\int_0^1 \varphi\Theta dy^+ \qquad (21b)$$

sowie

$$\varphi_m = \int_0^1 \varphi\, dy^+ \qquad (22b)$$

Bei der ebenen Platte ist es günstiger, die Nußelt-Zahl auf die maximale Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_\infty)$ als auf $(\vartheta_w-\vartheta_m)$ zu beziehen. Dies entspricht einer Mittelwertbildung im Bereich $0<y<\infty$ und nicht, wie oben definiert, in den Grenzen $0<y<\delta_t$. Unter dieser Voraussetzung wird $\Theta_m = \Theta_o = \varphi_m = \varphi_c = 1$.

2.2.4. DIE WANDNORMALE WÄRMEFLUSSDICHTEVERTEILUNG

Aus einer Betrachtung über die Wärmebilanz folgt, daß der durch eine wandparallele Schicht der Länge dx hindurchtretende thermische Fluß gleich der Enthalpieänderung des Massenstromes zwischen dieser Schicht und der Stelle $d\vartheta/dy=0$ ist.

2.2.4.1. KREISZYLINDRISCHE WÄNDE

Die Bestimmungsgleichung für q lautet:

$$2\pi y^+ q dx = \rho c_p \int_{y^+}^{y_o^+} 2\pi y^+ u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx dy^+$$

Für die Wärmeflußdichte q_w an der Wand ist y^+ durch $y_w^+ = 1$ zu ersetzen, was nach Einführung von $\varphi = u/u_c$ folgende Gleichung für die dimensionsbefreite wandnormale Wärmestromdichteverteilung liefert:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{y_o^+}^{y^+} \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} y^+ dy^+}{y^+ \int_{y_o^+}^{1} \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} y^+ dy^+} \qquad (23a)$$

2.2.4.2. EBENE WÄNDE

Hier gilt für die Schichtbreite 1 :

$$q dx = \rho c_p \int_{y^+}^{y_o^+} u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx dy^+$$

und das Wärmestromdichteverhältnis wird unter Beachtung von $y_o^+ = 0$:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{0}^{y^+} \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dy^+}{\int_{0}^{1} \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dy^+} \qquad (23b)$$

Der axiale Temperaturgradient $\partial\vartheta/\partial x$ wird im folgenden Abschnitt berechnet, die endgültigen Gleichungen zur Berechnung von q/q_w sind daran anschließend aufgeführt (Glg. 53a bzw. 53b).

2.2.5. DER PARAMETER DER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG

Aus Gleichung (19) ist zu ersehen, daß die Kennzahl der Wärmeübertragung Nu für einen speziellen Fall der Konfiguration, Re- und Pr^+-Zahl (bei laminarer Strömung entfällt der Einfluß von Pr und Re) nur dann in Strömungsrichtung konstant ist, wenn die dimensionslose Temperaturverteilung $\Theta(y^+)$ x-unabhängig ist, oder mit anderen Worten, wenn die Temperaturprofile ϑ in Strömungsrichtung ähnlich sind. In der folgenden Betrachtung wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen diese Bedingung erfüllt ist. Zur Veranschaulichung werden dabei die Vorgänge längs eines Wärmeaustauschers herangezogen.

In den Abbildungen 2a-2f sind die Temperaturen ϑ_w an der Wand sowie ϑ_{o1} und ϑ_{o2} der beiden wärmeaustauschenden Medien für verschiedene Verhältnisse der Wasserwerte und der Strömungsrichtung über der Lauflänge x/l aufgetragen. Die zugehörigen Kurven $(\theta_x)_1=f(x/l,y^+)$ zeigen für den Strömungsquerschnitt 1 des Wärmeaustauschers eine ortsabhängige, dimensionslose Temperaturverteilung, die wie folgt definiert ist:

$$\theta_x(\tfrac{x}{l},y^+) = \frac{\vartheta-\vartheta_{wa}}{\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa}} \tag{24}$$

Bei Kongruenz der Temperaturprofile $\theta(y^+)=(\vartheta-\vartheta_w)/(\vartheta_o-\vartheta_w)$ gilt unter Beachtung des dann vorliegenden Zusammenhangs $\theta(y^+)=\theta_x(x/l=0,y^+)$:

$$\theta_x(\tfrac{x}{l},y^+) = c\theta+\theta_{xw} \tag{25}$$

mit

$$c(\tfrac{x}{l}) = q_w/q_{wa} \tag{26a}$$

und

$$\theta_{xw}(\tfrac{x}{l}) = \theta_x(\tfrac{x}{l},1) = \frac{\vartheta_w-\vartheta_{wa}}{\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa}} \tag{27}$$

Führt man weiterhin

$$\theta_{xo}(\tfrac{x}{l}) = \theta_x(\tfrac{x}{l},y_o^+) = \frac{\vartheta_o-\vartheta_{wa}}{\vartheta_{oa}-\vartheta_{wa}} \tag{28}$$

ein, so erhält man aus den Gleichungen (25) und (26a) für $y^+=y_o^+$:

$$c(\tfrac{x}{l}) = \theta_{xo}-\theta_{xw} \tag{26b}$$

und damit wird:

$$\theta_x(\tfrac{x}{l},y^+) = (\theta_{xo}-\theta_{xw})\theta+\theta_{xw} \tag{29}$$

Zur Berechnung der wandnormalen Wärmestromdichteverteilung q/q_w ist nach Glg. (23a) und (23b) die Kenntnis des Temperaturgradienten in Strömungsrichtung $\partial\vartheta/\partial x$ notwendig. In der dimensionslosen Form läßt sich diese Größe aus Glg. (29) berechnen:

$$\frac{\partial\Theta_x}{\partial(\frac{x}{l})} = \frac{d\Theta_{xw}}{d(\frac{x}{l})}(1-\Theta) + \frac{d\Theta_{xo}}{d(\frac{x}{l})}\Theta$$

$$\frac{\partial\Theta_x}{\partial(\frac{x}{l})} = \frac{d\Theta_{xo}}{d(\frac{x}{l})}\left[(1-\Theta)\frac{d\Theta_{xw}}{d\Theta_{xo}} + \Theta\right] \tag{30}$$

Aus Glg. (19) folgt, daß die Nußelt-Zahl Nu nur dann unabhängig von x ist, wenn auch q/q_w x-unabhängig ist. Da bei der Berechnung des Quotienten q/q_w nach Einsetzen von Glg. (30) in Glg. (23a) bzw. (23b) der Faktor $d\Theta_{xo}/d(x/l)$ herausfällt, ist die vorgenannte Bedingung erfüllt für:

$$\frac{d\Theta_{xw}}{d\Theta_{xo}} = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_o} = \text{konst.} \tag{31}$$

Für den Differentialquotienten $d\vartheta_w/d\vartheta_o$ und den mit ihm zusammenhängenden Ausdruck $d\vartheta_w/d\vartheta_m$ werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$F_o = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_o} = \text{konst.} \tag{32a}$$

$$F_m = \frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_m} = \text{konst.} \tag{32b}$$

Die Größen F_o und F_m sind über die mittlere Temperatur Θ_m miteinander verbunden:
Unter Beachtung der Gleichungen (32a) und (32b) folgt aus Glg.(20):

$$\Theta_m = \frac{F_o/F_m - F_o}{1-F_o} \tag{33}$$

und durch Umformung:

$$F_o = \frac{1}{1+(1/F_m-1)/\Theta_m} \tag{34}$$

$$F_m = \frac{1}{1+(1/F_o-1)\Theta_m} \tag{35}$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3 dargestellt. Dabei sind die um die Schnittpunkte der beiden orthogonalen Asymptotenscharen $F_m=1/(1-\Theta_m)$ und $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ rotationssymmetrisch verlaufenden Kurvenabschnitte weggelassen, da für sie $F_o/F_m = d\vartheta_m/d\vartheta_o < 0$ ist, was einem Bereich von untergeordnetem technischen Interesse entspricht, wie die nun folgenden Erläuterungen zeigen. Mit zunehmender Annäherung an die Asymptote $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ strebt infolge von $F_m\rightarrow-\infty$ die Mischungstemperatur $\vartheta_m(x)$ einem konstanten Wert zu. Dies bedeutet aber, daß der Wärmeübergang und damit auch der Temperaturgradient $d\Theta/dy^+$ an der Wand gegen null gehen. Mit noch höheren negativen Werten des Parameters F_o, d.h. für $F_o<-\Theta_m/(1-\Theta_m)$, ist eine Umkehr des Temperaturgradienten an der Wand verbunden (s. Abb. 4a): $d\Theta/dy^+<0$. Das Temperaturprofil Θ nimmt mit zunehmendem Wandabstand zunächst negative Werte an, durchläuft an der Stelle, die hier mit $y^+=y_m^+$ bezeichnet werden soll, ein Minimum, um anschließend S-förmig bis zum Wert $\Theta_o=1$ anzusteigen. Die Realisation der so beschriebenen Temperaturverteilungen mit zwei horizontalen Tangenten ist jedoch an die Erfüllung gewisser Vorbedingungen geknüpft. Wie leicht einzusehen ist, können derartige Temperaturprofile nicht unmittelbar aus einer Anströmung mit über den Strömungsquerschnitt ausgeglichener Temperatur $\vartheta(x,y)=\vartheta_{ma}$=konst., wie dies im allgemeinen stromauf des Beginns der Wärmeübertragung vorliegt, entstehen: Ein solcher Vorgang würde ja bedeuten, daß im Bereich $y_o^+...y_m^+$ ein Teil der Flüssigkeit sich auf Kosten einer entsprechenden Abkühlung des restlichen Teils erwärmen würde, was dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widerspricht.

Die Temperaturverteilungen für $F_o<-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ sind jedoch nicht grundsätzlich auszuschließen, wie die Beispiele mit Richtungsumkehr der Wärmeübertragung beweisen: Übergang von Heizung zu Kühlung und umgekehrt[++]. In diesen Fällen werden sich nach einer Übergangsstrecke (vergleichbar mit dem thermischen Einlauf) wiederum ähnliche Temperaturprofile der geschilderten Form einstellen, falls die Wärmeflußverteilung einen konstanten Wert der Größe $F_o=d\vartheta_w/d\vartheta_o<-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ ergibt oder einem solchen zustrebt.

Die Mischungstemperatur ϑ_{mg} des Temperaturprofils $\vartheta_g(x_g,y)$ am Ende der Übergangsstrecke ($x=x_g$) ändert sich in dem Gebiet $y_o^+...y_m^+$, $x>x_g$ nicht mehr, während die Temperaturdifferenz $|\vartheta_w-\vartheta_o|$ stetig abnimmt. Mit anderen Worten: Das Temperaturfeld am Ort der Richtungsumkehr muß in Bezug auf den anschließenden Wärmeaustausch genügend hohe Temperaturdifferenzen aufweisen, da es sich im Gebiet $y_o^+...y_m^+$, über dessen Grenzen hinweg definitionsgemäß kein Wärmeaustausch stattfindet (der Temperaturverlauf hat bei y_o^+ und y_m^+ horizontale Tangenten), nur um einen Temperaturausgleich handeln kann: $\vartheta(x,y)\rightarrow\vartheta_{mg}$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergibt sich nach der Übergangszone der Fall mit $F_o>-\Theta_m/(1-\Theta_m)$. Das technische Interesse der Wärmeflußverteilungen mit $F_o<-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ ist gering, wenngleich die Realisation sowohl bei aufgeprägtem Fluß als auch bei Wärmeaustauschern möglich ist. Eine Ausnahme hiervon bildet die Grenzbedingung $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$. Das dafür berechenbare Temperaturfeld stellt die sich asymptotisch ergebende Lösung für den häufig auftretenden Fall dar, daß nach Beendigung eines beliebig gestalteten Wärmeaustauschs die anschließenden Wände wärmeisoliert sind. Als Beweis für die Richtigkeit dieser Aussage genügt es dabei zu zeigen, daß die Temperatur an der Stelle y_n^+ ($\partial\vartheta/\partial x=0$) identisch mit der Mischungstemperatur ist (wegen $\vartheta(x,y)\rightarrow\vartheta_{mg}$). Dieser Nachweis ist einfach zu erbringen: Aus Glg. (30) folgt unter Beachtung der Gleichungen (31) und (32a) $\Theta(y^+=y_n^+)=F_o/(F_o-1)$ und nach Einsetzen von $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ ergibt sich $\Theta(y_n^+)=\Theta_m$. Zur Berechnung des Abklingens der Temperaturverteilungen in Strömungsrichtung reicht die Kenntnis der Größe $F_o=d\vartheta_w/d\vartheta_o$ allein nicht aus. Das Temperaturfeld $\Theta_x(x/l,y^+)$ kann jedoch mit Hilfe des Temperaturgradienten $d\Theta/dy^+$ für $y^+=y_n^+$ bestimmt

---

++ Dieser Fall liegt z.B. auch vor bei Vorzeichenwechsel der Temperaturdifferenz $\vartheta_w-\vartheta_\infty$ bei der längsangeströmten ebenen Platte, wobei der Ort mit verschwindendem Wärmeaustausch $(\partial\vartheta/\partial y)_w=0$ stromauf der Stelle mit $\vartheta_w=\vartheta_\infty$ liegt, wie H. Schlichting /26/ am Beispiel des linearen Verlaufs der Wandtemperatur bei laminarer Strömung zeigt.

werden. Die Durchführung dieser Berechnungen geht jedoch über den Rahmen der vorliegenden Untersuchungen hinaus und ist daher einer späteren Arbeit vorbehalten.

In Fortsetzung der hier interessierenden Wärmeaustauschbedingungen wird nachstehend die Berechnung des Parameters F_m hergeleitet. Aus Glg.(18) folgt:

$$\frac{d\vartheta_w}{d(\frac{x}{l})} = \frac{d\vartheta_m}{d(\frac{x}{l})} + \frac{d(q_w/\alpha)}{d(\frac{x}{l})}$$

Der Wärmeübertragungskoeffizient α ist nach der gemachten Voraussetzung konstant, folglich gilt:

$$\frac{d\vartheta_w}{d\vartheta_m} = 1 + \frac{dq_w/d(\frac{x}{l})}{\alpha d\vartheta_m/d(\frac{x}{l})}$$

Durch Einführung der Stanton-Zahl

$$St = \frac{\alpha}{\rho u_m c_p} = \frac{\alpha U^+}{4q_w} \frac{d\vartheta_m}{d(\frac{x}{d_h})} \tag{36}$$

erhält man

$$F_m = 1 + \frac{U^+}{4\ St} \frac{dq_w/d(\frac{x}{d_h})}{q_w} \tag{37}$$

Da gemäß Glg. (35) auch die Größe F_m konstant ist, folgt aus Glg. (37) das wichtige Ergebnis, daß von der Lauflänge x unabhängige Nußelt-Zahlen nur bei denjenigen Wärmestromdichteverteilungen zu erwarten sind, für die

$$\frac{dq_w/d(\frac{x}{d_h})}{q_w} = \text{konst.} = m \tag{38}$$

ist. Die Integration von Glg. (38) ergibt:

$$\int_{q_{wa}}^{q_w} \frac{dq_w}{q_w} = m \int_0^{x/d_h} d(\frac{x}{d_h})$$

$$\frac{q_w}{q_{wa}} = e^{m(x/d_h)} \tag{39}$$

Bei der Herleitung der vorstehenden Beziehungen wurde keine Voraussetzung über die Strömungsform gemacht, sie gelten also sowohl für laminare als auch für turbulente Strömung. Im Gegensatz hierzu gibt es für den Fall des Wärmeübergangs an einer ebenen Platte ortsunabhängige Nu-Zahlen nur bei laminarer Strömung, wie in Abschnitt 3.4.3 gezeigt wird.

Setzt man Glg.(38) in Glg. (37) ein, so erhält man die Größe F_m für den Fall, daß der Wärmefluß aufgeprägt ist:

$$F_m = 1 + \frac{m\ U^+}{4\ St} \tag{40}$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt unter Beachtung der Gleichungen (18), (32b), (33), (36) und (39) den zugehörigen Temperaturverlauf der Wand:

$$\frac{\vartheta_w - \vartheta_{wa}}{\vartheta_{ma} - \vartheta_{wa}} = \left(1 + \frac{4\ St}{m\ U^+}\right)\left(1 - e^{mx/d_h}\right) \tag{41a}$$

oder in der Form

$$\theta_{xw} = \frac{1 - e^{mx/d_h}}{1 - 1/F_o} = \left(1 + \frac{4\ St}{m\ U^+}\right)\left(1 - e^{mx/d_h}\right)\theta_m \tag{41b}$$

Bei Wärmeaustauschern liegt die nach Glg. (39) geforderte exponentielle Wärmeflußverteilung stets vor: führt man in bekannter Weise die Kennzahl ψ für die Wasserwerte $\dot{G}c_p$ und die Wärmedurchgangszahl k ein, so läßt sich daraus die Differenz der Mischungstemperaturen der beiden wärmeaustauschenden Medien in Abhängigkeit von der Lauflänge x angeben:

$$\frac{\vartheta_{m2} - \vartheta_{m1}}{\vartheta_{m2a} - \vartheta_{m1a}} = e^{-\psi k F} \tag{42}$$

Die Größe F bedeutet die Oberfläche der Trennwand bis zur Stelle x auf derjenigen Seite, auf die auch q_w und k bezogen sind. Die Größen k und ψ sind wie folgt definiert:

$$k = \frac{q_{w1}}{\vartheta_{m2} - \vartheta_{m1}} \tag{43}$$

$$\psi = \frac{1}{\dot{G}_1\ c_{p1}} \pm \frac{1}{\dot{G}_2\ c_{p2}} = \frac{1}{\dot{G}_1\ c_{p1}}\,(1 + M_1) \tag{44}$$

In der Abkürzung

$$M_1 = \pm \frac{\dot{G}_1\ c_{p1}}{\dot{G}_2\ c_{p2}} \tag{45}$$

gilt das Plus-Zeichen bei Gleich-, das Minus-Zeichen bei Gegenstrom.

Bei kreiszylindrischer Trennwand (Rohrbündel- und Ringspaltwärmeaustauscher) berechnet man k aus Glg. (46a), bei ebener Trennwand (Plattenwärmeaustauscher) aus Glg. (46b):

$$1/k = 1/\alpha_e + \frac{r_e}{\lambda_w} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) + \frac{r_e}{r_i} \frac{1}{\alpha_i} \tag{46a}$$

$$1/k = 1/\alpha_2 + s/\lambda_w + 1/\alpha_1 \tag{46b}$$

In Glg. (43) wird der Wärmeübergang in Kanal 1 betrachtet, in Glg. (46a) ist k auf die Oberfläche F mit dem Radius r_e bezogen. In den entsprechenden Alternativfällen sind lediglich die Indices 1 und 2 bzw. e und i zu vertauschen, was auch für die weiteren Betrachtungen gilt.

Wie man sich mit Hilfe der Glg. (43) überzeugt, ist der Ausdruck auf der linken Seite der Glg. (42) identisch mit der Wärmeflußverteilung q/q_w längs der Wand. Daher gilt:

$$\frac{q_w}{q_{wa}} = e^{-\gamma k F} \tag{47}$$

Durch Vergleich mit Glg. (39) folgt unter Beachtung von $F = U_w x$ und $d_h = 4S/(U^+ U_w)$:

$$m = - \frac{4\gamma k S}{U^+} \tag{48}$$

Setzt man die Gleichungen (48) und (44) in Glg. (40) ein, so ergibt sich die Größe F_{m1} für den Kanal 1

$$F_{m1} = 1 - k \left(\frac{S}{St\,\dot{G}\,c_p}\right)_1 (1 + M_1)$$

Der Quotient $(S/St\dot{G}c_p)_1$ ist identisch mit $1/\alpha_1$, was zu folgender Gleichung für die Berechnung der Hilfsgröße F_{m1} bei Wärmeaustauschern führt:

$$F_{m1} = 1 - \frac{k}{\alpha_1} (1 + M_1) \tag{49}$$

Die in dieser Gleichung sowie in Glg. (34) enthaltenen Größen k, α und Θ_m hängen von dem gesuchten Wert Fo ab, dieser muß daher durch Iteration bestimmt werden.

Eine zweite, anschauliche Herleitung der Gleichung (49) ist im Anhang A.2.2.5.1 wiedergegeben.

Spezielle Wärmeflußdichteverteilungen:
a) Konstanter Wärmefluß
Hier gilt:

$$F_o = 1$$

$$F_m = 1$$

$$m = 0$$

Der Fall q_w=konst. ist im Gegenstromwärmeaustauscher unter der Bedingung $\dot{G}_1 c_{p1} = \dot{G}_2 c_{p2}$ realisiert, wie aus Glg. (49) oder Abb. 2d hervorgeht.
b) Konstante Wandtemperatur
Mit $d\vartheta_w = 0$ wird

$$F_o = 0$$

$$F_m = 0$$

Die Randbedingung ϑ_w=konst. erhält man gemäß Glg. (40) bei aufgeprägtem Fluß mit dem Exponenten

$$m = - 4\ St/U^+ \tag{50}$$

und für Wärmeaustauscher bei Gleichstrom (Abb.2b) mit den Wasserwerten

$$\frac{\dot{G}_1\ c_{p1}}{\dot{G}_2\ c_{p2}} = \frac{\alpha_1}{k} - 1 \tag{51}$$

Für den Fall, daß der Quotient s/λ_w aus Wandstärke s und Wärmeleitzahl λ_w der Wand genügend klein ist, wird $\alpha_1 = 2k$ und damit $\dot{G}_1 c_{p1} = \dot{G}_2 c_{p2}$.

Der in Glg. (30) enthaltene axiale Temperaturgradient $d\Theta_{xo}/d(x/l)$, dessen Kenntnis bei der Berechnung von q/q_w allerdings nicht notwendig ist, soll aus Gründen der Vollständigkeit hier noch aufgeführt werden. Er läßt sich aus den Gleichungen (25), (26a), (26b), (28), (35), (38) und (40) berechnen (s. Anh. A.2.2.5.2) zu:

$$\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = \frac{m e^{m(x/d_h)}}{1-F_o} = \frac{4St\Theta_m(\Theta_{xw}-\Theta_{xo})}{\left[F_o+(1-F_o)\Theta_m\right]U^+} \tag{52a}$$

Der lokale Temperaturgradient $\partial\Theta_x / \partial(x/d_h)$ ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (31), (32a) und (52a) in Glg. (30) zu:

$$\frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/d_h)} = \frac{4St(\Theta_{xw}-\Theta_{xo})}{\left[\Theta_m+(1-\Theta_m)F_o\right]U^+}\left[\Theta + (1 - \Theta)\ F_o\right] \tag{52b}$$

Die Gleichungen (23a) und (23b) für den wandnormalen Wärmestromdichteverlauf gehen damit in ihre endgültige Form über:

a) Kreiszylindrische Wände

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{y_\bullet^+}^{y^+} \varphi \left[F_o+(1-F_o)\theta\right] y^+ dy^+}{y^+ \int_{y_\bullet^+}^{\bullet} \varphi \left[F_o+(1-F_o)\theta\right] y^+ dy^+} \qquad (53a)$$

b) Ebene Wände

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_{\bullet}^{y^+} \varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right] dy^+}{\int_{\bullet} \varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right] dy^+} \qquad (53b)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist die wichtige Tatsache zu ersehen, daß nicht allein der Verlauf der Wärmeflußdichte q_w längs der Wand (und damit direkt verbunden der Verlauf der Mischungstemperaturen ϑ_m) sondern zusätzlich die Art und Weise, in der sich die lokalen axialen Temperaturgradienten in der Flüssigkeit einstellen, den Wärmeübergangskoeffizienten mitbestimmen. Wenn im Folgenden die dieses Zusammenwirken eindeutig beschreibende Größe $F_o=d\vartheta_w/d\vartheta_o$=konst. trotzdem nur mit "Parameter des Wärmeflußverlaufs" bezeichnet wird, so hat dies in der Bevorzugung eines einfachen Ausdruckes seinen Grund.

In den speziellen Fällen ϑ_w=konst.(F_o=0) bzw. q_w=konst.(F_o=1) vereinfachen sich die Ausdrücke in den eckigen Klammern zu θ bzw. 1. Daraus geht hervor, daß der wandnormale Wärmestromdichteverlauf q/q_w bei konstantem Wärmefluß längs der Wand unabhängig vom Temperaturfeld θ und damit auch bei turbulenter Strömung unabhängig von der Prandtl-Zahl ist. Die Berechnung des Temperaturverlaufs läßt sich dadurch ohne Iteration durchführen. Der Einfluß der Prandtl-Zahl auf das Temperaturfeld und damit auf die Nußelt-Zahl bleibt jedoch auch in diesem Fall erhalten, wie aus den Gleichungen (16) und (19) hervorgeht.

In den vorausgegangenen Berechnungen wurden die Bedingungen für x-unabhängige Nußelt-Zahlen mit Hilfe desjenigen Verfahrens hergeleitet, das im Hinblick auf eine numerische Anwendung zu vorteilhaften Gleichungen führt. Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man jedoch auch unter Beschränkung auf die Energiegleichung, wie die folgenden Ausführungen zeigen. Der Übersichtlichkeit wegen soll hier nur die laminare Strömung betrachtet werden, die Schlußfolgerungen gelten jedoch auch bei turbulenter Strömung. Die Energiegleichung lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{u}{a}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \qquad (54a)$$

Die Ähnlichkeit der Temperaturprofile wird wieder vorausgesetzt. Die Energiegleichung geht dadurch unter Beachtung der Gleichungen (13), (24) und (29) über in

$$\frac{u}{d_h a}\,\frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/d_h)} = \frac{1}{r_w^2}\,\frac{\partial^2\Theta_x}{\partial y^{+2}} + \frac{1}{r_w^2 y^+}\,\frac{\partial\Theta_x}{\partial y^+}$$

und

$$\frac{u r_w}{a(d_h/r_w)(\Theta_{xo}-\Theta_{xw})}\,\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)}\left[(1-\Theta)\frac{d\Theta_{xw}}{d\Theta_{xo}} + \Theta\right] = \frac{d^2\Theta}{dy^{+2}} + \frac{1}{y^+}\,\frac{d\Theta}{dy^+} \qquad (54b)$$

Da Θ vereinbarungsgemäß nur eine Funktion des Wandabstandes ist, folgt:

$$\frac{d\Theta_{xw}}{d\Theta_{xo}} = \text{konst.} = F_o$$

sowie

$$\frac{1}{\Theta_{xo}-\Theta_{xw}}\,\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = \text{konst.} = m_1$$

Die Integration dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\Theta_{xo} = \frac{e^{m_1(1-F_o)x/d_h} - F_o}{1-F_o}$$

$$\Theta_{xw} = \frac{F_o e^{m_1(1-F_o)x/d_h} - F_o}{1-F_o}$$

Durch Umgruppierung der Konstanten: $m_1 = m/(1-F_o)$ erhält man daraus die Beziehungen (39) und (41b).

Damit läßt sich nun die Differentialgleichung für die Temperatur Θ bei laminarer Strömung angeben. Durch Einsetzen der Glg.(52a) in Glg.(54b) und Umformung mit $St=Nu/(RePr)$ folgt unter Beachtung von $Nu=-(d_h/r_w)(d\Theta/dy^+)_w/\Theta_m$ (s.Glg.19):

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{+2}} + \frac{1}{y^+}\,\frac{d\Theta}{dy^+} - \frac{4}{(d_h/r_w)U^+}\left(\frac{d\Theta}{dy^+}\right)_w \frac{\rho}{\rho_m}\,\frac{F_o+(1-F_o)\Theta}{F_o+(1-F_o)\Theta_m} = 0 \qquad (54c)$$

Für ebene Wände entfällt das Glied $(d\Theta/dy^+)/y^+$. Die Randbedingungen lauten: $\Theta(y^+=y_w^+)=0$ und $\Theta(y^+=y_0^+)=1$, der Ausdruck $(\varphi/\varphi_m)/(U^+d_h/r_w)$ ist beim Rohr durch $4(1-y^{+2})$, bei parallelen Platten und symmetrischem Wärmeaustausch durch $1{,}5(1-y^{+2})$ und bei asymmetrischem Wärmeaustausch durch $6y^+(1-y^+)$ zu ersetzen.

Für den Fall konstanter Wandtemperatur läßt sich die Gleichung (54c) noch vereinfachen. Die Substitution $\Theta_a=\Theta/\Theta_m=(\vartheta-\vartheta_w)/(\vartheta_m-\vartheta_w)$ führt mit $F_0=0$ zu

$$\frac{d^2\Theta_a}{dy^{+2}}+\frac{1}{y^+}\frac{d\Theta_a}{dy^+}-\frac{4}{(d_h/r_w)U^+}\frac{\varphi}{\varphi_m}\left(\frac{d\Theta_a}{dy^+}\right)_w\Theta_a=0$$

wobei die Randbedingung an der Stelle des Temperaturmaximums nun $\Theta(y^+=y_0^+)=1/\Theta_m$ lautet. Die Lösung $\Theta_a=f_4(y^+,\Theta_m)$ liefert noch Ausführung des Mittelwertes $\Theta_{ma}=f_2(\Theta_m)=1$ gemäß Glg. (21a) bzw.(21b) die Bestimmungsgleichung für Θ_m und damit die endgültige Lösung für das gesuchte Temperaturprofil $\Theta=f_4(y^+,\Theta_m)\cdot\Theta_m=f_3(y^+)$.

Eine anschauliche Deutung des Parameters F_0,einschließlich dessen Einfluß auf den Wärmeübergang,kann auf folgende Weise gegeben werden: in Abb.2 sind die verschiedenen charakteristischen Werte bzw.Bereiche von F_0 und deren Realisation in Wärmeaustauschern dargestellt. Den folgenden Betrachtungen sei die Strömung zwischen zwei parallelen Platten zugrundegelegt, um die in diesem Zusammenhang unwichtigen Einflüße veränderlicher Schichtoberfläche, durch die die Wärme fließt, auszuschalten. Das Verhältnis aus Wärmefluß und Wärmeflußdichte ist also in jedem Wandabstand gleich groß (=der betrachteten Wandoberfläche). Die Reihenfolge in Abb.2 ist so gewählt, daß F_0 für den Strömungsquerschnitt 1, beginnend von negativen Werten in Abb.2a, ansteigt. Die weiteren Überlegungen zeigen nun, daß auch die auf die Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_0)$ bezogene Nußelt-Zahl Nu_0 in diesem Sinne zunimmt. Betrachtet man z.B. Abb.2a, so ist darin zu ersehen, daß es im Strömungsquerschnitt 1 wandnahe Schichten gibt, die der konvektiven Wärmeübertragung entgegenwirken : Für sie nimmt bis zum Wandabstand y_n, der durch $\partial\vartheta/\partial x=0$ definiert ist, der Quotient $q/(\partial\vartheta/\partial x)$ negative Werte an. Dies bedeutet aber, daß sich diese Schichten trotz Wärmeabgabe der Wand $(q_w>0)$ in Strömungsrichtung abkühlen und die damit verbundene Enthalpieabnahme zu einem zusätzlichen Wärmetransport in das Gebiet $y>y_n$ führt. Die wandnormale Wärmestromdichte q/q_w, für die an ebenen Wänden infolge $\varphi=0$ stets auch $(d(q/q_w)/dy^+)_w=0$ gilt,nimmt dadurch zunächst Werte größer eins an, durchläuft mit zunehmendem Wandabstand y einen Wendepunkt und erreicht an der Stelle y_n (bzw. y_n^+) ihren Maximalwert, von dem aus sie bei y_0 definitionsgemäß auf null absinkt.

Mit ansteigenden Werten F_0 verringert sich der Bereich mit $q/(\partial\vartheta/\partial x)<0$ und für positive Werte des Parameters F_0 gilt im gesamten Strömungsquerschnitt $q/(\partial\vartheta/\partial x)>0$.Die wandnahen Strömungsschichten beteiligen sich in zunehmendem Maße am konvektiven Abtransport der Wärme, wodurch der wandnormale Wärmefluß rascher abklingt und entsprechend auch der Einfluß des effektiven Wärmeleitvermögens $\lambda_{eff}=\lambda+\lambda_t=q/(\partial\vartheta/\partial y)$, dessen Inanspruchnahme ja der Überwindung eines Widerstandes entspricht, zurückgeht. Die Folge davon ist eine Verbesserung der Wärmeübertragung, ausgedrückt durch die Erhöhung der Nußelt-Zahl Nu_o. Formal drückt sich diese Tatsache darin aus, daß der Flächeninhalt unter der q/q_w-Kurve, der ja gemäß Glg.(19) ein Maß für die Nußelt-Zahl ist, abnimmt (bei laminarer Strömung besteht reziproke Proportionalität). Mit steigender Prandtl-Zahl geht der Einfluß von F_o auf Nu_o zurück, da der Wärmeübergang in zunehmendem Maß von den Vorgängen in unmittelbarer Wandnähe bestimmt wird.

Über die Grenzwerte der Nußelt-Zahl Nu_o für $F_o \rightarrow \pm\infty$ lassen sich qualitative Aussagen machen, ohne auf den detaillierten Rechnungsgang oder auf numerische Ergebnisse zurückgreifen zu müssen. Für $F_o = d\vartheta_w/d\vartheta_o \rightarrow +\infty$ folgt aus den Gleichungen (34), (40), (45) und (49): $m = 4St\theta_m/(1-\theta_m)$ bei aufgeprägtem Wärmefluß und $(\dot{G}c_p)_1/(\dot{G}c_p)_2 = 1+(\alpha_1/kU^+)\theta_m/(1-\theta_m)$ bei Wärmeaustauschern (Gegenstrom). Der letztgenannte Fall ist in Abb.4c dargestellt. Da sich F_m bei der Zunahme von F_o asymptotisch dem Grenzwert $F_m=1/(1-\theta_m)$ nähert, streben auch θ_m und Nu_o asymptotisch Maximalwerten θ_{m-max} und Nu_{o-max} zu. Die sich an $F_o = d\vartheta_w/d\vartheta_o = \infty$, $d\vartheta_o = 0$ anschließenden Wertepaare $F_m > 1/(1-\theta_{m-max})$, $F_o < 0$ sind in Verbindung mit in Strömungsrichtung ansteigenden Temperaturdifferenzen $|\vartheta_w - \vartheta_o|$ physikalisch nicht sinnvoll: Ersetzt man in Abb.4c die Linie ϑ_{o1}=konst. durch eine solche mit $d\vartheta_{o1}/dx<0$, so würde dies bedeuten, daß sich die mit der Abkühlung der Flüssigkeitsmenge zwischen y_o und $y_n(\partial\vartheta/\partial x=0)$ verbundene Wärmeabgabe in das Gebiet $y_n \ldots y_w$ längs ansteigender Temperaturen $\vartheta(y,x=\text{konst.})$ vollziehen $(q\ /(\partial\vartheta/\partial y)>0)$. Dies widerspricht aber dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. (Die hier geschilderten Zusammenhänge führen weiterhin zu Aussagen über die Länge des thermischen Einlaufs, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.) Für negative Werte des Quotienten F_o/F_m bleiben allein die weiter oben beschriebenen Möglichkeiten übrig: $Nu_o \leq 0$ für $F_o \leq -\theta_m/(1-\theta_m)$.

Für $Nu_o < 0$ verlaufen die einem beliebigen Fall I eines Wärmeaustauschvorgangs - I gekennzeichnet durch den Strömungsquerschnitt, durch die thermische Randbedingung (z.B. PS- PAS, A1- A2) und bei turbulenter Strömung zusätzlich durch die Prandtl- und die Reynolds-Zahl - eindeutig zugeordneten Kurven $F_o=f_2(F_m,I)$++ innerhalb des durch $F_m>0$, $F_o<0$ definierten Quadranten. Dabei schneiden sie für abnehmende Werte F_o die Kurven $F_o=f_1(F_m,\theta_m=\text{konst.})$ mit ebenfalls abnehmenden Werten θ_m und nähern sich asymptotisch $(F_o \rightarrow -\infty)$ dem Grenzwert $F_m=1/(1-\theta_m)$. Im Gegensatz zu dem Fall $F_o \rightarrow +\infty$ ist hier der Grenzwert $F_o=d\vartheta_w/d\vartheta_o \rightarrow -\infty$ nicht durch $d\vartheta_o/dx=0$, d.h. ϑ_o=konst., sondern durch $d\vartheta_w/dx \rightarrow -\infty$ charakterisiert. Die bereits beschriebene Vorschrift, daß im Bereich $y_o \ldots y_m$ die Temperaturdifferenzen sich nur abbauen können, schließt $d\vartheta_o/dx=0$ in Verbindung mit einem endlichen Wert der Nußelt-Zahl Nu_o aus. Mit $F_m>0$ folgt $d\vartheta_m/dx \rightarrow -\infty$, was demnach auch zu $Nu_o \rightarrow -\infty$ führt: Das Temperaturprofil hat also die Form $\theta(y^+)=\theta_m=\theta_{m-min}<0$, $\theta(y_w^+)=0$, $\theta(y_o^+)=1$. Wegen $\theta_{m-min}<0$, gekoppelt mit einem negativen Wert von F_o, gibt es stets einen speziellen Fall mit $\theta_m=0$, dieser ist in Abb.4a schematisch skizziert: Die aus den beiden Mischungstemperaturen ϑ_{m1} $(0<y<y_m,\ d\vartheta_{m1}/dx<0)$ und ϑ_{m2}=konst. $(y_m<y<y_o)$ gebildete Gesamtmischungstemperatur $\vartheta_m=\vartheta_w$ $(0<y<y_o)$ geht asymptotisch gegen ϑ_{m2} (s. Pfeil in Abb.4a).

Der Verlauf der Nußelt-Zahl Nu weist gegenüber Nu_o einige grundsätzliche Unterschiede auf. Zwar strebt auch Nu mit $F_o \rightarrow +\infty$ einem

---

++Als Beispiel für die Funktion f_2 ist in Abb.3 der Fall der laminaren Rohrströmung $(I=T_{lam})$ mit $Nu_o>0$ eingezeichnet (gestrichelte Linie). Jedem Fall I kommt die Rolle eines eindeutigen Parameters zu.

oberen Grenzwert $Nu_{max}>Nu_{o-max}$ zu $(\Theta_m \to \Theta_{m-max})$ und Nu ebenso wie Nu_o verschwinden für $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$, dagegen weist Nu_o für $\Theta_m=0$ einen endlichen negativen Wert auf, während Nu gegen $-\infty$ geht. Im Bereich $\Theta_{m-min}<\Theta_m<0$ sinkt $Nu>0$, beginnend von $Nu \to +\infty$ für $\Theta_m=0$, zuerst ab, um nach Durchlaufen eines Minimums für $\Theta_m \to \Theta_{m-min}$ $(Nu_o \to -\infty)$ wieder gegen ∞ anzusteigen.

Für den Fall $Nu=Nu_o=0$ sind die axialen Temperaturverteilungen ϑ_o, ϑ_m und ϑ_w am Beispiel eines Wärmeaustauschers (Gleichstrom, Strömungsquerschnitt 1) in Abb.4b schematisch dargestellt. Aus $F_m \to -\infty$ ergibt sich mit Glg.(49) $M_1=(\dot{G}c_p)_1/(\dot{G}c_p)_2 \to \infty$, während bei aufgeprägtem Wärmefluß der Grenzwert $m<0$ aus $m/St \to -\infty$ mit $St=0$ nach Glg.(41b) den Temperaturverlauf $\Theta_{xw}=[1-\exp(mx/d_h)]/(1-1/F_o)$ der Wand bzw. mit ϑ_m=konst. $\Theta_{xo}=1+\Theta_{xw}(1-1/\Theta_m)$ an der Stelle $y^+=y_o^+$ liefert. Rascher zum Ziel dürfte allerdings das weiter oben beschriebene Verfahren führen, welches zur Bestimmung des Grenzwertes m den Temperaturgradienten $d\Theta/dy^+$ längs des Wandabstandes $y^+=y_n^+$ heranzieht.

2.3. DIE THERMISCHE EINLAUFLÄNGE

Werden die Temperaturverteilungen ϑ_w, ϑ_m und ϑ_o in den Bereich des thermischen Einlaufs $x<x_f$ unter formaler Anwendung der bei beendetem thermischen Einlauf geltenden Gesetzmäßigkeiten extrapoliert, so ergeben sich z.B. für den in Abbildung 4d gezeichneten Fall wandferne Zonen mit Temperaturen, die niedriger als die über den Strömungsquerschnitt ausgeglichene Zuströmtemperatur $\vartheta(x,y)=\vartheta_{ma}$=konst. sind. Einen Aufbau des wandnormalen Temperaturprofils in dieser Art, gekennzeichnet durch einen negativen Wert des Quotienten $(\vartheta_o-\vartheta_{ma})/(\vartheta_w-\vartheta_m)$, schließt wiederum der zweite Hauptsatz der Thermodynamik aus: Wärmetransport aus wandfernen in wandnahe Zonen (getrennt durch die Stelle mit $\vartheta(x,y)=\vartheta_{ma}$) unter der Bedingung $q/(\partial\vartheta/\partial y)>0$. In Wirklichkeit erhält man für ϑ_o im Gebiet $x<x_f$ einen Verlauf, wie er durch die gestrichelte Linie schematisch skizziert ist. Der Übergang in die ausgezogene Kurve ϑ_o erfolgt asymptotisch, der Abstand x_f sei dabei die in geeigneter Weise definierte thermische Einlauflänge (z.B. der Abstand, in welchem $Nu/Nu_\infty=1,01$ ist). Die Stelle x_e am Schnittpunkt der Temperaturkurven ϑ_{ma} und ϑ_o gibt also den Ort an, stromauf dessen der thermische Einlauf auf keinen Fall abgeschlossen sein kann. In den beiden Grenzfällen $F_o=-\Theta_m/(1-\Theta_m)$ mit $Nu=Nu_o=0$ und $F_o=+\infty$ mit $Nu=Nu_{max}$ sind sowohl x_e als auch x_f unendlich groß, wie aus den Abbildungen 4b und 4c ersichtlich ist. Im technisch interessanten Bereich des Parameters F_o bleibt jedoch die stetige Abnahme von x_e bei steigenden Werten F_o vorherrschend.

Mit den in Abb.4d eingetragenen Bezeichnungen ergeben sich für $d\vartheta_w/d\vartheta_m=F_m$ folgende Beziehungen:

$$\int_{\Delta\vartheta_a}^{\Delta\vartheta_e/\Theta_m} d\vartheta_w = F_m \int_0^{(1/\Theta_m-1)\Delta\vartheta_e} d\vartheta_m$$

und

$$\frac{1}{\Theta_m} - \frac{\Delta\vartheta_a}{\Delta\vartheta_e} = \left(\frac{1}{\Theta_m} - 1\right) F_m$$

Der Quotient $\Delta\vartheta_e/\Delta\vartheta_a$ ist wieder identisch mit der Flußverteilung $q_{we}/q_{wa}=\exp(mx_e/d_h)$, was zu der Gleichung

$$\frac{x_e}{d_h} = -\frac{1}{m}\ln\left[1/\Theta_m-(1/\Theta_m-1)F_m\right] = \frac{1}{m}\ln\left[F_o+(1-F_o)\Theta_m\right] \tag{55}$$

führt. Durch Einsetzen der Gleichungen (40), (48) und (49) erhält man daraus die Beziehung

$$\frac{x_e}{d_h} = \frac{\ln\left[1/\Theta_m-(1/\Theta_m-1)F_m\right]}{4(1-F_m)St}U^+ \tag{55a}$$

die bei aufgeprägtem Fluß in

$$\frac{x_e}{d_h} = -\frac{1}{m}\ln\left[1-(1/\Theta_m-1)mU^+/(4St)\right] \tag{55b}$$

und für Wärmeaustauscher in

$$\frac{x_e}{d_h} = \frac{\ln\left[1+(\frac{1}{\Theta_m}-1)(1+M_1)k/\alpha_1\right]}{4(1+M_1)(k/\alpha_1)St}U^+ \tag{55c}$$

übergeht. Für die speziellen Fälle konstanter Wärmestromdichte q_w bzw. konstanter Wandtemperatur ϑ_w vereinfacht sich Glg. (55a) zu

$$\frac{x_e}{d_h} = \frac{1/\Theta_m-1}{4St}U^+ \quad \text{für } q_w=\text{konst.} \tag{55d}$$

$$\frac{x_e}{d_h} = \frac{\ln(1/\Theta_m)}{4St}U^+ \quad \text{für } \vartheta_w=\text{konst.} \tag{55e}$$

Der Vorteil der hier beschriebenen Herleitung gegenüber dem exakten Verfahren zur Berechnung der thermischen Einlauflänge liegt darin, daß die Vorgänge innerhalb des thermischen Einlaufs nicht verfolgt zu werden brauchen. Die in verwickelter Weise vorliegende Abhängigkeit der Einlauflänge vom Strömungsquerschnitt, vom Parameter der Wärmeflußverteilung bei laminarer sowie zusätzlich von der Prandtl- und Reynolds-Zahl bei turbulenter Strömung ist in der Mischungstemperatur Θ_m und der Stanton-Zahl zusammengedrängt. Die in Abb.4c dargestellten Verhältnisse bleiben auch im allgemeinen Fall x-abhängiger Quotienten $d\vartheta_w/d\vartheta_o$ gültig, was die Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens noch weiter unterstreicht. Die Folgerung, daß der thermische Einlauf stromauf der Stelle x_e nicht abgeschlossen sein kann, gilt streng; über den Grad der Abweichung des Temperaturprofils bzw.der Nußelt-Zahl an der Stelle x_e von den asymptotisch erreichbaren Endwerten läßt sich jedoch keine Aussage machen. Letzteres ist wiederum abhängig von den oben erwähnten Einflußgrössen (Strömungsquerschnitt, F_o, Pr, Re) und kann nur durch Vergleich mit Ergebnissen von den Einlauf genau beschreibenden Berechnungen bzw. von Versuchen ermittelt werden.

Unter Vorwegnahme der numerischen Auswertung der Gleichung (55a) in den folgenden Abschnitten soll hier als Anwendungsbeispiel die dimensionslose Größe x_e/d für die thermischen Randbedingungen q_w=konst. und ϑ_w=konst. bei laminarer Rohrströmung berechnet werden, da hierfür der thermische Einlauf mit großer Genauigkeit bekannt ist /13/.

a) ϑ_w=konst.

Nach Grigull u. Tratz /14/ gilt hier:

$$\Theta_m = 0{,}5539$$

$$Nu = 3{,}6547$$

Dies führt unter Beachtung von St=Nu/Pe mit Glg. (55e) zu

$$\frac{x_e}{d_h} = 0{,}0404\ Pe \tag{56a}$$

Die Form dieses Ergebnisses bringt die Tatsache richtig zum Ausdruck, daß bei laminarer Strömung ortsabhängige Größen beim Wärmeaustausch allein eine Funktion der dimensionslosen Rohrlänge $x/(d_h \cdot Pe)$ sind.

An der Stelle $x_e/(d_h Pe)=0{,}0404$ ist /13,14/

$$\frac{Nu(x=x_e)}{Nu} = 1{,}030$$

Die Nußelt-Zahl ist also noch um 3% höher als nach beendetem thermischen Einlauf.

b) q_w=konst.

Mit den bekannten Werten

$$\Theta_m = 11/18$$

$$Nu_q = 48/11$$

folgt aus Glg.(55a):

$$\frac{x_e}{d_h} = 0{,}0365 \ \mathrm{Pe} \qquad (56b)$$

und die zugehörige Nußelt-Zahl wird hier /14/:

$$\frac{Nu_q(x=x_e)}{Nu_q} = 1{,}073$$

2.4. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER WÄRMESTROMDICHTEVERTEILUNG q/q_w UND DER TEMPERATURVERTEILUNG θ

Die Wärmestromdichte q/q_w und die Temperatur θ nehmen an der Stelle y_o^+ definitionsgemäß die Werte $(q/q_w)_o=0$ bzw. $\theta_o=1$ und an der Wand ($y_w^+=1$) die Werte $(q/q_w)_w=1$ bzw. $\theta_w=0$ an. Um weitere Einblicke in den Verlauf der Kurven $q/q_w(y^+)$ und $\theta(y^+)$ zu erhalten, werden im folgenden noch die ersten und zweiten Ableitungen dieser beiden Größen zusammengestellt.

a) Ableitungen der Wärmestromdichteverteilung q/q_w nach der wandnormalen Ordinate y^+

Aus den Gleichungen (23a,b) bzw. (53a,b) ergeben sich für kreiszylindrische (Index r) und ebene Wände (Index h) folgende Beziehungen:

$$\left(\frac{d(\frac{q}{q_w})}{dy^+}\right)_r = \frac{\varphi \frac{\partial\vartheta}{\partial x}}{\int_{y_o^+}^{1} \varphi \frac{\partial\vartheta}{\partial x} y^+ dy^+} - \frac{1}{y^+}\frac{q}{q_w} \qquad (57a)$$

$$= \frac{\varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]}{\int_{y_o^+}^{1} \varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right] y^+ dy^+} - \frac{1}{y^+}\frac{q}{q_w} \qquad (57b)$$

$$\left(\frac{d(\frac{q}{q_w})}{dy^+}\right)_h = \frac{\varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]}{\int_{0}^{1} \varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right] dy^+} \qquad (57c)$$

$$\left(\frac{d^2(\frac{q}{q_w})}{dy^{+2}}\right)_r = \frac{\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]\left(\frac{d\varphi}{dy^+} - \frac{\varphi}{y^+}\right) + (1-F_o)\varphi\frac{d\theta}{dy^+}}{\int_{y_o^+}^{1} \varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right] y^+ dy^+} + \frac{2}{y^{+2}}\frac{q}{q_w} \qquad (58a)$$

und

$$\left(\frac{d^2(\frac{q}{q_w})}{dy^{+2}}\right)_h = \frac{\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]\frac{d\varphi}{dy^+} + (1-F_o)\varphi\frac{d\theta}{dy^+}}{\int_{0}^{1}\varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]dy^+} \tag{58b}$$

Die beiden Gleichungen (57a) und(57b) können noch umgeformt werden:

$$\left(\frac{d(y^+\frac{q}{q_w})}{dy^+}\right)_r = \frac{\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial x}y^+}{\int_{y_0^+}^{1}\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial x}y^+dy^+} \tag{57d}$$

$$= \frac{\varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]y^+}{\int_{y_0^+}^{1}\varphi\left[F_o+(1-F_o)\theta\right]y^+dy^+} \tag{57e}$$

b) Ableitungen der Temperaturverteilung θ nach der wandnormalen Ordinate y^+

Die Differentiation der Gleichung (16) ergibt für laminare (Index l) bzw. turbulente Strömung (Index t):

$$\left(\frac{d\theta}{dy^+}\right)_l = -\frac{q/q_w}{\int_{y_0^+}^{1}(q/q_w)dy^+} \tag{59a}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dy^+}\right)_t = -\frac{\frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu}}{\int_{y_0^+}^{1}\frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu}dy^+} \tag{59b}$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dy^{+2}}\right)_l = -\frac{d(q/q_w)/dy^+}{\int_{y_0^+}^{1}(q/q_w)dy^+} \tag{60a}$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dy^{+2}}\right)_t = -\frac{(1+Pr^+\varepsilon_m/\nu)d(q/q_w)/dy^+ - Pr^+(q/q_w)d(\varepsilon_m/\nu)/dy^+}{(1+Pr^+\varepsilon_m/\nu)^2\int_{y_0^+}^{1}\frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu}dy^+} \tag{60b}$$

In den Ableitungen der Wärmestromdichteverteilung q/q_w können die Ausdrücke $F_o+(1-F_o)\theta$ durch $\partial\vartheta/\partial x$ und $(1-F_o)d\theta/dy^+$ durch $\partial^2\vartheta/(\partial x\partial y^+)$ ersetzt werden.

Der Verlauf der Funktion y^+q/q_w bei kreiszylindrischen Wänden weist mit der Wärmestromdichteverteilung q/q_w bei ebenen Wänden einige gemeinsame Eigenschaften auf: Aus den Gleichungen (57a) bis (57e) folgt, daß die Kurven $(y^+q/q_w)_r$ bzw. $(q/q_w)_h$ an der Wand ($y^+=y_w^+$, $\varphi=0$) ein Optimum und an der Stelle mit konstanter Temperatur in Strömungsrichtung ($y^+=y_n^+$, $\partial\vartheta/\partial x=0$) ein Maximum besitzen. Außer an der Lage dieses Maximums kann die Stelle $y^+=y_n^+$ für Strömungen mit linearem Druckabfall zusätzlich über den Zusammenhang $\Theta(y_n^+)=F_0/(F_0-1)$ aus dem Temperaturprofil Θ bestimmt werden. Wegen $\Theta\geq 0$ folgt für $\partial\vartheta/\partial x=0$: $F_0\leq 0$. Bei konstanter Wandtemperatur ($d\vartheta_w/dx=0, y_n^+=y_w^+$) beginnen die Kurven $(y^+q/q_w)_r$ bzw. $(q/q_w)_h$ an der Wand beim Höchstwert 1 mit horizontaler Tangente und fallen auf den Wert 0 bei $y^+=y_0^+$ kontinuierlich ab, sie trennen dabei die Fälle mit teilweise $(y^+q/q_w)_r>1$ bzw. $(q/q_w)_h>1$ ($F_0<0$) von denen mit ausschließlich $(y^+q/q_w)_r<1$ bzw. $(q/q_w)_h<1$ ($F_0>0$). Die physikalische Erklärung für dieses hier formal hergeleitete Verhalten wurde bereits am Ende des Abschnitts 2.2.5 gegeben. An der Stelle $y^+=y_0^+$ haben beim Rohr ($y_0^+=0$) die Kurven y^+q/q_w und beim Ringspalt ($\varphi_0=0, (q/q_w)_0=0$) die Kurven y^+q/q_w und q/q_w horizontale Tangenten. In der Darstellung $q/q_w=f(y^+)$ bei kreiszylindrischen Wänden beträgt die Neigung an der wärmeaustauschenden Wand $d(q/q_w)/dy^+=-1$, daher nehmen beim Rohr und beim Ringspalt, Wärmeaustausch am äußeren Zylinder, die Wärmestromdichteverteilung q/q_w mit zunehmendem Wandabstand ($dy^+<0$) zunächst Werte größer eins an (die Wärmestromverteilung Q ist proportional dem Produkt aus Wärmestromdichteverteilung q/q_w und dem Radius y^+) während beim Rohrbündel und beim Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder ($dy^+>0$) q/q_w an der Wand stets absinkt und nur für $F_0<0$ eventuell wieder ansteigt. Aus Gleichung (57a) geht weiterhin hervor, daß die Stelle $\partial\vartheta/\partial x=0$ mit einem negativen Wert der Neigung $d(q/q_w)/dy^+$ gekoppelt ist. Dies bedeutet, daß in den Fällen T und A2 die Ordinate y_n^+ vom Maximum der Kurve q/q_w weg in Richtung y_w^+ und in den Fällen B und A1, falls es durch genügend hohe negative Werte von F_0 überhaupt zu einem Maximum kommt, von diesem weg in Richtung y_0^+ rückt. Bei parallelen Platten mit asymmetrischem Wärmeaustausch enden die Kurven q/q_w an der wärmeisolierten Wand mit waagrechter Tangente und Wendepunkt, an der wärmeaustauschenden Wand weisen dagegen sowohl der symmetrische als auch der asymmetrische Wärmeaustausch für konstante Wandtemperatur ($F_0=0$) einen Wendepunkt der Kurven q/q_w auf.

Für die Temperaturprofile ergeben sich nach den Gleichungen (59a), (59b), (60a) und (60b) folgende Eigenschaften: Bei laminarer und turbulenter Strömung gilt für ebene Wände an der wärmeaustauschenden Wand sowie für den Ringspalt und die parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, an der wärmeisolierten Wand die Randbedingung $d^2\Theta/dy^{+2}=0$, die Kurven $\Theta(y^+)$ münden also dort mit einem Wendepunkt. Für laminare Strömung gibt bei parallelen Platten ein zusätzlicher Wendepunkt innerhalb des Strömungsquerschnitts $y_0^+ \ldots y_w^+$ den Ort $y^+=y_n^+$ konstanter Temperatur in Strömungsrichtung an++. Beim Rohr und beim Ringspalt, Wärmeaustausch am äußeren Zylinder, gilt an der wärmeaustauschenden Wand für laminare und turbulente Strömung $d^2\Theta/dy^{+2}>0$, beim Rohrbündel und beim Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder, ist dagegen $d^2\Theta/dy^{+2}<0$ (Die Integrale im Nenner der rechten Seite der Gleichungen (60a) bzw. (60b) sind wegen $y_0^+>1$ negativ). In den erstgenannten Fällen (T,A2) haben die

++Bei der längsangeströmten ebenen Platte ändert sich die Temperatur wegen der wandnormalen Geschwindigkeitskomponente v auch längs der Linie $(y/\delta_t)=(y/\delta_t)_n$ mit Wendepunkt.

Temperaturprofile also stets einen Wendepunkt im Strömungsinnern – an der Stelle y_0^+ hat das Temperaturprofil eine horizontale Tangente –, während dies sonst (mit Ausnahme des nicht auszuschließenden Falls, daß bei turbulenter Strömung der Zähler auf der rechten Seite der Gleichung (60b) null ergibt) nur für Werte $F_0<0$ möglich ist. Als Beispiel sei hier die Temperaturverteilung der laminaren Rohrströmung mit konstantem Wärmefluß aufgeführt: Für den Ort des Wendepunktes folgt aus Gleichung (61) $y/r_w=1-y^+=1-\sqrt{2/3}=0{,}1835$.

3. SPEZIELLE STRÖMUNGSQUERSCHNITTE

3.1. DAS ROHR

Das kreiszylindrische Rohr als einziger Strömungsquerschnitt, der sich durch eine Größe allein, den Durchmesser, eindeutig beschreiben läßt, ist sowohl hinsichtlich der Strömung als auch des Wärmeaustausches am weitesten erforscht. Bereits der Rechteckquerschnitt, der bei genügend großem Seitenverhältnis wie parallele Platten zu behandeln ist und in Bezug auf die Strömung den zuvor beschriebenen Vorzug mit dem Rohr teilt, benötigt für den Wärmeaustausch getrennte Berechnung, je nachdem, ob der Wärmeübergang nur an einer Wand oder an beiden Wänden, und hier wiederum in welchem Verhältnis zueinander, erfolgt. Beim Ringspalt kommen durch das Halbmesserverhältnis r_1/r_2 und beim Rohrbündel durch den Quotienten p/d aus Rohrabstand p und Rohrdurchmesser d sowie durch die Rohranordnung weitere Parameter hinzu. Diese Einflußgrößen werden bei der Berechnung des Wärmeübergangs für laminare Strömung durch den Parameter der Wärmeflußverteilung F_0 und für turbulente Strömung durch die Prandtl- und Reynolds-Zahl ergänzt.

Aus den hier geschilderten Gründen wird auch in der vorliegenden Arbeit das Rohr bei der nummerischen Auswertung im Fall turbulenter Strömung ausführlicher behandelt als die übrigen Querschnitte. Die dabei gewählte feinere Unterteilung der Parameter F_0, Pr^+ und Re erleichtert jedoch eine Interpolation der Ergebnisse für die anderen Konfigurationen. Eine Zusammenstellung der gewählten Zahlenwerte für die verschiedenen Einflußgrößen ist in Tabelle 1 enthalten. Dabei wurden die Zahlenwerte für F_0 in Abhängigkeit von der Pr^+-Zahl ausgewählt, im negativen Bereich dabei aus Glg. (34) für $F_m=-1$, -3, -7 bzw. $F_m=-5$ mit dem jeweils zuvor bei dem nächsthöheren Wert F_0 gewonnenen Θ_m berechnet und auf 5/100 aufgerundet (s. Tabellen 10 bis 17).

3.1.1. LAMINARE STRÖMUNG, EXAKTE BERECHNUNG FÜR q_w=konst.

Die auf laminare Strömung für die Randbedingung q_w=konst. angewandten thermischen Berechnungen sind bekannt, sie werden jedoch im Rahmen der hier vorliegenden Gesamtdarstellung nochmals wiederholt.

Wird die aus Abb.1a ersichtliche Integrationsgrenze $y_0^+=0$ in Glg. (53a) eingesetzt, so folgt mit $F_0=1$

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_0^{y^+} \varphi\, y^+ dy^+}{y^+ \int_0^1 \varphi\, y^+ dy^+}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung

$$\varphi = 1 - y^{+2}$$

führt zu folgender Beziehung für die Wärmestromdichteverteilung:

$$\frac{q}{q_w} = y^+(2-y^{+2})$$

Setzt man diese Gleichung in die gemäß Glg. (16) für das Rohr (und für parallele Platten) geltende Gleichung

$$\Theta = 1 - \frac{\int_0^{y^+} (q/q_w) dy^+}{\int_0^1 (q/q_w) dy^+}$$

ein, so erhält man die Temperaturverteilung

$$\Theta = 1 - \frac{4}{3} y^{+2} + \frac{1}{3} y^{+4} \qquad (61)$$

und aus den Gleichungen (21a) bzw. (19) die Mischungstemperatur

$$\Theta_m = 11/18 = 0{,}611$$

und die Nußelt-Zahl

$$Nu = 48/11 = 4{,}36$$

In diesem Zusammenhang sei noch auf eine Temperaturverteilung hingewiesen, die (allerdings ohne Berücksichtigung des q_w/q_{wa}-Verlaufs) aus einem Potenzreihenansatz mit entsprechend sinnvoll gewählten Randbedingungen gefunden werden kann /16/

$$\Theta = \frac{6}{5} (1-y^+) + \frac{3}{5} (1-y^+)^2 - \frac{4}{5} (1-y^+)^3 = 1 - \frac{9}{5} y^{+2} + \frac{4}{5} y^3 \qquad (61a)$$

Die dieser Gleichung entsprechende angenäherte Temperaturkurve liegt zwischen den für q_w=konst. und ϑ_w=konst. exakt berechneten Θ-Verteilungen (s.Abb.14).

3.1.2. TURBULENTE STRÖMUNG

3.1.2.1. FORMELN FÜR STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

a) Für die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr und zwischen parallelen Platten hat H.Reichardt /7/ die für den Gesamtquerschnitt gültige Gleichung

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{\varkappa} \ln\left[(1+\varkappa\eta)\,\frac{1,5(1+y^+)}{1+2y^{+2}}\right] + c_1\left(1-e^{-\eta/\eta_n} - \frac{\eta}{\eta_n}\,e^{-b_1\eta}\right) \qquad (62)$$

aufgestellt. Dabei ist die Schubspannungsgeschwindigkeit u^+ und der dimensionslose Wandabstand η in der üblichen Weise definiert:

$$u^+ = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} \qquad (63)$$

$$\eta = \frac{u^+ y}{\nu} \qquad (64a)$$

An der Stelle des Geschwindigkeitsmaximums gilt:

$$\eta_c = \frac{u^+ d}{2\nu} \qquad (64b)$$

Für die in Glg. (62) enthaltenen Konstanten werden folgende Zahlenwerte empfohlen:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0,4 \\ \eta_n &= 11 \\ b_1 &= 0,33 \\ c_1 &= 7,8 \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Die Konstante c_1 ist mit der in dem einfacheren logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz $u/u^+=(1/\varkappa)\ln\eta + c_2$ enthaltenen Konstanten $c_2=5,5$ durch die Beziehung

$$c_1 = c_2 - \frac{1}{\varkappa}\ln\varkappa$$

verknüpft. Der zweite Summand auf der rechten Seite der

Gleichung (62) vereinfacht sich zu c_1 für größere Werte von η. An der Stelle du/dy=0 gilt:

$$\frac{u_c}{u^+} = \frac{1}{\varkappa}\ln\left[1,5(1+\varkappa\eta_c)\right] + c_1 \tag{66}$$

und damit läßt sich $\varphi=(u/u^+)/(u_c/u^+)$ berechnen. Die Mittelwertbildung φ_m nach Glg. (22a) ergibt nach Weglassen vernächlässigbarer Zusatzglieder

$$\varphi_m = \frac{1}{u_c/u^+}\left[\frac{1}{\varkappa}\ln\eta_c + c_2 - \frac{1}{\varkappa}(\ln2+\frac{1}{2}\ln3) - 2c_1\frac{\eta_n}{\eta_c}\right]$$

$$= \frac{1}{u_c/u^+}\left[\frac{1}{\varkappa}\ln\eta_c - 2c_1\frac{\eta_n}{\eta_c} + 2,378\right] \tag{67}$$

b) Wie in Abschnitt 2.1 bereits beschrieben, sollen für die Impulsaustauschgröße ε_m das Wandgesetz (1) und das Mittengesetz (2) jeweils bis zum gemeinsamen Schnittpunkt gelten. Mit zunehmender Reynolds-Zahl reicht dabei das Mittengesetz in immer größere Wandnähe. Die Unstetigkeit im ε_m/ν-Verlauf am Schnittpunkt der beiden Kurven, die mit abnehmender Reynolds-Zahl deutlicher wird, spielt für die hier vorliegenden Betrachtungen keine Rolle, da einerseits eine solche Unstimmigkeit in den gemachten Vereinfachungen untergeht und andererseits in den Berechnungen keine Differentiationen dieser Größe vorkommen. In diesem Zusammenhang sei jedoch darauf hingewiesen, daß durch das bei der Herleitung der Geschwindigkeitsverteilung Glg. (62) angewandte Prinzip der Überlagerung eine rückwärtige Bestimmung von ε_m mit Hilfe der Gleichung (10) einen kontinuierlichen Verlauf ergeben würde. Dieser stellte jedoch gegenüber den durch direkte Messungen bzw. durch theoretische Betrachtungen erhaltenen Gesezmäßigkeiten, die bei der Herleitung der Glg. (62) als Grundlage dienten, keine Verbesserung dar.

Der Schnittpunkt der beiden Kurven (1) und (2) läßt sich in recht guter Näherung über den gesamten hier betrachteten Re-Bereich durch die Beziehungen

$$\eta_s = 2,75\ \eta_c^{0,48} \tag{68a}$$

bzw.

$$\eta_s = 0,81\ Re^{0,43} \tag{68b}$$

angeben. Diese beiden Gleichungen gelten auch für parallele Platten und unter gewissen Annahmen für den äußeren Ringraumabschnitt ($r_c<r<r_2$). Dabei muß anstelle der üblicherweise mit dem hydrauli-

schen Durchmesser definierten Reynolds-Zahl eine sogenannte "äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl" Re_T eingesetzt werden, wie in den Abschnitten 3.2.2.1 und 3.5.1.1 beschrieben wird.

c) Für den Widerstandskoeffizienten ζ beim glatten Rohr wird die von Prandtl aufgestellte Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 2 \log (Re\sqrt{\zeta}) - 0{,}8 \qquad (69a)$$

den Wärmeübergangsberechnungen zugrundegelegt, während für die Näherungsrechnungen in den beiden folgenden Abschnitten (3.1.2.2 und 3.1.2.3) sowie für die angenäherte Wiedergabe der numerischen Ergebnisse in Form expliziter Gleichungen der Colebrook-Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 1{,}8 \log (Re/7) \qquad (69b)$$

der Vorzug gegeben wird. Für $Re > 10^4$ stimmen die Gleichungen (69a) und (69b) auf 1% Genauigkeit überein.

d) Der Wandabstand η_b , in dem die durch Molekularbewegung einerseits sowie durch turbulenten Austausch andererseits übertragenen Wärmemengen gleich sind, ergibt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\nu}\right)_{\eta=\eta_b} = \frac{1}{Pr^+} \qquad (q_t/q_m = 1) \qquad (70)$$

wie aus Glg. (7) hervorgeht. Für kleine Werte η geht das Wandgesetz (1) asymptotisch über in

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = 0{,}2\varkappa\eta_m\,(\eta/\eta_m)^5 = 3{,}1\cdot 10^{-5}\,\eta^5 \qquad (\text{für } \eta < \eta_m) \qquad (71a)$$

wie Reichardt nachweist /6/. Für $\eta > 20$ sind die Abweichungen von der Geraden

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = \varkappa\,(\eta - \tfrac{4}{3}\eta_m) = 0{,}4\,(\eta - 9{,}53) \qquad (\text{für } \eta > 20) \qquad (71b)$$

kleiner als 1%. Aus Glg. (70) folgt für diese Bereiche

$$\eta_b = 8\,(Pr^+)^{-0{,}2} \qquad (\text{für } \eta_b < 7{,}15) \qquad (72a)$$

(innerhalb der Grenzen $10 < Pr^+ < 10^3$ läßt sich η_b jedoch besser durch die Beziehung $\eta_b = 9{,}1(Pr^+)^{-0{,}22}$ wiedergeben, wie Abb.5 zeigt) und

$$\eta_b = \frac{2,5}{Pr^+} + 9,53 \qquad (\text{für } 20<\eta_b<\eta_s) \qquad (72b)$$

außerhalb davon ist η_b mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) aus Glg. (70) zu bestimmen. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Abb.5 dargestellt. Die darin eingezeichnete Gerade $\eta_b=20/(3Pr^+)$ entspricht im Gültigkeitsbereich des Mittengesetzes dem Maximalwert der Austauschgröße ε_m an der Stelle $y^+=0,5$. Für Prandtl-Zahlen, die kleiner sind als diejenigen am Schnittpunkt dieser Geraden mit den Kurven Re=konst., gilt für den gesamten Strömungsquerschnitt $q_t<q_m$.

3.1.2.2. DER WÄRMEÜBERGANG BEI UNVERÄNDERLICHEM WÄRMEFLUSS UND VERSCHWINDENDER PRANDTL-ZAHL

Für den Fall q_w=konst. und $Pr\to 0$ lassen sich die Wärmeübergangsgleichungen unter Zugrundelegung vereinfachter Geschwindigkeitsgesetze in geschlossener Form lösen. Die wandnormalen Wärmestromverteilungen q/q_w gelten für alle Prandtl-Zahlen.

a) Das Potenzgesetz

$$\varphi = (1-y^+)^{1/n} \qquad (73a)$$

ergibt nach Einsetzen in die Gleichung (53a) für die wandnormale Wärmestromdichteverteilung q/q_w:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int_0^{y^+} (1-y^+)^{1/n}\, y^+ dy^+}{y^+ \int_0^1 (1-y^+)^{1/n}\, y^+ dy^+}$$

$$= \frac{1}{y^+}\left\{1 - (1-y^+)^{1/n-1}\left[1 + (1+1/n)y^+\right]\right\} \qquad (74a)$$

Das Integral $\int_0^1 \varphi\, y^+ dy^+$ ist identisch mit der Größe $\varphi_m/2$, wie man sich mit Hilfe der Gleichung (22a) überzeugt, folglich gilt:

$$\varphi_m = \frac{2\,n^2}{(1+n)(1+2n)} \qquad (75a)$$

Für die auf die maximale Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_0)$ bezogene Nußelt-Zahl erhält man aus Glg. (19) die auch bei laminarer Strömung geltende Beziehung:

$$Nu_o = Nu \cdot \Theta_m = \frac{2}{\int_0^1 (q/q_w)\, dy^+} \tag{76}$$

Bei der Integration von q/q_w muß das in Glg. (74a) enthaltene Glied $(1-y^+)^{1/n}$ durch eine Reihe ersetzt werden, was zu folgendem Ergebnis führt:

$$\frac{1}{Nu_o} = \frac{1+n}{2n}\left[1 - \frac{n}{1+2n} - \frac{1/n}{2\cdot 2!} + \frac{(1/n)(1/n-1)}{3\cdot 3!} - \;.......\right.$$

$$\left. .....(-1)^{z+1}\frac{(1/n)(1/n-1)...(1/n-z)}{(z+2)(z+2)!}\right] \tag{77a}$$

b) Aus dem logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz $u/u^+ = (1/\varkappa)\ln\eta + c_2$ folgt für die auf den Maximalwert u_c bezogene Geschwindigkeitsverteilung

$$\varphi = \frac{2{,}5\ \ln\left[(1-y^+)\cdot \eta_c\right] + 5{,}5}{2{,}5\ \ln\ \eta_c + 5{,}5} \tag{73b}$$

wenn man die Konstanten $\varkappa$ und c_2 durch ihre Zahlenwerte sowie η durch den identischen Ausdruck $(1-y^+)\eta_c$ ersetzt. Die Größe η_c an der Stelle des Geschwindigkeitsmaximums ergibt sich nach Einsetzen des Widerstandgesetzes (69b) in Gleichung (176b) ($r_c=0$) zu:

$$\eta_c = \frac{Re}{10{,}2\ \lg(Re/7)} \tag{78}$$

Mit einer zu a) analog durchgeführten Berechnung erhält man (s.Anhang A 3.1.2.2):

$$\frac{q}{q_w} = \frac{(y^+ - 1/y^+)\ln(1-y^+) + y^+(\ln\eta_c + 1{,}7) - 1}{\ln\eta_c + 0{,}70} \tag{74b}$$

$$\varphi_m = \frac{\ln\eta_c + 0{,}7}{\ln\eta_c + 2{,}2} \tag{75b}$$

$$Nu_o = \frac{4\ln\eta_c + 2{,}8}{\ln\eta_c + 1{,}5} \tag{77b}$$

Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz gilt -im Gegensatz zum Potenzgesetz (73a)- nicht an der Wand, da dort Glg. (73b) gegen $-\infty$ geht. Dementsprechend liefert auch die Differentiation der Gleichung (74b) an der Wand nicht den bei Rohren generell vorgeschriebenen Wert $[d(q/q_w)/d(y^+)]_w = -1$ (s.Glg.57b). Trotzdem ist dieser Einfluß bei der Integration von q/q_w über den Gesamtquerschnitt nicht sehr groß.

Zum Vergleich sind in Tabelle 2 die mit den vereinfachten Geschwindigkeitsverteilungen Glg. (73a) bzw. (73b) gewonnenen Ergebnisse φ_m und Nu_o den mit dem Geschwindigkeitsgesetz (62) berechneten Werten gegenübergestellt. Dabei zeigt es sich, daß insbesondere das einfache logarithmische Geschwindigkeitsgesetz eine gute Übereinstimmung mit der genauen Rechnung liefert.

3.1.2.3. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR UNVERÄNDERLICHEN WÄRMEFLUSS UND KLEINE PRANDTL-ZAHLEN

Die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen (74a) bzw. (74b) für den Wärmestromdichteverlauf q/q_w bei der Randbedingung q_w=konst. lassen trotz ihrer verhältnismäßig einfachen Form für von null verschiedene Werte der Prandtl-Zahl eine analytische Berechnung der Nußelt-Zahl bei turbulenter Strömung nicht zu. Der Grund dafür liegt im Aufbau der Gleichungen (1) und (2) für die Impulsaustauschgröße ε_m. Selbst für den Fall, daß bei kleinen Prandtl-Zahlen nur mit dem Mittengesetz (2) gerechnet wird, läßt sich das in Glg. (19) enthaltene Integral nicht mehr lösen, ohne auf Reihenentwicklungen zurückzugreifen. Diese Schwierigkeit kann man durch einen Näherungsansatz für die q/q_w-Verteilung umgehen. Ein solcher wurde bereits von Reichardt /6/ eingeführt in der Form

$$q/q_w = (1 + c)\tau/\tau_w$$

wobei Reichardt die vom Wandabstand abhängige Größe c in erster Näherung gleich seinem Wert an der Wand, also c=0, setzt. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz in folgender Weise modifiziert:

$$q/q_w = \left[1 + c(1-y^+)\right]\tau/\tau_w \tag{79a}$$

Hier wird die Größe c als konstant über den Querschnitt angesehen, ihr Wert läßt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\frac{q/q_w}{\tau/\tau_w}\right)_o = \frac{\left[d(q/q_w)/d(y/d)\right]_o}{\left[d(\tau/\tau_w)/d(y/d)\right]_o} \tag{80}$$

bestimmen. Für das Rohr und die parallelen Platten bei symmetrischer Heizung geht diese Gleichung unter Beachtung von $\tau/\tau_w = y^+$ über in:

$$\left(\frac{q/q_w}{\tau/\tau_w}\right)_o = \left(\frac{d(q/q_w)}{dy^+}\right)_o \tag{81}$$

während Glg. (79a) die Form

$$q/q_w = [1 + c(1-y^+)]\, y^+ \tag{79b}$$

annimmt.
Damit erhält man für die Konstante c :

$$c = \left(\frac{d(q/q_w)}{dy^+}\right)_o - 1 \tag{82}$$

Die Größe $[d(q/q_w)/dy^+]_o$ ist durch die Gleichung (57b) bekannt:

$$\left(\frac{d(q/q_w)}{dy^+}\right)_o = -\left(\frac{q/q_w}{y^+}\right)_o + \frac{\left(\varphi\left[\Theta + (1-\Theta)\, F_o\right]\right)_o}{\int_0^1 \varphi\left[\Theta + (1-\Theta)\, F_o\right] y^+ dy^+} \tag{83}$$

An der Stelle $y^+ = y_o^+ = 0$ gilt $\varphi_o = \Theta_o = 1$ und unter Beachtung von $[(q/q_w)/y^+]_o = [(q/q_w)/(\tau/\tau_w)]_o = [d(q/q_w)/dy^+]_o$ folgt aus den Gleichungen (82) und (83):

$$c = \frac{1}{2\int_0^1 \varphi\left[\Theta + (1-\Theta)\, F_o\right] y^+ dy^+} - 1 \tag{84a}$$

Die Gleichungen (21) und (22) führen bei den Randbedingungen q_w=konst. und ϑ_w=konst. zu folgenden Vereinfachungen:

$$c = \frac{1}{\varphi_m} - 1 \qquad \text{(für } q_w\text{=konst.)} \tag{84b}$$

$$c = \frac{1}{\varphi_m \Theta_m} - 1 \qquad \text{(für } \vartheta_w\text{=konst.)} \tag{84c}$$

Die hier gegebene Herleitung gilt für beliebige Werte von F_0. Die praktische Anwendung bleibt jedoch auf den Fall q_w=konst. (F_0=1) beschränkt, da nur hierfür die Konstante c ohne Kenntnis des Temperaturverlaufs Θ berechnet werden kann, wie Glg. (84b) zeigt. Über die Güte der Näherung (79b) gibt Abb. 44 Aufschluß: Die dort für die Randbedingung ϑ_w=konst. eingezeichneten Kurven $(q/q_w)/(\tau/\tau_w)$ werden durch ihre Sehnen ersetzt.

Mit dem Ansatz (79b) läßt sich nun unter Beschränkung auf das Mittengesetz für die Impulsaustauschgröße -die Anwendbarkeit ist demnach auch auf entsprechend niedrige Prandtl-Zahlen beschränkt- eine Gleichung für die Nußelt-Zahl Nu_0 herleiten. Für das Rohr ist die in Glg. (2) enthaltene Größe x^+ identisch mit y^+ und durch Einsetzen von d_h/δ_w=2, y_0^+=0 und y_w^+=1 in Glg. (19) folgt:

$$Nu_0 = \frac{2}{\displaystyle\int_0^1 \frac{\left[1 + c\,(1-y^+)\right] y^+}{1 + Pr^+ \eta_c (\varkappa/3)(0{,}5+y^{+2})(1-y^{+2})}\, dy^+} \tag{85}$$

Das Integral im Nenner dieser Gleichung läßt sich geschlossen lösen (s.Anhang 3.1.2.3) und als Endergebnis für Nu_0 erhält man:

$$Nu_0 = 8 m_1 m_2 / N \tag{86a}$$

Dabei bedeuten:

$$N = (1+c)\ln\left|\frac{(0{,}75+m_2)(0{,}25+m_2)}{(0{,}75-m_2)(0{,}25-m_2)}\right| + 2c\, m_3 \operatorname{arctg}\frac{1}{m_3} + c\, m_4 \ln\left|\frac{m_4 - 1}{m_4 + 1}\right| \tag{87a}$$

$$m_1 = \frac{\varkappa}{3}\,\eta_c Pr^+ \tag{87b}$$

bzw. mit η_c aus Glg.(78) und $\varkappa$=0,4 : $m_1 = \dfrac{RePr^+}{76\lg(Re/7)}$ (87c)

$$m_2 = \sqrt{9/16 + 1/m_1} \tag{87d}$$

$$m_3 = \sqrt{m_2 - 0{,}25} \tag{87e}$$

und

$$m_4 = \sqrt{m_2 + 0{,}25} \tag{87f}$$

Auf dieselbe Weise läßt sich auch eine Gleichung für die Temperaturverteilung angeben. Die Differentialgleichung (11)

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_w \frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu}$$

geht unter Beachtung von

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_w = -\frac{q_w}{\lambda} = -\frac{q_w}{\varrho c_p u^+}\,\frac{\nu\varrho c_p}{\lambda}\,\frac{u^+}{\nu} = -\vartheta^+ Pr u^+/\nu$$

oder mit $\eta = yu^+/\nu$ in der Form $[\partial(\vartheta/\vartheta^+)/\partial(\eta Pr)]_w = -1$ über in

$$\frac{\partial(\vartheta/\vartheta^+)}{\partial(\eta Pr^+)} = -\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\,\frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu} \tag{88a}$$

In der wärmeleitenden Unterschicht ($Pr^+\varepsilon_m/\nu < 1$) gilt für nicht zu große Wandabstände ($q/q_w \cong 1$) für alle Reynolds- und Prandtl-Zahlen:

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \eta Pr = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\,\eta Pr^+ \tag{88b}$$

Die Integration der Gleichung (88a) - nach Einsetzen von q/q_w, ε_m/ν und $\eta=(1-y^+)\eta_c$ -

$$\int_{\vartheta_w/\vartheta^+}^{\vartheta/\vartheta^+} d(\vartheta/\vartheta^+) = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\eta_c Pr^+ \int_1^{y^+} \frac{[1+c(1-y^+)]y^+}{1+Pr^+\eta_c(\varkappa/3)(0,5+y^{+2})(1-y^{+2})}dy^+$$

führt auf das bereits gelöste Integral (A14). Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen folgt für den Temperaturverlauf:

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \frac{3\varepsilon_m/\varepsilon_h}{4\varkappa m_2}\left\{(1+c)\ln\left|\frac{(y^{+2}-0,25-m_2)(0,75+m_2)}{(y^{+2}-0,25+m_2)(0,75-m_2)}\right| + 2c\,m_3\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{m_3} - \operatorname{arctg}\frac{y^+}{m_3}\right)\right.$$

$$\left. + c\,m_4\ln\left|\frac{(y^++m_4)(1-m_4)}{(y^+-m_4)(1+m_4)}\right|\right\} \tag{88c}$$

Die mit dieser Gleichung berechnete Temperaturverteilung liegt etwas unterhalb des mit dem genauen numerischen Verfahren bestimmten Verlaufs (s. Abb.42). Der Grund hierfür ist der, daß einerseits das Abklingen der turbulenten Austauschgröße in Wandnähe nicht genügend berücksichtigt wird, und andererseits der Ansatz (79a) für die q/q_w-Verteilung etwas zu niedrige Werte liefert.

Eine bessere Näherung für den mittleren Teil des Strömungsquerschnitts erhält man durch die Integration der Gleichung (88a) innerhalb der Grenzen $\vartheta_0/\vartheta^+ \ldots \vartheta/\vartheta^+$ und $0 \ldots y^+$. In diesem Bereich kann der ε_m/ν-Verlauf aus dem Mittengesetz (2) durch $\varepsilon_m/\nu = 0{,}07\eta_c$ angenähert werden. Unter Beachtung von $(\vartheta_w-\vartheta_0)/\vartheta^+ = 2\eta_c Pr/Nu_o$ (s. Glg.210 bzw. 248b) ergibt sich für nicht zu große Mittenabstände y^+ :

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\,\eta_c\,Pr^+\left[\frac{2}{Nu_o} - \frac{y^{+2}}{1+0{,}07\eta_c Pr^+}\left(\frac{1+c}{2} - \frac{c}{3}y^+\right)\right] \tag{88d}$$

Aus Gleichung (85) geht hervor, daß bei kleinen Prandtl-Zahlen die Nußelt-Zahl in erster Linie vom Produkt $RePr^+$ abhängt: Nach Gleichung (78) ist η_c näherungsweise proportional der Reynolds-Zahl. Entsprechend gilt also für das in Glg.(85) enthaltene Glied $\eta_c Pr^+ \sim RePr^+$. Durch die Proportionalität $Nu_o \sim m_1 \sim RePr^+$ kommt weiterhin zum Ausdruck, daß der Exponent c des den turbulenten Anteil am Wärmeaustausch kennzeichnenden Gliedes $Nu_t \sim (RePr^+)^c$ nahe 1 sein muß. Dagegen ist zu erwarten, daß der Einfluß des Produktes $RePr^+$ auf die Temperaturverteilung $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ wesentlich geringer sein wird: Sieht man von dem Einfluß von Re in c ab, so folgt $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = f_1(y^+, RePr^+ = \text{konst.})$. Unter Beachtung von $y^+ = 1-\eta/\eta_c = 1-\eta Pr^+/(\eta_c Pr^+)$ geht diese Beziehung über in $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = f_2(\eta Pr^+, RePr^+ = \text{konst.})$. In der neuen unabhängigen Veränderlichen ηPr^+ ist die Reynolds-Zahl implizit in η enthalten. Aus diesem Grund muß die Funktion f_2 von dem Parameter $RePr^+$ nahezu unabhängig sein: $f_2(\eta Pr^+, RePr^+ = \text{konst.}) \approx f_2'(\eta Pr^+)$. Diese Aussage wird durch die in Abb.42 für $Pr^+ = 0{,}01 \ldots 0{,}1$ dargestellten genauen Ergebnisse bestätigt.

Die nach Gleichung (86a) berechneten Nußelt-Zahlen Nu_o^+ sind in Tab. 3 mit den aus dem genauen numerischen Verfahren gewonnenen Ergebnissen Nu_o für verschiedene Reynolds- und Prandtl-Zahlen verglichen. Die Zahlenwerte für Nu_o^+ liegen in dem angegebenen Re- und Pr^+-Bereich aus den weiter oben bereits genannten Gründen um zwischen 3% und 15% zu hoch.

Als untere Grenze für Nu_o ergibt sich aus Glg.(85) für Pr=0:

$$Nu_{o-min} = 12/(3+c) \tag{86b}$$

Für q_w=konst. geht diese Gleichung über in $Nu_{o-min} = 12/(2+1/\varphi_m)$. Darin ist die Tatsache richtig wiedergegeben, daß $Nu_o(Pr=0)$ mit zunehmender Reynolds-Zahl ebenfalls höhere Werte annimmt, während dies bei der Näherung c=0 nicht zum Ausdruck kommt.

Wendet man den Näherungsansatz (79a) für q/q_w auf den Fall laminarer Strömung an, so folgt für q_w=konst. mit $\varphi_m = 0{,}5$ aus den Gleichungen (84b) und (86b): c=1 und $Nu_o = 3$, der exakte Wert $Nu_o = 48/18 = 2{,}67$ ist also um 11% kleiner. Für ϑ_w=konst. erhält man mit $\Theta_m = 0{,}554$: c=2,61 und $Nu_o = 2{,}14$. Der exakte Wert $Nu_o = 2{,}025$ ist hierbei nur um 5% niedriger.

3.1.2.4. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR UNVERÄNDERLICHEN WÄRMEFLUSS BEI MITTLEREN BIS GROSSEN PRANDTL-ZAHLEN

Bei genügend hohen Prandtl-Zahlen kann die durch Molekularbewegung übertragene Wärmemenge gegenüber dem durch turbulenten Austausch übertragenen Anteil vernachlässigt werden. Nach Weglassen des Glieds 1 im Nenner der rechten Seite der Gleichung (88a) erhält man:

$$\int d(\vartheta/\vartheta^+) = -\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\int \frac{q/q_w}{\varepsilon_m/\nu}\,d\eta \qquad (89a)$$

Da für q_w=konst. die wandnormale Wärmestromdichteverteilung q/q_w nur wenig von der Schubspannungsverteilung τ/τ_w abweicht ($(q/q_w)/(\tau/\tau_w)$ folgt für $Re=3.10^4$ etwa dem in Abb.44 für $Pr^+=1000$ bei ϑ_w=konst. eingezeichneten Verlauf), kann näherungsweise als Lösung des Integrals auf der rechten Seite dieser Gleichung die im vollturbulenten Bereich für die Geschwindigkeitsverteilung gültige Beziehung

$$\int d(u/u^+) = \int \frac{\tau/\tau_w}{\varepsilon_m/\nu}\,d\eta = a\ \ln\eta + c$$

übernommen werden. Die Temperaturverteilung lautet demnach

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\left[a_t\ln\eta + c_t(Pr^+)\right] \qquad (89b)$$

Die Integrationskonstante c_t ist hierbei eine Funktion der Prandtl-Zahl. Der Proportionalitätsfaktor a_t ist wegen $(q/q_w)/(\tau/\tau_w)>1$ höher als a und zusätzlich von der Reynolds-Zahl abhängig (mit steigender Reynolds-Zahl -und unabhängig von Pr- nimmt der Quotient $(q/q_w)/(\tau/\tau_w)>1$ ab, wodurch auch a_t/a näher an den Wert 1 rückt). Die unteren Grenzen η der Gültigkeit der beiden logarithmischen Gesetze für die Geschwindigkeit einerseits und für die Temperatur andererseits sind ungefähr dieselben : $\eta_{min} \cong 30$. In der Form

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = a_t'\ \ln\eta + c_t'(Pr) \qquad (89c)$$

kann wegen $a_t' = a_t(\varepsilon_m/\varepsilon_h)$ der Quotient a_t'/a Werte kleiner 1 annehmen, da für $Pr > 1$ Werte $\varepsilon_m/\varepsilon_h < 1$ zu erwarten sind (s.Abb.11)

Mit Hilfe der letztgenannten Gleichung und dem logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz läßt sich für den Wärmeaustausch folgende Beziehung aufstellen /19/(in ähnlicher Form bereits von von Kármán vorgeschlagen):

$$St = \frac{\zeta/8}{a_t'/a + f_1(Pr)\sqrt{\zeta/8} + f_2(Pr)\zeta/8} \qquad (90)$$

3.2. PARALLELE PLATTEN, SYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

3.2.1. LAMINARE STRÖMUNG, EXAKTE BERECHNUNG FÜR q_w=konst.

Das Geschwindigkeitsprofil $\varphi = 1-y^{+2}$ ist identisch mit demjenigen bei laminarer Rohrströmung. Während jedoch beim Rohr die mittlere Geschwindigkeit $\varphi_m=1/2$ ist, gilt bei parallelen Platten $\varphi_m=2/3$. Für den Wärmeübergang erhält man analog zu Abschnitt 3.1.1:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{y^+}{2}(3 - y^{+2}) \qquad \Theta = 1 - \frac{6}{5}y^{+2} + \frac{1}{5}y^{+4}$$

$$\Theta_m = 136/175 = 0{,}777 \qquad Nu = 140/17 = 8{,}24$$

Die Nußelt-Zahl ist hier gegenüber dem Rohr um etwa den Faktor 2 größer. Dies liegt zunächst daran, daß auch die Quotienten d_h/r_w, die gemäß Glg. (19) in Nu linear eingehen, für die beiden betrachteten Geometrien im Verhältnss 1/2 zueinander stehen, andererseits ist aus dieser Tatsache zu erkennen, daß beim Rohr die günstigere Durchsatzverteilung $(d\dot{G}/\dot{G})_T = \frac{16}{3}\, y^+ (d\dot{G}/\dot{G})_{PP}$ durch den ungünstigeren q/q_w-Verlauf -als Folge der Abnahme der vom wandnormalen Wärmestrom durchflossenen Fläche- näherungsweise kompensiert wird++.

3.2.2. TURBULENTE STRÖMUNG

3.2.2.1. FORMELN FÜR STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, daß die Geschwindigkeitsprofile in rechteckigen Kanälen mit großem Seitenverhältnis nur unwesentlich von denjenigen im Rohr abweichen. Es gelten daher bei parallelen Platten die in Abschnitt 3.1.2.1 zusommengestellten Beziehungen mit Ausnahme folgender Abweichungen:

- In Glg. (64b) ist der Durchmesser d durch den Plattenabstand h zu ersetzen.
- Die mittlere Geschwindigkeit φ_m errechnet sich aus Glg.(194) mit $r_1/r_c = 1$ zu

$$\varphi_m = \frac{1}{u_c/u^+}\left[\frac{1}{\varkappa}\ln\eta_c - c_1\frac{\eta_n}{\eta_c} + 3{,}856\right] \tag{91}$$

- Die äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl lautet

$$Re_T = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mPP}}\,Re_{PP} \tag{92}$$

wobei φ_{mT} und φ_{mPP} die für Re_T berechneten Mittelwerte der Geschwindigkeit für das Rohr bzw. für die parallelen Platten bedeuten. Daraus erhält man für den Widerstandskoeffizienten

$$\frac{\zeta_{PP}}{\zeta_T^+} = \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mPP}}\right)^2\left[\frac{\lg\,(Re_{PP}/7)}{\lg\,(Re_T/7)}\right]^2 \tag{93}$$

Mit $\zeta_T^+ = \zeta_T(Re_{PP})$ ist dabei derjenige Widerstandskoeffizient bezeichnet, der sich für die Platten-Reynolds-Zahl $Re_{PP} = 2u_m h/\nu$ aus dem Widerstandsgesetz des Rohres Glg. (69b) ergibt. Die hier beschriebenen Beziehungen werden in Abschnitt 3.5.2 für den allgemeinen Fall des Ringspaltes hergeleitet, der die parallelen Platten, gekennzeichnet durch $r_1/r_2 = r_c/r_2 = 1$, mit einschließt. Die numerische Auswertung der Gleichung (93) ergibt $\zeta_{PP} \approx \zeta_T^+$, in Übereinstimmung mit dem Experiment. Für die in Tab.1 aufgeführten äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahlen Re_T erhält man die in Tab.4 angegebenen Reynolds-Zahlen $Re = Re_{PP}$.

++Die Teilbeiträge $d\dot{G}$ vom Gesamtdurchsatz $\dot{G}$ erhält man wie folgt:

$$\frac{(d\dot{G}/\dot{G})_T}{(d\dot{G}/\dot{G})_{PP}} = \frac{2\pi y^+ u_T dy^+/(\pi y_w^{+2} u_{mT})}{u_{PP} dy^+/(2 y_w^+ u_{mPP})} = \frac{16}{3}\, y^+$$

3.2.2.2. DER WÄRMEÜBERGANG FÜR q_w=konst. UND Pr=0

Analog zur Herleitung im Abschnitt 3.1.2.2 erhält man:
a) mit dem Potenzgesetz Glg. (73a)

$$\frac{q}{q_w} = 1 - (1-y^+)^{1+1/n} \tag{94a}$$

$$\varphi_m = \frac{1}{1+1/n} \tag{95a}$$

$$Nu_o = 4\,\frac{1+2n}{1+n} \tag{96a}$$

b) mit dem logarithmischen Gesetz Glg. (73b)

$$\frac{q}{q_w} = y^+ - \frac{(1-y^+)\ln(1-y^+)}{2{,}5\,\ln\eta_c+3} \tag{94b}$$

$$\varphi_m = \frac{\ln\eta_c+1{,}2}{\ln\eta_c+2{,}2} \tag{95b}$$

$$Nu_o = \frac{8\,\ln\eta_c+9{,}6}{\ln\eta_c+1{,}7} \tag{96b}$$

$$\eta_c = \frac{Re}{20{,}4\,\lg(Re/7)} \tag{97}$$

Die angegebenen wandnormalen Wärmestromdichteverteilungen gelten für alle Prandtl-Zahlen. In Tabelle 4 sind die so gewonnenen Nußelt-Zahlen Nu_o und die mittleren Geschwindigkeiten φ_m den mit dem genauen nummerischen Verfahren bestimmten Ergebnissen gegenübergestellt. Wie bereits beim Rohr ist auch hier die Übereinstimmung befriedigend.

3.2.2.3. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR q_w=konst. UND KLEINE PRANDTL-ZAHLEN

Nach dem bereits für das Rohr (Abschnitt 3.1.2.3) beschriebenen Verfahren ergibt sich im vorliegenden Fall

$$\frac{d(q/q_w)}{dy^+} = \frac{\varphi\left[\theta+(1-\theta)\ F_o\right]}{\int_0^1 \varphi\left[\theta+(1-\theta)\ F_o\right]dy^+}$$

$$c = \frac{1}{\int_0^1 \varphi\left[\theta+(1-\theta)\ F_o\right]dy^+} - 1$$

Die Vereinfachungen für q_w=konst. und ϑ_w=konst. führen auch bei parallelen Platten zu den Formeln (84b) und (84c). Für die Nußelt-Zahl Nu_o gelten die Gleichungen (86a) und (86b) nach Multiplikation mit dem Faktor 2, entsprechend dem gegenüber dem Rohr verdoppelten Wert für d_h/r_w. Dagegen ist die Gleichung (87c) für m_1 wegen η_c (vgl. Glg. (78) und (97)) durch 2 zu dividieren. In Gleichung (88d) ist das Glied $2/Nu_o$ durch $4/Nu_o$ zu ersetzen, Glg.(88c) gilt unverändert.
Die Anwendung des Näherungsverfahrens auf die laminare Strömung ergibt für den Fall q_w=konst. eine um 7% zu hohe Nußelt-Zahl Nu_o, während für ϑ_w=konst. Nu_o auf 5% genau ermittelt wird. Die Anpassung ist also hier noch etwas besser als beim Rohr. Dasselbe gilt auch für die turbulente Strömung, wie Tabelle 5 zeigt.

3.3. PARALLELE PLATTEN, ASYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

3.3.1. LAMINARE STRÖMUNG, EXAKTE BERECHNUNG FÜR q_w=konst.

Die parabolische Geschwindigkeitsverteilung lautet in den dimensionslosen Koordianten φ und $y^+=1-y/h$ (s. Abb. 1f):

$$\varphi = 4\ y^+(1-y^+)$$

Daraus erhält man:

$$\frac{q}{q_w} = y^{+2}(3-2y^+)$$

$$\theta = 1 - 2y^{+3} + y^{+4} \tag{98}$$

$$\theta_m = 26/35 = 0{,}743$$

$$Nu = 70/13 = 5{,}38 \tag{99}$$

Bei einseitigem Wärmeübergang ist der hydraulische Durchmesser wieder wie beim Rohr gleich dem doppelten Abstand, den die Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$ von der wärmetauschenden Wand trennt. Die Nußelt-Zahl ist hier größer als der entsprechend durch 2 dividierte Wert bei symmetrischem Wärmeaustausch. Dieses Verhalten läßt sich vorhersehen, da im vorliegenden Fall die Durchsatzverteilung bezüglich des Temperaturverlaufs günstiger ist: Das Geschwindigkeitsmaximum liegt näher zu dem Gebiet, in dem sich das Temperaturprofil aufbaut, während in dem einflußloseren Bereich $\partial\vartheta/\partial y \to 0$ auch $\varphi \to 0$ geht. Zusammen mit den Ausführungen in Abschnitt 3.2.1 ist daraus auch zu ersehen, daß die Nußelt-Zahl höher als beim Rohr liegen muß. An dieser Stelle sei ein interessanter, auch bei turbulenter Strömung für Pr=0 und alle Reynolds-Zahlen gültiger Zusammenhang beschrieben, der den asymmetrischen Wärmeaustausch bei parallelen Platten gegenüber allen anderen Wärmeübergangsbedingungen auszeichnet: Die Nußelt-Zahl Nu_o ist bei konstantem Wärmefluß für jedes symmetrische Geschwindigkeitsprofil

$$Nu_o = 4 \tag{100}$$

Um diesen Wert zu bestimmen, ist es dabei nicht notwendig, auf den detaillierten Rechnungsgang einzugehen, wie im folgenden gezeigt wird: Aus der Wärmebilanz für die Schicht dy

$$\rho c_p u \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\, dy = - \frac{\partial q}{\partial y}$$

folgt, daß $\partial q/\partial y$ durch die Symmetrie des Geschwindigkeitsprofils u ebenfalls symmetrisch zu $y=h/2$ ist, da der axiale Temperaturgradient $\partial\vartheta/\partial x$ für q_w=konst. nicht vom Wandabstand abhängt. Diese Tatsache hat zur Folge, daß q/q_w S-förmig um die Gerade $q/q_w=y^+$ verläuft, wobei Rotationssymmetrie um den Punkt $y^+=0,5$ $q/q_w=0,5$ besteht. Die Form des Geschwindigkeitsprofils bestimmt lediglich die Amplitude dieses S-Verlaufs, während das Integral $\int_0 (q/q_w)dy^+$ stets gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist, das in der Darstellung $q/q_w=f(y^+)$ durch die Geraden $y^+=y_w^+$, $q/q_w=0$ und $q/q_w=y^+$ gebildet wird. Diese Fläche hat die Größe 0,5 und mit $d_h/r_w=2$ erhält man aus Glg. (19) das obengenannte Ergebnis. Damit ist auch der Temperaturgradient an der Wand $(d\Theta/dy^+)_w$ unabhängig von den Strömungsverhältnissen und der Einfluß der Reynolds-Zahl bei turbulenter Strömung (Pr=0) kommt nur im Temperaturprofil innerhalb des Strömungsquerschnitts und damit verbunden in der Größe der Mischungstemperatur Θ_m zum Ausdruck. Ein zu dem hier beschriebenen Fall ähnliches Verhalten findet man bei der ebenen Platte, wie in Abschnitt 3.4.3 gezeigt wird.

Es ist der Vorteil der Nußelt-Zahl Nu_o gegenüber Nu, daß für sie in vielen Fällen eindeutige Aussagen möglich sind, die auf Nu durch den Einfluß der Mischungstemperatur Θ_m nicht in demselben Maß ausgedehnt werden können. Auch bei experimentellen Arbeiten, in denen die Flüssigkeitstemperatur an der für die Meßgenauigkeit günstigsten Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$ direkt gemessen wird, kann ohne Kenntnis von Θ_m nur Nu_o berechnet werden. Dagegen ist zur Berechnung des Wärmeaustausches im allgemeinen die Nußelt-Zahl Nu wertvoller, da durch die Wärmebilanz in Strömungsrichtung die Mischungstemperatur ϑ_m, jedoch nicht die Temperatur ϑ_o bekannt ist.

3.3.2. TURBULENTE STRÖMUNG

Die Berechnung der Nußelt-Zahl für den Fall q_w=konst. und Pr=0 ist bereits im vorangegangenen Abschnitt vorweggenommen. Der Vollständigkeit halber wird hier lediglich die aus dem Potenzgesetz -hier in der Form $\varphi=(2y^+)^{1/n}$ für $0<y^+<0,5$ bzw. $\varphi=[2(1-y^+)]^{1/n}$ für $0,5<y^+<1$ - ermittelte Flußverteilung q/q_w mitgeteilt:

$$\frac{q}{q_w} = 2^{1/n}(y^+)^{1+1/n} \qquad (\text{für } 0<y^+<0,5)$$

$$\frac{q}{q_w} = 1 - 2^{1/n}(1-y^+)^{1+1/n} \qquad (\text{für } 0,5<y^+<1)$$

Eine Näherungsrechnung für q_w=konst. und Pr<1 in der für das Rohr und den symmetrischen Wärmeaustausch bei parallelen Platten in Abschnitt 3.1.2.3 bzw. 3.2.2.3 beschriebenen Form ist beim asymmetrischen Wärmeaustausch nicht möglich.

3.4. DIE EBENE PLATTE

3.4.1. DER WANDNORMALE SCHUBSPANNUNGSVERLAUF

Der Verlauf der Schubspannung τ/τ_w kann durch Anwendung des Impulssatzes und, unabhängig davon, durch Integration der Grenzschichtgleichung ermittelt werden.

a) Anwendung des Impulssatzes
Die hier gegebene Herleitung folgt einer Darstellung von Schlichting /15/ und stellt eine Erweiterung in dem Sinne dar, daß nicht nur die Wandschubspannung $\tau_w(x)$ sondern auch der wandnormale Verlauf der Schubspannung $\tau(y)$ innerhalb der Strömungsgrenzschicht bestimmt werden.

Abbildung 6 zeigt einen Längsschnitt durch die hydraulische und thermische Grenzschicht. Die Abschnitte OB und CB sind so gelegt, daß längs ihnen die Geschwindigkeit u bzw. die Temperatur ϑ jeweils konstant sind. Zu jedem beliebigen Punkt B innerhalb der beiden Grenzschichten lassen sich so immer zwei eindeutig bestimmte Kurven u=konst. bzw. ϑ=konst. finden. Eine Ähnlichkeit der u-bzw. ϑ-Profile in Strömungsrichtung oder eine Proportionalität der hydraulischen und thermischen Grenzschichtdicken δ/δ_t=konst. ist nicht vorausgesetzt. Die Anwendung des Impulssatzes führt zu den in folgender Tabelle zusammengestellten Ergebnissen:

Abschnitt	Menge	x - Impuls	Enthalpie
AA1	$\int_0^h u_\infty dy$	$\rho\int_0^h u_\infty^2 dy$	$\rho c_p\int_0^h u_\infty \vartheta_\infty dy$
BB_1	$-\int_y^h u dy = -\int_0^h u dy + \int_0^y u dy$	$-\rho\int_0^h u^2 dy + \rho\int_0^y u^2 dy$	$-\rho c_p\int_0^h u\vartheta dy + \rho c_p\int_0^y u\vartheta dy$
A_1B_1	$-\int_0^h (u_\infty - u) dy$	$-\rho u_\infty\int_0^h (u_\infty - u) dy$	$-\rho c_p \vartheta_\infty \int_0^h (u_\infty - u) dy$
$u=u_1$: AOB $\vartheta=\vartheta_1$: ACB	$-\int_0^y u dy$	$-\rho u\int_0^y u dy$	$\int_0^x q_w dx - \rho c_p \vartheta \int_0^y u dy$
$\sum$=Kontroll-fläche	$\sum$Menge=0	$\sum$Impuls=Widerstand	$\sum$Enthalpie=Wärmestrom

Tabelle 6: Impuls- und Enthalpie-Fluß durch die in Abb.6 definierten Abschnitte der Kontrollfläche an der ebenen Platte

Der wandparallele Gesamtwiderstand W längs der Fläche AOB ist gleich der Summe des Impulsflusses in x-Richtung (Breite 1)

$$W(x,y) = \rho\int_0^h u(u_\infty - u)dy + \rho\int_0^y u^2 dy - \rho u\int_0^y u dy$$

Andererseits gilt für die wandparallele Schubspannung:

$$\tau(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x}$$

und somit erhält man nach Einführen von $\varphi = u/u_\infty$:

$$\frac{\tau}{\rho u_\infty^2} = \int_0^h (1-2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + 2\int_0^y \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \varphi\int_0^y \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy$$

$$= \int_y^h (1-2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + (1-\varphi)\int_0^y \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy \qquad (101a)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \int_0^h (1-2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy \qquad (101b)$$

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \frac{\varphi \int_{0}^{y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy - 2 \int_{0}^{y} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy}{\int_{0}^{h} (1-2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy} \tag{101c}$$

$$\frac{d(\tau/\tau_w)}{dy} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(1 - \int_{0}^{y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy\right)}{\int_{0}^{h} (1-2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy} \tag{101d}$$

b) Integration der Grenzschichtgleichung
Die Impulsgleichung in der für laminare und turbulente Strömung gültigen Form

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

kann unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{102}$$

$$v = -\int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

integriert werden:

$$\int_{y}^{h} \left[u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right] dy = \frac{1}{\varrho} \int_{\tau}^{0} \frac{\partial \tau}{\partial y}\, dy \tag{103}$$

Das zweite Glied im Integranten auf der linken Seite dieser Gleichung läßt sich nach Anpassung der unteren Integrationsgrenzen durch partielle Integration umformen:

$$\int_{y}^{h} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right] dy = \int_{0}^{h} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right] dy - \int_{0}^{y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right] dy$$

$$= u_\infty \int_{0}^{h} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \int_{0}^{h} u\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - u \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + \int_{0}^{y} u\frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Damit folgt aus Glg. (103):

$$-\frac{\tau}{\rho} = \int_0^h \left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} - u_\infty \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy + u\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy - \int_0^y u\,\frac{\partial u}{\partial x}dy - \int_0^y u\,\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$\frac{\tau}{\rho u_\infty^2} = \int_0^h (1-2\varphi)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}dy - \varphi\int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x}dy + 2\int_0^y \varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}dy$$

in Übereinstimmung mit Glg. (101a).

Bei laminarer Strömung stehen zwei einfache Näherungslösungen für die Geschwindigkeitsverteilung φ zur Verfügung, die aus einem Reihenansatz für den mit der Grenzschichtdicke δ dimensionsbefreiten Wandabstand y bestehen:

$$\varphi^{+} = 1{,}5\ (y/\delta) - 0{,}5\ (y/\delta)^3 \qquad (104a)$$

$$\varphi^{++} = 2\ (y/\delta) - 2\ (y/\delta)^3 + (y/\delta)^4 \qquad (104b)$$

Die Gleichung (104b) befriedigt zusätzlich zu den von den Gleichungen (104a) und (104b) erfüllten Bedingungen: $\varphi_w=0$, $\varphi_c=1$, $[d^2\varphi/(d(y/\delta))^2]_w=0$ auch noch $[d^2\varphi/(d(y/\delta))^2]_c=0$ und damit $[d\tau/d(y/\delta)]_c=0$. Beiden Gleichungen gemeinsam ist jedoch die ungenaue Wiedergabe der aus $\tau/\tau_w=[d\varphi/d(y/\delta)]/[d\varphi/d(y/\delta)]_w$ berechneten Schubspannungsverteilung. Für diese direkte Bestimmung von τ/τ_w sind die Gleichungen aber auch nicht gedacht. Die folgenden Ausführungen zeigen, daß sie zur Auswertung der Integralbeziehungen (101) recht brauchbare Ansätze darstellen. Hierzu muß Glg. (101c) zuerst umgeformt werden. Es gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\,\frac{d(y/\delta)}{dx} = -\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\,\frac{1}{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)\frac{d\delta}{dx} \qquad (105)$$

Durch Einsetzen in Glg.(101c) erhält man:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \frac{\varphi\displaystyle\int_0^{y/\delta}\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\left(\frac{y}{\delta}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\displaystyle\int_0^{y/\delta}\varphi\,\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\left(\frac{y}{\delta}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\displaystyle\int_0^1 (1-2\varphi)\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\left(\frac{y}{\delta}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)} \qquad (106)$$

Werden die aus φ^{+} und φ^{++} erhaltenen Größen, wie z.B. δ und τ, auf dieselbe Weise unterschieden wie die Geschwindigkeitsansätze, also δ^{+}, δ^{++} etc., so folgt nach Ausführung der einzelnen Integrationen:

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^{+} = 1 - \frac{1}{26}\left(\frac{y}{\delta^{+}}\right)^{3}\left[5\left(\frac{y}{\delta^{+}}\right)^{4} - 49\left(\frac{y}{\delta^{+}}\right)^{2} + 70\right] \tag{107a}$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^{++} = 1 - \frac{1}{74}\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{3}\left[56\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{6} - 252\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{5} + 270\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{4} + 462\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{3} - 882\left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^{2} + 420\right] \tag{107b}$$

Mit den beiden Beziehungen für die Wandschubspannung

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 (2\varphi-1)\,\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{108a}$$

und

$$\tau_w = \frac{\mu u_\infty}{\delta}\left(\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\right)_w \tag{108b}$$

ist die Grenzschichtdicke definiert. Die Geschwindigkeitsgesetze in der Form $\varphi(y/\delta)$ ergeben unter der Bedingung, daß sich ihr Gültigkeitsbereich bis zur Plattenvorderkante erstreckt[++]:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\eta_\delta}{\sqrt{Re_x}} \tag{109}$$

In Gleichung (109) bedeuten η_δ der dimensionslose Wandabstand

$$\eta = \sqrt{\frac{u_\infty}{x\nu}}\, y \tag{110}$$

an der Stelle $y=\delta$ und Re_x die mit der Lauflänge x gebildete Reynolds-Zahl

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

++ Bei der Integration der Differentialgleichung für δ ist formal am Plattenbeginn (x=0) δ=0 gesetzt, obwohl diese Stelle von der Betrachtung ausgeschlossen werden muß, da dort die Vereinfachungen, die zur Grenzschichtgleichung führten, nicht gelten.

Mit den beiden Näherungsansätzen φ^+ und φ^{++} erhält man:

$$\eta_\delta^{+} = \sqrt{280/13} = 4{,}64$$

und

$$\eta_\delta^{++} = \sqrt{1260/37} = 5{,}83$$

Die exakte Rechnung ergibt, daß an der Stelle $\eta = \eta_\delta^{++} = 5{,}83$ die Schubspannung τ/τ_w auf 1% abgeklungen ist, für $\eta = \eta_\delta^+$ dagegen beträgt dieser Wert 8,4% und an der üblicherweise als Grenzschichtdicke definierten Stelle $\eta_\delta = 5$, an der die Geschwindigkeit 99% ihres Endwertes erreicht, hat die Schubspannung τ noch 4,8% ihres Maximalwertes τ_w.

Bei turbulenter Strömung -die kritische Reynolds-Zahl Re_x liegt bei ca. $3{,}2\cdot 10^5$ - liefert das Potenzgesetz

$$\varphi = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \tag{111}$$

für das Integral in Glg. (108a) den Wert $n/[(1+n)(2+n)]$. Die Gleichung (111) gilt in großer Wandnähe nicht, da durch sie die laminare Unterschicht nicht berücksichtigt wird. Anstelle der Gleichung (108b) muß die Wandschubspannung τ_w durch Messungen bestimmt werden. Die von Blasius angegebene Beziehung

$$\frac{\tau_w}{\varrho u_\infty^2} = 0{,}0235 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{1/4}$$

ist bis zu Reynolds-Zahlen $Re_x = 10^7$ durch Versuche bestätigt. Damit ergibt sich die Grenzschichtdicke zu

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)_{turb.} = \frac{0{,}384}{Re_x^{\;1/5}}$$

sie wächst also mit der Potenz 4/5 des Abstandes x von der Plattenvorderkante an: $\delta_{turb.} \sim x^{4/5}$, während bei laminarer Strömung $\delta_{lam.} \sim x^{1/2}$ gilt.

Die Gleichung (106) führt unter Beibehaltung des Potenzgesetzes zu folgender Schubspannungsverteilung:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1+2/n} \tag{112}$$

Im Gegensatz zu den Ansätzen φ^+ und φ^{++} bei laminarer Strömung, die beide an der Stelle $y=\delta$ ohne Knick in $\varphi = 1$ übergehen, ergibt sich hier infolge der Beziehung $[d\varphi/d(y/\delta)]_c = 1/n$ für den τ/τ_w-Verlauf eine unstetige Krümmung an der Stelle $y=\delta$:
$[d(\tau/\tau_w)/d(y/\delta)]_c = -(1+2/n)$. Dagegen wird an der Wand die Bedingung $[d(\tau/\tau_w)/d(y/\delta)]_o = 0$ richtig wiedergegeben.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind für die laminare Strömung in Abb.7 dargestellt. Dabei sind die Funktionen $f(y/\delta)$ auf die einheitliche Koordinate $\eta=(y/\delta)\eta_\delta$ umgerechnet.

3.4.2. DER WANDNORMALE WÄRMESTROMDICHTEVERLAUF

Den beiden im vorangegangenen Abschnitt zur Herleitung der Schubspannungsverteilung τ/τ_w beschriebenen Verfahren entsprechen bei der Bestimmung des Wärmestromdichteverlaufs q/q_w die Anwendung der Wärmestromgleichung sowie die Integration der Temperaturgrenzschichtgleichung.

a) Anwendung der Wärmestromgleichung

In Abb. 6 folgt die Kontrollfläche im Abschnitt CB der Linie ϑ=konst.++ Die Teilbeiträge der durch die einzelnen Abschnitte hindurchströmenden Flüssigkeitsmengen sind für die Impuls- und für die Enthalpiebetrachtung dieselben, da den beiden Kontrollflächen die Eckpunkte A, A_1, B und B_1 gemeinsam sind (längs Ox_1 bzw. Cx_1 gilt $u=0$). Die Addition der Spalte "Enthalpie" in Tab.6 ergibt den Wärmefluß für die Kontrollfläche als Differenz der ein- und austretenden Wärmemengen:

$$Q = \rho c_p\left[\int_0^h u(\vartheta_\infty-\vartheta)dy + \int_0^y u\vartheta dy - \vartheta\int_0^y u dy\right] + \int_0^{x_c} q_w dx \qquad (113)$$

Die wandnormale Wärmestromdichte q längs der Fläche ϑ=konst. ist $q=-\partial Q/\partial x$ und durch Differentiation der Glg. (113) folgt mit $\varphi=u/u_\infty$:

$$\frac{q}{\rho c_p u_\infty} = -\int_0^h\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\vartheta_\infty-\vartheta) - \varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right]dy - \int_0^y\left(\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy + \vartheta\int_0^y\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy$$

$$= -\int_y^h\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\vartheta_\infty-\vartheta) - \varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right]dy + (\vartheta-\vartheta_\infty)\int_0^y\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy \qquad (114a)$$

Mit der dimensionslosen Temperatur

$$\bar{\Theta}_x(x,y) = \frac{\vartheta-\vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty-\vartheta_{wb}} \qquad (115)$$

- eine Ähnlichkeit der $\bar{\Theta}_x$-Profile ist an dieser Stelle noch nicht vorausgesetzt- erhält man daraus:

$$\frac{q}{\rho c_p u_\infty(\vartheta_{wb}-\vartheta_\infty)} = \int_y^h\left[(1-\bar{\Theta}_x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\bar{\Theta}_x}{\partial x}\right]dy + (1-\bar{\Theta}_x)\int_0^y\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy \qquad (114b)$$

++Als Beispiel ist hier der Fall q_w=konst.(m=1) gewählt. Der aus den Gleichungen (119),(121) und (131) folgende Temperaturverlauf $\vartheta=\vartheta_\infty-(\vartheta_\infty-\vartheta_{wb})(1-\Theta)(x/x_b)^{m+1/2}$ gestattet, den Ort konstanter Temperatur in der Flüssigkeit zu bestimmen. Für $d|\vartheta_\infty-\vartheta_w|/dx<0$ $(m<-0{,}5)$ beginnen alle ϑ=konst. an der Plattenvorderkante $(x_c=0)$, für $d|\vartheta_\infty-\vartheta_w|/dx>0$ $(m>-0{,}5)$ dagegen ist dies auf $\vartheta=\vartheta_\infty$ beschränkt, während der Ursprung der Kurven $\vartheta=\text{konst.}\neq\vartheta_\infty$ an der Stelle $x_c>0$ liegt.

sowie

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{\int\limits_0^y \left[(1-\bar{\theta}_x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\bar{\theta}_x}{\partial x}\right]dy - (1-\theta_x)\int\limits_0^y \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy}{\int\limits_0^h \left[(1-\bar{\theta}_x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\bar{\theta}_x}{\partial x}\right]dy} \tag{114c}$$

Für $\bar{\theta}_x=\varphi$ besteht Identität zwischen q/q_w und τ/τ_w wie der Vergleich mit Glg. (101c) zeigt; dies setzt nach Glg.(115) $\vartheta_w=\vartheta_{wb}$=konst. voraus.

b) Integration der Temperaturgrenzschichtgleichung

Die aus der Energiegleichung abgeleitete Temperaturgrenzschichtgleichung

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial q}{\partial y}$$

(bei laminarer Strömung kann die rechte Seite durch $a\partial^2\vartheta/\partial y^2$, bei turbulenter Strömung durch $a\frac{\partial}{\partial y}[(1+Pr^{+}\varepsilon_m/\nu)\partial\vartheta/\partial y]$ ersetzt werden) ergibt bei Integration in den Grenzen y und h mit Glg. (102)

$$\int\limits_y^h \left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\int\limits_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)dy = \frac{q}{\rho c_p} \tag{116}$$

Wie bei der Lösung der Gleichung (103) bereits beschrieben, gilt:

$$\int\limits_y^h \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\int\limits_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)dy = \vartheta_\infty\int\limits_0^h \frac{\partial u}{\partial x}dy - \int\limits_0^h \vartheta\frac{\partial u}{\partial x}dy - \vartheta\int\limits_0^y \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int\limits_0^y \vartheta\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Dies führt nach Einsetzen in Glg. (116) mit $\varphi=u/u_\infty$ zu Gleichung (114a).

3.4.3. DER WÄRMEÜBERGANG BEI UNVERÄNDERLICHER NUSSELT-ZAHL

Wie in Abschnitt 2.2.5 für allseits geschlossene zylindrische Begrenzung des Strömungsraumes, soll nun auch für den halbunendlichen Raum die Beschränkung auf diejenigen Fälle erfolgen, die zu einer von der Lauflänge x unabhängigen Nußelt-Zahl führen.

Die erste Voraussetzung, welche dabei zu erfüllen ist, betrifft die Bildung der Nußelt-Zahl selbst: Als charakteristische Länge muß eine Größe gewählt werden, die im wandnormalen Temperaturprofil reproduzierbar ist. Hierfür ist die Temperaturgrenzschichtdicke δ_t geeignet, die sich bei Temperaturverteilungen der Form $\Theta(y/\delta_t)$ aus vorgeschriebenen Randbedingungen und für $\bar{\Theta}(y)$ nach freier Wahl -etwa $y(\bar{\Theta}=0{,}99)$- ergeben. Grundsätzlich ist auch jede aus diesen Größen durch Multiplikation mit einem beliebigen Faktor gebildete Länge zulässig. Im Umfang der hier die ebene Platte betreffenden Ausführungen wird folgende Festlegung getroffen:

$$Nu_o = \frac{\alpha \delta_t}{\lambda} \tag{117}$$

Für den Wärmestromdichteverlauf q/q_w und die Temperaturverteilung $\Theta=(\vartheta-\vartheta_w)/(\vartheta_\infty-\vartheta_w)$ gilt wieder die Forderung, daß sie von x unabhängig sind. Dies führt mit Ausnahme des Proportionalitätsfaktors c unter Beachtung von $\vartheta_o=\vartheta_{oa}=\vartheta_\infty$ bzw. $\Theta_{xo}=1$ zu den in den Gleichungen (24) bis (29) enthaltenen Beziehungen:

$$\Theta_x \left(\frac{x}{x_b}, \frac{y}{\delta_t}\right) = \frac{\vartheta-\vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty-\vartheta_{wb}} \tag{118}$$

$$\Theta \left(\frac{y}{\delta_t}\right) = \frac{\vartheta-\vartheta_w}{\vartheta_\infty-\vartheta_w} \tag{119}$$

$$\Theta_x \left(\frac{x}{x_b}, \frac{y}{\delta_t}\right) = (1-\Theta_{xw})\, \Theta + \Theta_{xw} \tag{120}$$

$$\Theta_{xw} \left(\frac{x}{x_b}\right) = \frac{\vartheta_w-\vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty-\vartheta_{wb}} \tag{121}$$

Für die Konstante c erhält man:

$$c = (1-\Theta_{xw}) = \left(\frac{q_w}{q_{wb}}\right)\left(\frac{\delta_t}{\delta_{tb}}\right) \tag{122}$$

Die Bezugslänge x_b ist ein beliebig wählbarer Wert der Lauflänge x, mit Ausnahme von $x=x_a=0$. An der Stelle $x=x_b$ gilt $\vartheta_w=\vartheta_{wb}$ bzw. $\Theta_{xw}=0$. Der wandparallele Temperaturgradient $\partial\bar{\Theta}_x/\partial(x/x_b)$ läßt sich durch partielle Differentiation der Gleichung (118) berechnen:

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_x}{\partial(x/x_b)} = \frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/x_b)} + \frac{\partial\Theta_x}{\partial(y/\delta_t)} \cdot \frac{\partial(y/\delta_t)}{\partial(x/x_b)}$$

$$= \frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/x_b)} - \left(\frac{x_b}{\delta_t}\right)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\left(\frac{d\delta_t}{dx}\right)\frac{\partial\Theta_x}{\partial(y/\delta_t)}$$

Für den hier vorliegenden Fall ähnlicher Temperaturprofile geht diese Gleichung mit Glg. (120) über in

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_x}{\partial(x/x_b)} = (1-\Theta)\,\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)} - \left(\frac{x_b}{\delta_t}\right)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\left(\frac{d\delta_t}{dx}\right)(1-\Theta_{xw})\,\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)} \qquad (123)$$

Ersetzt man in Glg. (114c) den Wandabstand y durch y/δ_t, so folgt mit Hilfe der Gleichungen (105), (120) und (123):

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{\int_0^{y/\delta_t}\{\ldots\}\,d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) + (1-\Theta)(1-\Theta_{xw})\left(\frac{x_b}{\delta}\right)\left(\frac{d\delta}{dx}\right)\int_0^{y/\delta_t}\left(\frac{y}{\delta}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\,d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)}{\int_0^1\{\ldots\}\,d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)} \qquad (124)$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer in den beiden Integralen lautet:

$$\{\ldots\} = \Bigg\{(1-\Theta)(1-\Theta_{xw})\left(\frac{x_b}{\delta}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)\frac{d\delta}{dx}\,\frac{d\varphi}{d(y/\delta)} + \varphi\Bigg[(1-\Theta)\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)} - \left(\frac{x_b}{\delta_t}\right)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\delta_t}{dx}(1-\Theta_{xw})\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\Bigg]\Bigg\}$$

Die x-abhängigen Größen müssen aus dieser Gleichung durch Kürzung entfernt werden. Dies läßt sich unter folgenden Voraussetzungen durchführen:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \text{konst.} \qquad (125)$$

$$\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)} = -\,n\left(\frac{x_b}{\delta_t}\right)\left(\frac{d\delta_t}{dx}\right)(1-\Theta_{xw}) \qquad (126)$$

wobei n eine Konstante ist.

Die endgültige Form der Gleichung (124) lautet:

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{Z}{\int\limits_0^1 \left\{\varphi\left[n(1-\Theta)+\frac{y}{\delta_t}\cdot\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\right]-(1-\Theta)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right\}d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)} \tag{128}$$

mit

$$Z = \int\limits_0^{y/\delta_t}\left\{\varphi\left[n(1-\Theta)+\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\right]-(1-\Theta)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right\}d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

$$+(1-\Theta)\int\limits_0^{y/\delta_t}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\,d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

Die Wärmestromdichte an der Wand ergibt sich zu

$$q_w = \frac{\lambda Nu_o(\vartheta_w-\vartheta_\infty)}{\delta_t} = \varrho c_p u_\infty(\vartheta_w-\vartheta_\infty)\frac{d\delta_t}{dx}\int\limits_0^1\left\{\varphi\left[n(1-\Theta)+\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\right]\right.$$

$$\left.-(1-\Theta)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right\}d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \tag{129}$$

Die Integration der Gleichung (126) liefert den für Nu_o=konst. vorgeschriebenen Temperaturverlauf der Wand:

$$-\int\limits_0^{\Theta_{xw}}\frac{d\Theta_{xw}}{1-\Theta_{xw}} = n\int\limits_{\delta_{tb}}^{\delta_t}\frac{d\delta_t}{\delta_t}$$

$$\Theta_{xw} = 1-\left(\frac{\delta_t}{\delta_{tb}}\right)^n$$

Bei laminarer Strömung gilt $\delta \sim x^{1/2}$, die Gleichung (125) fordert denselben Zusammenhang auch für die thermische Grenzschichtdicke: $\delta_t \sim x^{1/2}$, damit wird der Temperaturverlauf der Wand

$$\theta_{xw} = 1 - \left(\frac{x}{x_b}\right)^{n/2}$$

Die zugehörige Verteilung der Wärmestromdichte an der Wand ergibt sich aus Glg. (122) zu

$$\frac{q_w}{q_{wb}} = \left(\frac{x}{x_b}\right)^{(n-1)/2}$$

Führt man, wie bei der Kanalströmung mit konstantem Druckabfall, als Exponenten der Wärmeflußverteilung die Bezeichnung m ein, so folgen mit $m=(n-1)/2$ die endgültigen Beziehungen für q_w/q_{w_b} bzw. θ_{xw}:

$$\frac{q_w}{q_{wb}} = \left(\frac{x}{x_b}\right)^{m} \tag{130}$$

und

$$\theta_{xw} = 1 - \left(\frac{x}{x_b}\right)^{m+1/2} \tag{131}$$

Diese beiden Gleichungen sind in Abb.10 dargestellt. Die Überlegungen, die in Abschnitt 2.2.5 mit Hilfe der Abb.2 zu den Aussagen über den Zusammenhang F_0-Nu_0 geführt haben, können im vorliegenden Fall sinngemäß angewandt werden: An die Stelle des Parameters F_0 tritt hier die Größe $-d\theta_{xw}/d(x/x_b)=(0{,}5+m)(x/x_b)^{m-0{,}5}$.

Trennt die ebene Platte zwei Teilströme verschiedener Temperatur ($\vartheta_{1\infty} \neq \vartheta_{2\infty}$) und geht man weiterhin davon aus, daß eine gleichförmige Anströmung $u_{1\infty}, \vartheta_{1\infty}$ bzw. $u_{2\infty}, \vartheta_{2\infty}$ -trotz damit bedingter Notwendigkeit einer wärmeisolierenden Trennwand zwischen den beiden Teilströmen auch stromauf der Plattenvorderkante- gewährleistet ist (etwa durch Mitbewegen der Trennwände), so können die beiden Bedingungen (130) und (131) bei Gleichstrom, nicht jedoch bei Gegenstrom erfüllt werden: Nach Abb. 10 läßt sich bei letzterem keine verträgliche Kombination von Temperatur- und Wärmestromdichteverteilung an der Wand finden.

Die Wärmestromdichte an der Wand

$$q_{w1} = -\,q_{w2} = k\,(\vartheta_{2\infty} - \vartheta_{1\infty})$$

wird bei Gleichstrom unter Beachtung der Gleichungen (117) und (46b)

$$q_{w1} = \frac{(\vartheta_{2\infty} - \vartheta_{1\infty})}{\left(\frac{\delta_t}{Nu\cdot\lambda}\right)_1 + \frac{s}{\lambda_w} + \left(\frac{\delta_t}{Nu\cdot\lambda}\right)_2}$$

Daraus folgt mit $\delta_t \sim x^{1/2}$ für $s/\lambda_w \ll \left(\frac{\delta_t}{Nu}\right)_1 + \left(\frac{\delta_t}{Nu}\right)_2$:

$$\left(\frac{q_w}{q_{wb}}\right)_1 = \left(\frac{q_w}{q_{wb}}\right)_2 = \left(\frac{x}{x_b}\right)^{-1/2}$$

Durch Vergleich mit den Gleichungen (130) und (131) geht hervor, daß diese Beziehung der Randbedingung $\Theta_{xw}=1$ entspricht, die Wandtemperatur bleibt also konstant, wie zu erwarten war. Doch auch dieser Einzelfall ist nur von theoretischem Interesse, die praktische Anwendung der Gleichungen (130) und (131) bleibt auf die Fälle aufgeprägter Temperatur bzw. aufgeprägten Wärmestroms beschränkt.

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahl α bzw. der Nußelt-Zahl

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$$

aus Nu_0 ist noch die Kenntnis der Temperaturgrenzschichtdicke δ_t notwendig. Aus Gleichung (129) kann diese durch Integration mit der Anfangsbedingung $x=0$, $\delta_t=0$ bestimmt werden (wie bei der Strömungsgrenzschicht gilt der so gewonnene Verlauf von δ_t im näheren Bereich der Plattenverderkante nicht). Unter Berücksichtigung von $Re_x Pr = \varrho u_\infty c_p x/\lambda$ erhält man:

$$\frac{\delta_t}{x} = \sqrt{\frac{2Nu_o}{Re_x Pr \int_0^1 \left\{\varphi\left[n(1-\Theta)+\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\right]-(1-\Theta)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)}} \quad (132)$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß bei Ähnlichkeit der Temperaturprofile stets $\delta_t \sim \sqrt{x}$ ist. Da andererseits δ_t/δ=konst. vorausgesetzt wurde, erhält man von der Lauflänge x unabhängige Nußelt-Zahlen $Nu=\alpha\delta_t/\lambda$ nur bei laminarer Strömung, da bei turbulenter Strömung $\delta_t \sim x^{4/5}$ gilt. Das Verhältnis von hydraulischer zu thermischer Grenzschichtdicke läßt sich nun aus den Gleichungen (109) und (132) berechnen:

$$\frac{\delta}{\delta_t}(Pr,n) = \eta_\delta \sqrt{\frac{Pr}{2Nu_o} \int_0^1 \left\{\varphi\left[n(1-\Theta)+\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}\right]-(1-\Theta)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)} \quad (133)$$

Die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante gebildete örtliche Nußelt-Zahl Nu_x ist damit bekannt:

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{\alpha \delta_t}{\lambda} \frac{\delta/\delta_t}{\delta/x} = \frac{\sqrt{Re x}}{\eta_\delta} (\delta/\delta_t)\, Nu_o \quad (134a)$$

Definiert man eine mittlere Wärmeübergangszahl

$$\alpha_m = \frac{1}{x}\int_0^x \alpha \, dx$$

mit deren Hilfe der Wärmeaustausch einer Platte bis zur Stelle x berechnet werden kann, so folgt aus Glg. (134a) $\alpha_m = 2\alpha$ oder

$$Nu_{xm} = 2\; Nu_x \tag{134b}$$

als mittlere Nußelt-Zahl.

Als Näherungsansätze für den Temperaturverlauf stehen wiederum zwei Gleichungen zur Verfügung

$$\Theta^{+} = 1{,}5\;(\frac{y}{\delta_t^{+}}) - 0{,}5\;(\frac{y}{\delta_t^{+}})^3 \tag{135a}$$

und

$$\Theta^{++} = 2\;(\frac{y}{\delta_t^{++}}) - 2\;(\frac{y}{\delta_t^{++}})^3 + (\frac{y}{\delta_t^{++}})^4 \tag{135b}$$

die als Folge der gleichwertigen Randbedingungen den Näherungen für die Geschwindigkeitsverteilung φ^{+} und φ^{++} entsprechen (s. Glg. (104a) bzw. (104b)).

Für die nun folgenden Berechnungen werden die Ansätze φ^{+} und Θ^{+} angewandt, da mit φ^{++} bzw. Θ^{++} die Ergebnisse zu unhandlich ausfallen und durch die dabei erzielten Verbesserungen nicht gerechtfertigt werden.

Mit der durch die Gleichung (135a) festgelegten Temperaturgrenzschichtdicke δ_t^{+} ergibt sich eine Nußelt-Zahl von

$$Nu_o^{+} = \left[\frac{d\Theta^{+}}{d(y/\delta_t^{+})}\right]_w = 1{,}5 \tag{136}$$

während der Ansatz Glg. (135b) mit $\delta_t^{++} > \delta_t^{+}$ zu $Nu_o^{++} = 2{,}0$ führt. Der letztgenannte Wert $Nu_o^{++} = 2$ deckt sich mit dem in Abschnitt 3.3.1. für parallele Platten bei einseitigem Wärmeübergang und q_w=konst. gefundenen Wert $Nu_o = 4$, wenn man berücksichtigt, daß dort $d_h/r_w = 2$ und bei der ebenen Platte $d_h/r_w = 1$ ist. Die Erklärung für diesen Zusammenhang ist die, daß auch bei der ebenen Platte die Wärmestromdichte q/q_w einen S-förmigen Verlauf aufweist und nun speziell beim Ansatz Θ^{++} die Fläche unter der Kurve $(q/q_w)^{++}$ gleich derjenigen unter der Geraden $q/q_w = 1-(y/\delta_t^{++})$ in den Grenzen $y/\delta_t^{++} = 0$ und $y/\delta_t^{++} = 1$ ist. Eine Rotationssymmetrie wie im Fall paralleler Platten existiert jedoch sowohl für $(q/q_w)^{++}$ als auch für den nach der exakten Rechnung ermittelten (q/q_w)-Verlauf nur näherungsweise. In diesem Zusammenhang sei noch darauf hingewiesen, daß nach der von Pohlhausen /17/ für ϑ_w=konst. durchgeführten exakten Berechnung bei Pr=1 die oben genannte Flächengleichheit für $\eta_\delta = 2/0{,}332 = 6{,}024$ erfüllt wird, wie aus Glg.(134a) mit $Nu_x(Pr=1) = 0{,}332\;\sqrt{Re_x}$ folgt. Die mit diesem Wert η_δ gebildete Gerade $q/q_w = 1-\eta/\eta_\delta$ ist in Abb.7 mit eingezeichnet und verdeutlicht die geringe Abweichung des q/q_w - bzw.

τ/τ_w-Verlaufes von der Rotationssymmetrie um den Punkt $q/q_w = \tau/\tau_w = 0{,}5 - \eta = \eta_\delta/2 = 3{,}012$.++

In der nun folgenden Berechnung der Funktion $\delta/\delta_t\,(Pr, m)$ mit Hilfe der Näherungen φ^+ und Θ^+ müssen bei der Auswertung des in Glg. (133) enthaltenen Integrals die beiden Fälle $\delta/\delta_t > 1$ und $\delta/\delta_t \leq 1$ getrennt behandelt werden:

a) $\delta/\delta_t > 1 \quad \left(Pr \geq \frac{1}{2(1+m)} \right)$

Mit den Gleichungen (104a) und (135a) erhält man:

$$\int_0^1 \left\{ \varphi\left[(2m+1)(1-\Theta^+) + \left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta^+}{d(y/\delta_t)}\right] - (1-\Theta^+)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left[1{,}5\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - 0{,}5\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^3\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left((1+2m)\left[1-1{,}5\left(\frac{y}{\delta_t}\right)+0{,}5\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right] + 1{,}5\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\left[1-\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^2\right]\right)\right.$$

$$\left. - 1{,}5\frac{\delta_t}{\delta}\left[1-1{,}5\left(\frac{y}{\delta_t}\right)+0{,}5\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\left[1-\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^2\right]\right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

$$= \frac{6}{280}\,(1+m)\frac{\delta_t}{\delta}\left[14 - \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2\right] \tag{137}$$

Unter Berücksichtigung von $Nu_0{}^+/\eta_\delta{}^{+2} = 39/560$ ergibt sich nach Einsetzen der Glg. (137) in Glg. (133) die Bestimmungsgleichung für δ/δ_t:

$$Pr = \frac{13}{2(1+m)\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^3\left[14-\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2\right]} \tag{138a}$$

Unter der Voraussetzung $(\delta_t/\delta)^2 \ll 14$ geht diese Beziehung über in

$$\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^+ = \sqrt[3]{\frac{28}{13}\,(1+m)\,Pr} \approx \sqrt[3]{2(1+m)\,Pr} \tag{139a}$$

Eine zweite Näherung, die dann auch den Bereich $2(1+m)Pr \to 1$ besser erfaßt, erhält man durch Substitution des Gliedes $(\delta_t/\delta)^2$ in Gleichung (138a) mit Hilfe der ersten Näherung (139a):

$$\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^+ = \sqrt[3]{2(1+m)\,Pr\left\{14 - \left[2(1+m)\,Pr\right]^{-2/3}\right\}/13} \tag{139b}$$

++Dieses Verhalten ist weiterhin der Grund dafür, daß bei formaler Anwendung des Näherungsansatzes (79b) – wegen $\varphi_m = \Theta_m = 1$ wird gemäß Glg. (84c) $c = 0$ und damit $q/q_w = y^+ = 1 - y/\delta_t = 1 - \eta/\eta_\delta$ – die Nußelt-Zahl Nu_0 ebenfalls den Wert 2 ergibt, obwohl dieses Verfahren im vorliegenden Fall sinnvoller Grundlagen entbehrt.

Für die örtliche Nußelt-Zahl Nu_x gem. Glg.(134a) folgt daher:

$$Nu_x^+ = 0{,}324 \sqrt[2]{Re_x} \sqrt[3]{2(1+m)Pr\left\{14-\left[2(1+m)Pr\right]^{-2/3}\right\}/13} \qquad (140a)$$

Die aus der exakten Lösung für konstante Wandtemperatur abgeleitete Näherung $Nu_x=0{,}332 \sqrt[2]{Re_x} \sqrt[3]{Pr}$ wird durch vorstehende Gleichung für $m=-1/2$ und bei Vernachlässigung des Gliedes $[2(1+m)Pr]^{-2/3}$ wiedergegeben. Die Prandtl-Zahl, für die sich der Verlauf der thermischen und hydraulischen Grenzschichtdicke deckt, kann aus Gleichung (139b) ermittelt werden:

$$Pr(\delta=\delta_t) = \frac{0{,}5}{1+m} \qquad (141)$$

Hieraus erkennt man, daß für Pr=1 die Grenzschichtdicken für Temperatur und Geschwindigkeit nur dann übereinstimmen, wenn $m=-1/2$, d.h. ϑ_w=konst. ist (vorausgesetzt natürlich, daß δ und δ_t in derselben Weise definiert sind).

b) $\delta/\delta_t \leq 1 \quad \left(Pr < \frac{1}{2(1+m)}\right)$

Hier muß bei der Integration innerhalb der Grenzen $y/\delta_t=0$ und $y/\delta_t=1$ berücksichtigt werden, daß für $y/\delta_t > \delta/\delta_t$ die Geschwindigkeit $\varphi=1$ ist:

$$\int_0^1 \{\ldots\}\, d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) = \int_0^{\delta/\delta_t} \{\ldots\}\, d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) + \int_{\delta/\delta_t}^1 \left[(1-\Theta)\left(m-\frac{y}{\delta_t}\cdot\frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)}\right) + \frac{y}{\delta_t}\cdot\frac{d\Theta^+}{d(y/\delta_t)}\right] d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

(Der Inhalt der geschweiften Klammer ist identisch mit demjenigen in Glg.137.) Die Auflösung dieser Gleichung liefert:

$$Pr = \frac{13\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^2}{2(1+m)\left[35-35\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)+14\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^2-\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^4\right]} \qquad (138b)$$

Führt man wiederum für das Glied $(\delta/\delta_t)^4$, welches nur bei Werten 2(1+m)Pr nahe eins von Bedeutung ist, die dort gültige Näherung (139a) ein, so läßt sich das Verhältnis der Grenzschichtdicken δ/δ_t explizit angeben:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \frac{5}{4\left[\frac{13}{28(1+m)Pr}-1\right]}\left(\sqrt[2]{1+\frac{8}{5}\left\{1-\frac{\left[2(1+m)Pr\right]^{4/3}}{35}\right\}\left[\frac{13}{28(1+m)Pr}-1\right]}-1\right) \qquad (139c)$$

Die damit berechenbare Nußelt-Zahl

$$Nu_x^+ = \frac{0{,}405\sqrt{Re_x}}{13/\left[28(1+m)Pr\right]}\left(\sqrt{1+\frac{8}{5}\left\{1-\frac{\left[2(1+m)Pr\right]^{4/3}}{35}\right\}\left[\frac{13}{28(1+m)Pr}-1\right]}-1\right)$$

(140b)

stimmt für m=-0,5 sehr gut mit der von E.Eckert /16/ durch Integration der Grenzschichtgleichung und Anwendung auf den Fall ϑ_w=konst., Pr<0, $\varphi=\varphi^+$ und $\Theta=\Theta^+$ hergeleiteten Beziehung

$$\left(Nu_x^{\ +}\right)_E = \frac{\sqrt{PrRe_x}}{1{,}55\sqrt{Pr}+3{,}09\sqrt{0{,}372-0{,}15\,Pr}}$$

überein, ohne daß die beiden Gleichungen jedoch identisch sind.Die durch daselbe Verfahren wie Eckert von Kutateladze /18/ für ϑ_w=konst., Pr<0,$\varphi=\varphi^{++}$ sowie $\Theta=\Theta^{++}$ aufgestellte Formel

$$\left(Nu_x^{\ ++}\right)_K = 0{,}55\sqrt{(1-Pr^{1/3})\ PrRe_x}$$

ist mit den beiden vorstehend erwähnten Gleichungen für kleine Prandtl-Zahlen (Pr<0,1) ebenfalls in guter Übereinstimmung, während mit Annäherung an Pr=1 die bei der Herleitung vernachlässigten Glieder zweiter und höherer Ordnung von δ/δ_t zu Abweichungen führen. Für (1+m)Pr > 4 kann in Glg. (140a) das Glied $[2(1+m)Pr]^{-2/3}$, und für (1+m)Pr < 0,4 in Glg. (140b) das Glied $[2(1+m)Pr]^{4/3}$ entfallen.

In Abb.8 ist der Verlauf der Kurve δ_t/δ gemäß den Gleichungen (138a) und (138b) in Abhängigkeit von 2(1+m)Pr dargestellt. Die dabei zum Vergleich in das Gebiet 2(1+m)Pr<1 verlängerte Gerade $[2(1+m)Pr]^{1/3}$ macht die Abweichungen von der für 2(1+m)Pr>1 zulässigen Näherung deutlich.

Die für m=-0,5 (ϑ_w=konst.) aus den Gleichungen (138a),(138b) und (134a) berechneten Nußelt-Zahlen Nu_x^+ sind in Tabelle 7 den von Pohlhausen (neuerdings für Pr<0,6 ergänzt, s./18/) nach dem exakten Verfahren ermittelten Werten in der Form $Nu_x/(Re_x^{1/2}Pr^{1/3})$ gegenübergestellt. Die Übereinstimmung erweist sich als recht befriedigend, wobei allerdings -bedingt durch eine leichte Streuung der unter a) aufgeführten Wertepaare- die gegenseitigen Abweichungen etwas unregelmäßig über den Bereich der Prandtl-Zahlen verteilt sind.

Für Temperatur- und Wärmeflußdichteverteilungen der in Glg.(130) bzw. (131) angegebenen Form wurden bereits von Sugawara /20/ und Sparrow / Lin /4/ exakte Lösungen ermittelt. Nach numerischer Auswertung im Bereich $0{,}7 \leq Pr \leq 100$ und $0 \leq m \leq 10$ fand Sparrow, daß sich die Ergebnisse auf 2% genau durch die Gleichung

$$\frac{Nu_x}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} = c(1+m)^{3/8}$$

annähern lassen, wobei c ein schwach von der Prandtl-Zahl abhängiger Proportionalitätsfaktor ist, der Werte zwischen 0,45716 für $Pr=0{,}7$ und 0,46363 für $Pr=100$ annimmt. Innerhalb der angeführten Grenzen für m und Pr gilt $Pr \geq 0{,}5/(1+m)$ und somit erhält man für die hier abgeleiteten Beziehungen, wenn man sich auf die Näherung $Nu_x^+ = 0{,}324 \sqrt[2]{Re_x} \sqrt[3]{2(1+m)Pr}$ beschränkt:

$$\frac{Nu_x}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} = 0{,}408(1+m)^{1/3} \tag{142}$$

In Abb.9 ist diese Gleichung zusammen mit der exakten Lösung dargestellt. Wie man sieht, geht mit zunehmender Abkehr von der Randbedingung ϑ_w=konst. auch der Genauigkeitsgrad der Näherung Nu_x^+ zurück. Dies ist verständlich, da das zugrundegelegte Temperaturprofil Θ^+ lediglich gewisse Voraussetzungen an der Wand sowie an der Stelle $y=\delta_t$ befriedigt, im Innern der thermischen Grenzschicht erfolgt eine Anpassung jedoch nicht. Daher kann auch z.B. das Völligerwerden des Θ-Profils mit ansteigendem m, bedingt durch die Verlagerung des konvektiven Wärmetransports in wandnähere Schichten, nicht zum Ausdruck kommen. Daß die beste Übereinstimmung zwischen der Näherungsrechnung und der exakten Lösung in der Nähe von $m=-0{,}5$, d.h. für ϑ_w=konst. besteht, hängt mit der Sonderstellung zusammen, die der Fall mit konstanter Wandtemperatur bei der laminar längsangeströmten ebenen Platte einnimmt: Identität der Geschwindigkeitsverteilung φ mit der Temperaturverteilung Θ. Um dieses Verhalten näher zu erläutern, bedarf es einiger zusätzlicher Betrachtungen über die Randbedingungen des Temperaturprofils an der Wand.

Die Grenzschichtgleichung des Temperaturfeldes

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} \tag{143a}$$

liefert zusammen mit den Haftbedingungen

$$y=0: \quad u=v=0 \quad \vartheta=\vartheta_w$$

die zweite Ableitung des Temperaturprofils an der Wand

$$\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right)_w = 0$$

Um die höheren Ableitungen nach y zu erhalten, ist die Gleichung (143a) zu differenzieren:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + u\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = a\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial y^3}$$

Berücksichtigt man die Kontinuitätsgleichung (102), so folgt mit den obengenannten Haftbedingungen für die dritte Ableitung an der Wand:

$$\left(\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial y^3}\right)_w = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w \frac{d\vartheta_w}{dx} \tag{144a}$$

Diese Gleichung lautet in dimensionsloser Form++:

$$\left(\frac{d^3\Theta}{[d(y/\delta_t)]^3}\right)_w = \frac{\vartheta_\infty - \vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty - \vartheta_w}\,\frac{u_\infty \delta_t^3}{a\delta x_b}\left(\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\right)_w \frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)} \tag{144b}$$

Durch Umgruppierung und Einführung der Reynolds- und Prandtl-Zahl sowie mit Hilfe der Gleichung (131) ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{d^3\Theta}{[d(y/\delta_t)]^3}\right)_w = -(0{,}5+m)Re_x Pr\left(\frac{\delta_t}{x}\right)^2 \frac{\delta_t}{\delta}\left(\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\right)_w \tag{144c}$$

Die thermische Grenzschichtdicke δ_t/x läßt sich aus Glg. (132) bestimmen. Führt man diese Berechnung wiederum mit den Näherungsansätzen (104a) und (135a) durch, so erhält man für $Pr > 0{,}5/(1+m)$ mit den Gleichungen (136) und (137) (unter Vernachlässigung des Gliedes $(\delta_t/\delta)^2$ gegenüber dem Zahlenwert 14):

$$\left(\frac{d^3\Theta}{[d(y/\delta_t)]^3}\right)_w^+ = -\frac{15}{2}\cdot\frac{1+2m}{1+m} \tag{145a}$$

Es zeigt sich nun, daß die Beziehung (144c) – die also zusätzlich zu erfüllen ist, um eine Anpassung an den Wärmefluß längs der Wand zu erfassen – im Fall der angenäherten Temperaturverteilung Θ^+ nur von dem Wert $m=-3/8$ befriedigt wird. Dieser Wert liegt jedoch andererseits verhältnismäßig nahe dem exakten Wert $m=-0{,}5$,

++ Aus den Gleichungen (119) und (120) folgt z.B.:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_\infty - \vartheta_{wb}}{x_b}\,\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)}(1-\Theta) - \frac{\vartheta_\infty - \vartheta_w}{\delta_t}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)\frac{d\Theta}{d(y/\delta_t)}$$

wobei an der Wand $\Theta=0$ und $(y/\delta_t)=0$ zu setzen ist.

sodaß die Abweichung von $[d^3\Theta^+/[d(y/\delta_t)]^3]_w=-3$ gegenüber dem vorgeschriebenen Wert null noch nicht sehr ins Gewicht fällt, wie nachzuweisen war.

Für andere Näherungsansätze als die hier gewählten φ^+ und Θ^+ bleibt die Proportionalität $[d^3\Theta/[d(y/\delta_t)]^3]_w \sim [(1+2m)/(1+m)][d\varphi/d(y/\delta)]_w$ erhalten, solange nur Identität zwischen den Gleichungen $\varphi(y/\delta)$ und $\Theta(y/\delta_t)$ besteht. Mit zunehmender Güte der Näherung $\varphi(y/\delta)=\Theta(y/\delta_t)$ rückt lediglich der Wert m aus Gleichung (144c) gegen -0,5 , während für $m \neq -0{,}5$ zur Erfüllung der Glg.(144c) Temperaturprofile $\Theta(y/\delta_t) \neq \varphi(y/\delta)$ vorgeschrieben sind. Letztere hängen dann außer von m auch noch leicht von der Prandtl-Zahl ab.

Die dritte Ableitung des Temperaturprofils an der Wand nimmt für $m > -0{,}5$ positive und für $m < -0{,}5$ negative Werte an. Zusammen mit der bei ebenen Wänden stets gültigen Beziehung $(\partial^2\vartheta/\partial y^2)_w=0$ geht daraus weiterhin hervor, daß die Temperaturverteilungen für Wärmefluß- bzw. Wandtemperaturverteilungen mit $m < -0{,}5$ einen Wendepunkt im Strömungsinnern aufweisen. Man findet also bei der längsangeströmten ebenen Platte das bereits bei parallelen Platten gewonnene Ergebnis wieder, daß die Randbedingung ϑ_w=konst. die Fälle mit Wendepunkt von denen ohne Wendepunkt im Temperaturprofil trennt. Ein grundsätzlicher Unterschied bleibt jedoch bestehen: Die Lage des Wendepunktes $y/\delta_t=(y/\delta_t)_n$ gibt bei der laminar angeströmten ebenen Platte nicht den Ort unveränderlicher Temperatur $y=(y/\delta_t)_n\delta_t$ an, wie dies bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten der Fall ist.

Für abnehmende Exponenten $m < -0{,}5$ rückt der Wendepunkt $d^2\Theta/[d(y/\delta_t)]^2=0$ mehr und mehr in das Strömungsinnere, der Temperaturgradient $d\Theta/d(y/\delta_t)$ an der Wand nimmt dabei zunehmend kleinere Werte an, um bei einem bestimmten unteren Grenzwert m_g - für die hier angegebene Näherung bei $m_g=-1$, für die exakte Lösung etwas oberhalb dieses Wertes und schwach von der Prandtl-Zahl abhängig - ganz zu verschwinden. In diesem Fall geht der Wärmeaustausch an der Wand gegen null, wie aus Glg.(140a) bereits hervorging, und das Temperaturprofil verliert physikalisch seinen Sinn. Denn im Gegensatz zu der Kanalströmung mit linearem Druckgradienten (s.Abschnitt 2.2.5) gibt die so erhaltene Temperaturverteilung mit zwei horizontalen Tangenten nicht mehr die Vorgänge beim Temperaturausgleich längs einer wärmeundurchlässigen Wand nach vorausgegangenem Wärmeaustausch wieder. Der Grund hierfür liegt darin, daß die nach Glg.(125) geforderte Proportionalität $\delta_t \sim \delta$ nicht mehr besteht. Damit sind aber auch die für noch kleinere Werte von m zu erwartenden negativen Temperaturgradienten $d\Theta/d(y/\delta_t)$ an der Wand nicht mehr realisierbar. Temperaturprofile solcher Art, die innerhalb des Strömungsquerschnitts ein Optimum $d\vartheta/dy=0$ aufweisen, kommen zwar bei Richtungsumkehr des Wärmeaustausches vor, sie sind jedoch nicht ähnlich.

Zu den beiden Gleichungen (140a) und (140b) lassen sich noch einige Bemerkungen anschließen. Im Fall $2(1+m)Pr \gg 1$ vollzieht sich der Wärmeaustausch vornehmlich in dem Gebiet, in welchem die Geschwindigkeit linear mit dem Wandabstand y/δ ansteigt. Wiederholt man die unter a) beschriebenen Berechnungen dementsprechend mit $\varphi_a^+=1{,}5(y/\delta_t)(\delta/\delta_t)$, so erhält man die Lösung Glg.(140a), d.h. $Nu_x^+ \sim Pr^{1/3}$. Die Vernachlässigung von $(\delta_t/\delta)^2$ in Glg. (138a), die zu Glg.(140a) führte, entspricht also der Beschränkung auf das Geschwindigkeitsprofil φ_a^+. Ist dagegen $2(1+m)Pr \ll 1$, so findet der überwiegende Teil der Wärmeübertragung außerhalb der hydrodynamischen Grenzschicht statt. Wiederholt man die unter b) durchgeführten Berechnungen mit $\varphi_b=1$ innerhalb der gesammten thermischen Grenzschicht, so folgt daraus $Nu_x^+=1{,}5\sqrt{(1+m)PrRe_x}$, d.h. $Nu_x^+ \sim Pr^{1/2}$. Dieser Zusammenhang ist auch aus Glg.(140b) für genügend kleine Werte von $2(1+m)Pr$ ersichtlich.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch die Differentialgleichung für die Temperaturverteilung in der Form $\Theta(\eta,m,Pr)$ hergeleitet werden. Die Grenzschichtgleichung (143a) geht für die dimensionslose Temperatur $\Theta_x(x/x_b,\eta)=(\vartheta-\vartheta_{wb})/(\vartheta_\infty-\vartheta_{wb})$ über in:

$$\frac{u}{x_b}\frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/x_b)}+v\frac{\partial\Theta_x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=a\frac{\partial^2\Theta_x}{\partial\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 \qquad (143b)$$

Der Differentialquotient $d\eta/dy$ läßt sich aus Glg. (110) berechnen, für die Geschwindigkeiten u und v werden die bekannten Beziehungen

$$u=u_\infty\frac{df}{d\eta} \qquad (146a)$$

und

$$v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta}-f\right) \qquad (146b)$$

eingesetzt, wobei die Funktion $f(\eta)$ in Tabellen vorliegt (erstmals berechnet von Blasius /21/). Für die Temperaturprofile Θ_x wird wiederum Ähnlichkeit vorausgesetzt, die Gleichungen (110) und (120) ergeben:

$$\frac{\partial\Theta_x}{\partial(x/x_b)}=(1-\Theta)\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)}-(1-\Theta_{xw})\frac{\eta}{2(x/x_b)}\frac{d\Theta}{d\eta}$$

sowie

$$\frac{\partial\Theta_x}{\partial\eta}=(1-\Theta_{xw})\frac{d\Theta}{d\eta}$$

Die Umformung der Gleichung (143b) kann nun vorgenommen werden,was zu folgendem Ergebnis führt:

$$\frac{df}{d\eta}\left[\frac{1-\Theta}{1-\Theta_{xw}}\,\frac{x}{x_b}\,\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)}-\frac{\eta}{2}\frac{d\Theta}{d\eta}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\eta}-f\right)\frac{d\Theta}{d\eta}=\frac{1}{Pr}\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} \qquad (147)$$

Die Temperatur Θ ist nach der getroffenen Voraussetzung unabhängig von x, folglich muß

$$\frac{x/x_b}{1-\Theta_{xw}}\,\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/x_b)}=\text{konst.}=-n/2=-(0{,}5+m)$$

sein. Die Integration dieser Gleichung ergibt den bereits durch Glg. (131) vorgeschriebenen Temperaturverlauf der Wand, und damit lautet die Differentialgleichung für die Temperatur $\Theta(\eta,m,Pr)$:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2}\left[f\,\frac{d\theta}{d\eta} + (1+2m)\cdot(1-\theta)\,\frac{df}{d\eta}\right] = 0 \qquad (148)$$

Durch das zusätzliche Glied $Pr(0,5+m)(1-\theta)df/d\eta$ läßt sich der Temperaturverlauf nicht mehr explizit in der Form $\theta(\eta,m,Pr)$ darstellen, wie dies für die Randbedingung ϑ_w=konst. der Fall ist /17/:

$$\theta = \frac{\int_0^{\eta} e^{-\frac{Pr}{2}\int_0^{\eta} f\,d\eta}\,d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{Pr}{2}\int_0^{\eta} f\,d\eta}\,d\eta}$$

Die Geschwindigkeit φ gehorcht der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\,f\,\frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \qquad (149)$$

daher sind für Pr=1 und m=-0,5, d.h. ϑ_w=konst., die Differentialgleichungen (148) und (149) für θ und φ identisch, und aus den gemeinsamen Randbedingungen

$$\eta = 0 \;:\qquad f = \varphi = \theta = 0$$

$$\eta = \infty \;:\qquad \varphi = \theta = 1$$

folgt die Übereinstimmung der φ- und θ-Profile. Daß diese Identität jedoch nur in dem einen Fall der laminaren Plattenströmung bei Pr=1 und ϑ_w=konst. besteht, wird in der Literatur nicht immer genügend hervorgehoben.

3.5. DER RINGSPALT

3.5.1. LAMINARE STRÖMUNG

3.5.1.1. FORMELN FÜR STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

Zur Darstellung der über den Strömungsquerschnitt veränderlichen Größen τ/τ_w, φ und ε_m/ν empfiehlt es sich, den dimensionslosen "Mitten"-Abstand z_i^+ einzuführen:

$$z_i^+ = \frac{r-r_c}{r_i-r_c} \qquad (150)$$

(Im Folgenden wird die Stelle $r=r_c, du/dr=0$ vereinfachend als Mitte und die beiden Abschnitte, die sie im Strömungsquerschnitt trennt, entsprechend als innere Hälfte 1 ($r_c>r>r_1$) bzw. äußere Hälfte 2 ($r_2>r>r_c$) des Ringspalts bezeichnet, auch wenn diese Ausdrücke nur im Grenzfall paralleler Platten sinnvoll sind.) Den Radius r_c am Ort des Geschwindigkeitsmaximums erhält man aus der Gleichung

$$\frac{r_c}{r_2} = \sqrt{\frac{1-(r_1/r_2)^2}{\ln(r_2/r_1)^2}} \qquad (151)$$

a) Die Schubspannungsverteilung

Die Gleichung für den Schubspannungsverlauf bei laminarer und turbulenter Strömung

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wi}} = \frac{r^2-r_c^2}{r_i^2-r_c^2}\cdot\frac{r_i}{r} \qquad (151a)$$

läßt sich mit $z_i^+=(r-r_c)/(r_i-r_c)$ wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wi}} = \frac{1}{1+r_c/r_i}\left(1+\frac{1}{1+(r_i/r_c-1)z_i^+}\right)z_i^+ \qquad (151b)$$

Die maximale Abweichung vom linearen Verlauf $\tau/\tau_{wi}=z_i^+$, wie er beim Rohr und bei parallelen Platten vorliegt, befindet sich an der Stelle

$$z_i^+ = \frac{1}{\sqrt{r_i/r_c}+1}$$

und beträgt dort

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wi}} - z_i^+ = \frac{r_c/r_i}{1-(r_c/r_i)^2}\left(1-\sqrt{r_c/r_i}\right)^2$$

Für die innere Ringspalthälfte ($r_i=r_1$) nimmt diese größte Abweichung mit abnehmendem Halbmesserverhältnis r_1/r_2 stetig zu, während sie in der äußeren Ringspalthälfte ($r_i=r_2$) ein Maximum durchläuft: Die Abweichungen verschwinden in den beiden Extremfällen $r_1/r_2=1$ (parallele Platten) und $r_1/r_2=0$ (Rohr). Das Radienverhältnis $(r_c/r_2)_n$, für welches sich in der Ringspalthälfte 2 die größtmögliche Abweichung ergibt, läßt sich aus der Gleichung

$$\frac{1-(r_c/r_2)_n^2}{1/\sqrt{(r_c/r_2)_n}-1} - \left(\frac{r_c}{r_2}\right)_n^2 = 1$$

bestimmen zu $(r_c/r_2)_n=0{,}296$, dem gem. Glg. (151) $r_1/r_2=0{,}00327$ entspricht. Die maximale Abweichung zwischen dem $(\tau/\tau_w)_2$ - und dem linearen Verlauf, die an der Stelle $z_2^+=0{,}3524$ liegt, beträgt 19%.

In Abb. 20 ist die Schubspannungsverteilung $(\tau/\tau_w)_i$ für verschiedene Werte von r_1/r_2 dargestellt.

b) Der Geschwindigkeitsverlauf

Die dimensionslose Geschwindigkeit $\varphi = u/u_c$ ergibt sich durch Integration der Gleichung

$$\frac{\tau_i}{\tau_{wi}} = \frac{d\varphi / dz_i^+}{(d\varphi / dz_i^+)_w}$$

mit Hilfe der Substitution

$$y_i^+ = \frac{r_c}{r_i} + \left(1-\frac{r_c}{r_i}\right) z_i^+ \qquad (152)$$

zu:

$$\varphi\left(\frac{r_i}{r_c}, y_i^+\right) = \frac{\ln y_i^{+2} - \left(\frac{r_i}{r_c}\right)^2 (y_i^{+2} - 1)}{\ln\left(\frac{r_c}{r_i}\right)^2 + \left(\frac{r_i}{r_c}\right)^2 - 1} \qquad (153)$$

Daraus erhält man für die mittlere Geschwindigkeit in den beiden Ringspalthälften $\varphi_{mi}=u_{mi}/u_c$:

$$\varphi_{mi} = \frac{1}{1-(r_c/r_i)^2} \int_{r_c/r_i}^{1} \varphi \; y_i^+ \, dy_i^+$$

$$= \frac{(r_i/r_c)^2/2 + (r_c/r_i)^2 \left[3/2 - \ln(r_c/r_i)^2\right] - 2}{\left[1 - (r_c/r_i)^2\right]\left[\ln(r_c/r_i)^2 + (r_i/r_c)^2 - 1\right]} \qquad (154a)$$

und für den Gesamtquerschnitt:

$$\varphi_{m12} = \frac{0{,}5(r_1/r_c)^2 + 0{,}5(r_2/r_c)^2 - 1}{\ln(r_c/r_1)^2 + (r_1/r_c)^2 - 1} \qquad (154b)$$

Für den Widerstandsbeiwert ζ hat Bailey /9/ folgende Gleichung hergeleitet:

$$\zeta_{12} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{(r_2/r_1 - 1)^2}{1+(r_2/r_1)^2 - \left[(r_2/r_1)^2 - 1\right]/\ln(r_2/r_1)} \qquad (155)$$

die für das Rohr in die bekannte Formel ζ=64/Re und für parallele Platten in ζ=96/Re übergeht.

Abbildung 11 gibt r_c/r_2, φ_m und ζRe in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 wieder. Die zusätzlich eingetragenen Tangenten entsprechen der Anwendung der bei parallelen Platten gültigen Beziehungen auf den Ringspalt und zeigen, daß die Abweichungen von den genauen Kurven für r_1/r_2>0,1 verhältnismäßig gering sind. Insbesondere der Übergang zu den beim Rohr gültigen Werten: r_c/r_2=0 , φ_m=0,5 und ζRe=64 wird erst bei unmittelbarer Annäherung an r_1/r_2=0 deutlich.

3.5.1.2. EXAKTE BERECHNUNG FÜR q_w=KONST.

In den folgenden Ausführungen wird der besseren Übersichtlichkeit wegen auf die allgemeine Darstellung mit dem unbestimmten Index i verzichtet und die Berechnungen für den speziellen und bedeutend wichtigeren Fall durchgeführt, daß der Wärmeübergang am inneren Zylinder 1 stattfindet und der äußere Zylinder 2 wärmeisoliert ist. Die Gleichungen sind jedoch so aufgebaut, daß bei Wärmeaustausch am äußeren Zylinder 2 lediglich die Indices 1 und 2 zu vertauschen sind. In Abschnitt e) ist dann noch der Fall behandelt, daß beide Wände am Wärmeaustausch beteiligt sind, wobei als Anwendungsbeispiel die Bedingung $r_0=r_c$, d.h. das örtliche Zusammenfallen von Geschwindigkeitsmaximum und Temperaturoptimum, ausführlich beschrieben ist.

a) Der Wärmestromdichteverlauf

Aus Gleichung (53a) folgt durch Einsetzen der Integrationsgrenze $y_0^+=r_2/r_1$ (s.Abb.1b):

$$\frac{q}{q_{w1}} = \frac{\int_{r_2/r_1}^{y_1^+} \varphi\, y_1^+ dy_1^+}{y_1^+ \int_{r_2/r_1}^{1} \varphi\, y_1^+ dy_1^+} \tag{156a}$$

Mit der Geschwindigkeitsverteilung φ gemäß Glg. (153) erhält man daraus unter Beachtung von $y_1^+dy_1^+=0{,}5\, dy_1^{+2}$:

$$\frac{q}{q_{w1}} = \frac{y_1^{+2}\left[\ln y_1^{+2} - (r_1/r_c)^2(y_1^{+2}/2-1) - 1\right]+n_1}{y_1^+\left[(r_1/r_c)^2/2 + n_1 - 1\right]} \tag{156b}$$

wobei die Größe n_1 den in Gleichung (160a) angegebenen Ausdruck ersetzt.

b) Der Temperaturverlauf

Die Gleichung (16) geht für laminare Strömung über in

$$\Theta_1 = 1 - \frac{\int_{r_2/r_1}^{y_1^+} (q/q_{w1})\, dy_1^+}{\int_{r_2/r_1}^{1} (q/q_{w1})\, dy_1^+} \tag{157a}$$

Der Zusammenhang $q/q_{w1}=y_1^+ f(y_1^{+2})$ läßt wiederum eine Integration über der Veränderlichen y_1^{+2} zu, das Ergebnis lautet:

$$\Theta_1 = \frac{1}{n_2}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 - y_1^{+2}\left[\ln y_1^{+2} - \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 y_1^{+2} + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2\right] - n_1 \ln y_1^{+2}\right\} \tag{157b}$$

Die Größen n_1 und n_2 werden durch die Gleichungen (160a) bzw. (160b) wiedergegeben.

c) Die Mischungstemperatur

Die spezielle Form der Gleichung (21a)

$$\Theta_{m1} = \frac{1}{\varphi_{m12}\left[1-(r_2/r_1)^2\right]} \int_{(r_2/r_1)^2}^{1} \varphi\, \Theta_1 dy_1^{+2} \qquad (158a)$$

führt nach Einsetzen der Gleichungen (153), (154b) und (157b) sowie nach Durchführung der Integration++ zu folgendem Ergebnis:

$$\Theta_{m1} = \frac{n_4}{n_2 n_3\left[1-(r_2/r_1)^2\right]} \qquad (158b)$$

d) Die Nußelt-Zahl

Mit $d_h/r_w=-2(r_2/r_1-1)$ folgt aus den Gleichungen (19), (157b) und (158b)

$$Nu_1 = 4\,\frac{r_2/r_1-1}{\Theta_{m1}}\left(\frac{d\Theta_1}{dy_1^{+2}}\right)_{y_1^+=1} \qquad (159a)$$

$$= 4\,\frac{n_3}{n_4}\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)\left[1-(\frac{r_2}{r_1})^2\right]\left[1-\frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_c})^2-n_1\right] \qquad (159b)$$

Die in den Gleichungen (156b),(157b),(158b) und (159b) enthaltenen Größen lauten:

$$n_1 = (\frac{r_2}{r_c})^2\left[\frac{1}{2}(\frac{r_2}{r_1})^2-1\right] - (\frac{r_2}{r_1})^2\left[\ln(\frac{r_2}{r_1})^2-1\right] \qquad (160a)$$

$$n_2 = \frac{3}{4}(\frac{r_1}{r_c})^2+(\frac{r_2}{r_1})^2\left[1-\frac{1}{4}(\frac{r_2}{r_c})^2\right]+n_1\left[1-\ln(\frac{r_2}{r_1})^2\right]-2 \qquad (160b)$$

$$n_3 = \frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_c})^2+\frac{1}{2}(\frac{r_2}{r_c})^2-1 \qquad (160c)$$

++Das beim Rohrbündel gleichlautende Integral, welches sich vom hier genannten nur in der unteren Integrationsgrenze unterscheidet, ist im Anhang A 3.6.1.2 ausführlich beschrieben.

$$n_4 = \frac{5}{4}+\frac{11}{4}\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2-\frac{19}{18}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2+\frac{29}{36}\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4-\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^4\left[\frac{7}{8}+\frac{1}{16}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4-\frac{5}{12}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]$$

$$+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2-2\right]+\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4\left[\frac{11}{48}-\frac{3}{4}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]$$

$$+\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left[2\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-\frac{3}{4}\right]+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-\frac{5}{12}\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2-\frac{3}{2}\right]$$

$$+n_1\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{r_2}{r_c}\right)^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{r_2^2}{r_1}\right)+\left(\frac{r_1^2}{r_c}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2}{r_c}\right)-2\right]\right\}$$

(160d)

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Berechnungen erweisen sich trotz der Beschränkung auf den einfachsten Fall: q_w=konst. noch als sehr umständlich. Im Folgenden wird daher noch gezeigt, wie man mit Hilfe einfacher Überlegungen zu einer bereits recht guten Näherung für Nu gelangen kann. Die Grundlagen hierzu sind die Abbildungen 11 und 20. Werden mit den apostrophierten Größen die Näherungen und mit Nu_{PAS} die als bekannt vorausgesetzte Nußelt-Zahl bei parallelen Platten (asymmetrischer Wärmeaustausch) bezeichnet, so lauten die Näherungsansätze:

$$\frac{Nu_2'}{Nu_{PAS}} \approx \frac{r_2-r_c'}{r_2-r_c} = \frac{r_2-(r_1+r_2)/2}{r_2-r_c} = \frac{1}{2}\,\frac{1-r_1/r_2}{1-r_c/r_2} \tag{161}$$

$$\frac{Nu_1'}{Nu_2'} \approx \frac{\tau_{w1}}{\tau_{w2}} = \left(\frac{u_1^+}{u_2^+}\right)^2 = \frac{(r_c/r_2)^2-(r_1/r_2)^2}{(r_1/r_2)\left[1-(r_c/r_2)^2\right]} \tag{162}$$

Im Ansatz (161) für den Wärmeaustausch an der Wand 2 ist dabei berücksichtigt, daß in der für diesen Fall wichtigen äußeren Ringspalthälfte der Schubspannungs- und damit auch der Geschwindigkeitsverlauf im Vergleich zur Strömung zwischen parallelen Platten nicht sehr verschieden sind. Der Korrekturfaktor $(r_2-r_c')/(r_2-r_c)$ ergibt sich aus der Abweichung der mit der Plattenformel $r_c'=(r_1+r_2)/2$ ermittelten Stelle du/dy=0 gegenüber dem genauen Wert r_c. Die Nußelt-Zahl Nu_1' für die Wärmeübertragung an der Wand 1 steht mit Nu_2' über das Geschwindigkeitsprofil in Zusammenhang: Ein Maß dafür, insbesondere in den wichtigen wandnahen Zonen, ist die Wandschubspannung $\tau_{wi}=\mu(du/dy)_{wi}$. Die dabei durch den steilen τ_1/τ_{w1}-Abfall an der Wand 1 verbundene Überbewertung von Nu_1' bei kleinen Werten r_1/r_2 wird infolge der dort zu niedrig berechneten Größe Nu_2' in etwa kompensiert (s.Abb.11).

An dieser Stelle sei noch auf eine Besonderheit des ringförmigen Querschnitts bei Wärmeübertragung an der Innenwand 1 hingewiesen. Betrachtet man die 3 Strömungsformen:

laminare Strömung (Index l)
turbulente Strömung, $Pr\to 0$ (Index t_m)
Rechteckprofil u=konst. (Index s)

so erhält man für alle Strömungsquerschnitte mit symmetrischem Geschwindigkeitsverlauf

$$Nu_s > Nu_{tm} > Nu_l \qquad (163)$$

in Übereinstimmung mit der Reihenfolge der Völligkeit der φ-Profile, charakterisiert durch

$$(\varphi_m)_s = 1 > (\varphi_m)_{tm} > (\varphi_m)_l \qquad (164)$$

Im vorliegenden Fall des Ringspaltes dagegen kann sich für Nu die Reihenfolge (163) -trotz der unverändert gültigen Beziehung (164)- umkehren, da mit abnehmendem Radienverhältnis r_1/r_2 die Durchsatzverteilung zunehmend in das wandnahe Gebiet verlagert wird. Dieser Vorgang wirkt sich bei laminarer Strömung stärker aus als bei der vorwiegend von wandnahen Vorgängen beherrschten turbulenten Strömung, während das Rechteckprofil definitionsgemäß ganz unbeeinflußt bleibt. Nach Berechnungen von Dwyer /22/ erfolgt diese Umkehr der Reihenfolge (163) für Werte $r_1/r_2<1/4$. Das Halbmesserverhältnis r_1/r_2 für $Nu_s=Nu_l$ liegt fest, für $Nu_{tm}=Nu_s$ bzw. $Nu_{tm}=Nu_l$ hängt es dagegen von der Reynolds-Zahl ab. Ein Zusammenfallen $Nu_s=Nu_{tm}=Nu_l$ ist grundsätzlich möglich, der Nußelt-Zahl Nu_{tm} ist dann jedoch eine bestimmte Reynolds-Zahl zugeordnet.

Erfolgt der Wärmeübergang an der Wand 2, so bleibt die Beziehung (163) für alle Werte r_1/r_2 gültig. Während jedoch $(Nu_l)_2$ mit abnehmendem r_1/r_2 ebenfalls abnimmt (s. Abb.28) steigen die Nußelt-Zahlen Nu_{tm} und Nu_s als Folge des Überwiegens der günstigeren Durchsatzverteilung dG/G an.

e) Der beidseitige Wärmeaustausch*

Erfolgt der Wärmeaustausch gleichzeitig an beiden Begrenzungswänden des Ringspaltes, so ist in den vorangegangenen Gleichungen für den Wärmestromdichte- und Temperaturverlauf: Glg. (156b), (157b) (160a) und (160b) der Radius r_2 durch r_0 und im Bereich $r_0<r<r_2$ anschließend zusätzlich r_1 durch r_2 sowie y_1^+ durch y_2^+ zu ersetzen. Die durch dieselben Substitutionen gewonnenen Mischungstemperaturen Θ_{m1o} und Θ_{m2o} gelten dann jeweils von der betreffenden Wand bis zur Stelle r_0. Dementsprechend tritt in Gleichung (158a) an Stelle der mittleren Geschwindigkeit φ_{m12} die mittlere Geschwindigkeit φ_{m1o},

*Auf eine zweite, von W.M.Kays und E.Y.Leung /67/ angegebene Methode (Superposition), wird in Absatz c des Abschnitts 4.2.4.2 hingewiesen.

die von der Wand 1 ($r=r_1$) bis zum Halbmesser r_o gilt und folgender Gleichung gehorcht:

$$\varphi_{m1o} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_c})^2-1+(\frac{r_o}{r_1})^2\left\{1+(\frac{r_1}{r_c})^2\left[\frac{1}{2}(\frac{r_o}{r_1})^2-1 -\ln(\frac{r_o}{r_1})^2\right]\right\}}{\left[1-(\frac{r_o}{r_1})^2\right]\left[\ln(\frac{r_c}{r_1})^2 + (\frac{r_1}{r_c})^2-1\right]} \tag{165}$$

Dies hat zur Folge, daß die Größe n_3 gem. Glg. (160c), die dem Zähler der Glg. (154b) entspricht, durch den Zähler der Gleichung (165), dividiert durch $1-(r_o/r_1)^2$, zu ersetzen ist.

Als Beispiel sei das hier beschriebene Verfahren auf die Mischungstemperatur θ_{m2o} angewandt. Man erhält:

$$\theta_{m2o} = \frac{n_4'}{n_2'n_3'\left[1-(r_o/r_2)^2\right]} \tag{158c}$$

wobei die Größen n_2' und n_4' aus den Gleichungen (160b) und (160d) nach Ersetzen von r_2 durch r_o und anschließend von r_1 durch r_2 zu berechnen sind. Die Größe n_3' lautet:

$$n_3' = \frac{\frac{1}{2}(\frac{r_2}{r_c})^2-1+(\frac{r_o}{r_2})^2\left\{1+(\frac{r_2}{r_c})^2\left[\frac{1}{2}(\frac{r_o}{r_2})^2-1\right]-\ln(\frac{r_o}{r_2})^2\right\}}{1-(\frac{r_o}{r_2})^2} \tag{160e}$$

Die Berechnung des Halbmessers r_o an der Stelle $\partial\vartheta/\partial y=0$ erfolgt aus einer Wärmebilanz. Beispiele hierfür sind in den beiden Arbeiten von O.E.Dwyer /23,24/ durchgeführt*, wobei dort die Berechnung von Temperaturverlauf, Mischungstemperatur und Nußelt-Zahl durch numerische, und nicht wie in der vorliegenden Arbeit durch analytische Auswertung der Integralgleichungen beschrieben wird. An dieser Stelle soll anschließend nur der einfachste Fall behandelt werden, der sich durch $r_o=r_c$ auszeichnet, und hier mit quasisymmetrischem Wärmeaustausch bezeichnet wird.

Aus der Wärmebilanz

$$2\pi r_i q_{wi} = \pi\left|r_i^2-r_c^2\right|u_{mi}\rho c_p\frac{d\vartheta_{mi}}{dx}$$

---

*Die Bestimmungsgleichung für r_o lautet /23/:

$$(r_2/r_1)\left\{c_1(r_o^2-r_1^2)-0,5(r_o^4-r_1^4)-c_2\left[0,5(r_o^2-r_1^2)-r_o^2\ln(r_o)+r_1^2\ln(r_1)\right]\right\}=$$
$$(q_{w1}/q_{w2})\left\{c_1(r_2^2-r_o^2)-0,5(r_2^4-r_o^4)-c_2\left[0,5(r_2^2-r_o^2)-r_2^2\ln(r_2)+r_o^2\ln(r_o)\right]\right\}$$

wobei $c_1=r_1^2-c_2\ln(r_1)$ und $c_2=(r_2^2-r_1^2)/\ln(r_2/r_1)$ bedeuten.

folgt unter Beachtung von $d\vartheta_{m1}/dx = d\vartheta_{m2}/dx$:

$$\frac{q_{w2}}{q_{w1}} = \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} \cdot \frac{1-(r_c/r_2)^2}{(r_c/r_2)^2-(r_1/r_2)^2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \leq 1 \tag{166}$$

Die Nußelt-Zahlen für die beiden Ringspalthälften, definiert durch

$$Nu_i = \frac{\alpha_i \; d_{hi}}{\lambda} = \frac{2\, q_{wi} \left|(r_i^{\,2}-r_c^{\,2})\right|}{\lambda r_i (\vartheta_{wi}-\vartheta_o)\Theta_{mi}} \tag{167}$$

liefern die zu dem vorgeschriebenen Wärmestromdichteverhältnis zugeordneten Wandtemperaturen:

$$\frac{\vartheta_{w2}-\vartheta_o}{\vartheta_{w1}-\vartheta_o} = \frac{Nu_1}{Nu_2} \cdot \frac{\Theta_{m1}}{\Theta_{m2}} \cdot \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{m1}} \left[\frac{1-(r_c/r_2)^2}{(r_c/r_2)^2-(r_1/r_2)^2} \cdot \frac{r_1}{r_2}\right]^2 \tag{168}$$

Die Bestimmungsgleichung für die über den Gesamtquerschnitt gemittelte Mischungstemperatur ϑ_{m12} lautet:

$$\rho c_p(\vartheta_{m12}-\vartheta_o)\pi(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})\varphi_{m12} = \rho\, c_p(\vartheta_{m1}-\vartheta_o)\pi(r_c^{\,2}-r_1^{\,2})\varphi_{m1}$$

$$+\rho c_p(\vartheta_{m2}-\vartheta_o)\pi(r_2^2-r_c^{\,2})\varphi_{m2}$$

Dies führt unter Berücksichtigung von $\vartheta_{mi}-\vartheta_o=(1-\Theta_{mi})(\vartheta_{wi}-\vartheta_o)$ zu folgendem Ergebnis:

$$\Theta_{m12} = \frac{\vartheta_{m12}-\vartheta_{w1}}{\vartheta_o-\vartheta_{w1}} = 1 - \frac{1}{\varphi_{m12}\left[1-(r_1/r_2)^2\right]} \cdot$$

$$\left\{(1-\Theta_{m1})\varphi_{m1}\left[(\frac{r_c}{r_2})^2-(\frac{r_1}{r_2})^2\right]+(1-\Theta_{m2})\left(\frac{\vartheta_{w2}-\vartheta_o}{\vartheta_{w1}-\vartheta_o}\right)\varphi_{m2}\left[1-(\frac{r_c}{r_2})^2\right]\right\}$$

$$\tag{169}$$

Definiert man als reine Rechengröße eine auf die Temperaturdifferenz $\vartheta_{w1}-\vartheta_{m12}$ bezogene Nußelt-Zahl Nu_{12}, die jedoch im Gegensatz zu den physikalisch sinnvolleren Werten Nu_1 bzw. Nu_2 keine unmittelbare Vergleichsgröße darstellt, so läßt sich diese aus der Beziehung

$$Nu_{12} = \frac{2q_{w1}(r_2-r_1)}{\lambda(\vartheta_{w1}-\vartheta_{m12})} = \frac{4(1-r_1/r_2)(r_1/r_2)}{(r_c/r_2)^2-(r_1/r_2)^2} \cdot \frac{\Theta_{m1}}{\Theta_{m12}} Nu_1 \qquad (170)$$

bestimmen. Die Berechnung der Größen Θ_{m1} und Nu_1 erfolgt mit Hilfe der für das Rohrbündel hergeleiteten Gleichungen (s.Abschnitt 3.5.1.2), die nach Austausch der Indices 1 und 2 auch für Θ_{m2} und Nu_2 gelten.

3.5.2. TURBULENTE STRÖMUNG, BERECHNUNG STRÖMUNGSMECHANISCHER GRÖSSEN

Über die Strömung im Ringspalt gibt es noch keine zuverlässigen Angaben, die den Einfluß des Halbmesserverhältnisses r_1/r_2 und der Reynolds-Zahl Re_{12} auf den Verlauf der Impulsaustauschgröße ε_m/ν und der Geschwindigkeit φ sowie auf den Radius verschwindender Schubspannung r_c beschreiben. Dies gilt insbesondere für kleine Werte r_1/r_2, bei denen die Abweichungen gegenüber der Strömung zwischen parallelen Platten erst deutlich werden. Von Rothfus, Walker, Whan /8/ wurde eine Geschwindigkeitsverteilung angegeben, die durch Modifikation der wandnormalen Koordinate dem bei Rohren gültigen Gesetz gehorcht. Als Grundlagen der Herleitung dienen die Annahmen, daß eine für alle Werte r_1/r_2 gültige Funktion $\varepsilon_m/\nu = f(u)$ existiert und daß weiterhin der Radius r_c bei turbulenter Strömung gleich demjenigen bei laminarer Strömung ist. Eine andere Darstellung der lokalen Geschwindigkeit im Ringspalt stammt von Bailey /9/. Dabei wird in dem Prandtl'schen Wandgesetz $(u_c-u)/u^+ = -2,5\ \ln(2y/d)$ der Wandabstand $2y/d$ durch $1-\tau_i/\tau_{wi}$ ersetzt. Diese Anpassung im Endergebnis gibt zunächst keinen Einblick in die damit verbundenen Konsequenzen für die strömungsmechanischen Größen,und sie ist auch andererseits physikalisch nicht sehr sinnvoll, da bei der Herleitung des Wandgesetzes von dem beim Rohr gültigen Zusammenhang $2y/d = 1-\tau/\tau_w$ kein Gebrauch gemacht worden war: Als Folge der Beschränkung auf große Wandnähe wurde $\tau/\tau_w = 1$ gesetzt. Daß das Wandgesetz trotzdem beim Rohr im gesamten Strömungsquerschnitt die Geschwindigkeitsverteilung gut wiedergibt, liegt daran, daß die Abweichung von der gemachten Annahme $\varepsilon_m/\nu = \varkappa\eta_c 2y/d$ durch die Abnahme der Schubspannung τ/τ_w in etwa kompensiert wird. Eine ähnliche Kompensiation dürfte auch im Fall der Bailey'schen Herleitung vorliegen, da der Vergleich der Ergebnisse mit dem für mittlere Werte von r_1/r_2 vorliegenden experimentellen Resultaten befriedigend ist. Rechnet man aus der von Bailey angegebenen Geschwindigkeitsverteilung den zugehörigen Verlauf der Impulsaustauschgröße aus, so erhält man mit $b = 1-r_1/r_c$:

$$\varepsilon_m/\nu = \varkappa\,\eta_c(1-z^+)z^+\left[1 + \frac{b^2 z^+(1-z^+)}{4-b\{2+z^+(4-b[2+z^+(2-b)])\}}\right]$$

Der Quotient in der eckigen Klammer stellt dabei die Abweichung von der aus dem Wandgesetz für das Rohr abgeleiteten ε_m/ν-Verteilung $\varkappa\eta_c(1-z^+)z^+$ dar, er ist für mittlere Werte r_1/r_2 klein gegenüber eins. Für nicht zu kleine Halbmesserverhältnisse bedeutet also der Ansatz von Bailey physikalisch, daß für den Ringspalt und das Rohr dasselbe $\varepsilon_m/(\nu\eta_c)$-Gesetz gilt.*

a) Die Impulsaustauschgröße ε_m/ν und der Widerstandskoeffizient ζ

Das Verfahren, welches in der vorliegenden Arbeit angewandt wird, unterscheidet sich von den beiden zuvor beschriebenen grundsätzlich: Ausgehend von einem Ansatz über den Verlauf der Austauschgröße für Impuls ε_m/ν wird mit Hilfe der bekannten Schubspannungsverteilung das Geschwindigkeitsfeld berechnet. Diese Reihenfolge ist insbesondere bei Wärmeübergangsberechnungen vorzuziehen, da hier die richtige Wiedergabe der ε_m/ν -Verteilung gegenüber derjenigen für φ von wesentlich größerer Bedeutung ist. Die Berechnung der Impulsaustauschgröße aus Ansätzen über die Geschwindigkeitsverteilung ist meist riskant, da letztere besonders in größerem Wandabstand sehr unempfindlich gegenüber ε_m/ν sind. Aus diesem Grund ist es auch unerläßlich, daß bei einer experimentellen Bestimmung von ε_m/ν nicht allein das Geschwindigkeitsprofil, sondern mit einer geeigneten Sonde Geschwindigkeitsdifferenzen gemessen werden, aus denen dann mit Hilfe der Gleichung (10) die Austauschgröße direkt berechnet werden kann. Das Mittengesetz Glg. (2) für das Rohr und für parallele Platten wurde nach einem solchen Verfahren ermittelt. In Ermangelung von entsprechenden experimentellen Resultaten für den Ringspalt müssen nun über den Verlauf der Austauschgröße ε_m/ν Annahmen getroffen werden. Diese sind bereits in Abschnitt 2.1. genannt: Das Wandgesetz Glg. (1) wird für die wandnahen Zonen sowohl des Innen- als auch des Außenzylinders unverändert übernommen. Diese Annahme ist durch die Art der Herleitung dieses Gesetzes gerechtfertigt, wenngleich auch wegen des dem Rohr und den parallelen Platten gegenüber steileren Abfalls der Schubspannung an der inneren Wand die zugrundegelegte Vereinfachung $\tau/\tau_w \approx 1$ stärker ins Gewicht fällt. Das Mittengesetz (2) soll für die äußere Ringspalthälfte ebenfalls unverändert Gültigkeit haben (damit bleiben auch die Gleichungen (68a) und (68b) zur Bestimmung von η_s anwendbar), mit der Begründung, daß die Abweichungen der τ_2/τ_{w2}-Verteilung vom linearen Verlauf bei Rohr und parallelen Platten relativ gering sind. Bis zum Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes in der inneren Ringspalthälfte erfolgt nun eine Anpassung in der Art, daß das Mittengesetz (2) in diesem Abschnitt mit einem Proportionalitätsfaktor $1/f_1$ multipliziert wird, der durch die Bedingung $(\varepsilon_m/\nu)_1=(\varepsilon_m/\nu)_2$ an der Stelle $r=r_c$ definiert ist: Aus den Definitionsgleichungen für η_{c1} und η_{c2} :

---

* Eine von W.M.Kays und E.Y.Leung /67/ durchgeführte analytische Untersuchung wird in Absatz c des Abschnitts 4.2.4.2 beschrieben.

$$\eta_{c1} = \frac{u_1^+(r_c - r_1)}{\nu} \tag{171a}$$

und

$$\eta_{c2} = \frac{u_2^+(r_2 - r_c)}{\nu} \tag{171b}$$

wobei

$$u_i^+ = \sqrt{\tau_{wi}/\varrho} \tag{172}$$

bedeutet, folgt mit der Gleichung (162):

$$f_1 = \frac{\eta_{c1}}{\eta_{c2}} = \frac{r_c/r_2 - r_1/r_2}{1 - r_c/r_2} \sqrt{\frac{(r_c/r_2)^2 - (r_1/r_2)^2}{(r_1/r_2)\left[1 - (r_c/r_2)^2\right]}} \tag{171c}$$

Das Mittengesetz (2) geht damit über in

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\nu \eta_c}\right)_i = \frac{\varkappa}{3\eta_{ci}/\eta_{c2}} \left(0{,}5 + z_i^{+2}\right)\left(1 - z_i^{+2}\right) \tag{173a}$$

Zusammenfassend lauten also die getroffenen Annahmen für die beiden Ringspalthälften 1 und 2:

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\nu}\right)_i = \varkappa \eta_m \left[\frac{\eta_i}{\eta_m} - \mathrm{tgh}\frac{\eta_i}{\eta_m} - \frac{1}{3}\mathrm{tgh}^3\frac{\eta_i}{\eta_m}\right] \quad \text{für } 0 \leq \eta_i \leq \eta_{si} \tag{173b}$$

und

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\nu}\right)_i = \frac{\varkappa \eta_{c2}}{3} \left(0{,}5 + z_i^{+2}\right)\left(1 - z_i^{+2}\right) \quad \text{für } \eta_{si} \leq \eta_i \leq \eta_{ci} \tag{173c}$$

Die Beibehaltung des Wand- und Mittengesetzes ist insbesondere in der inneren Ringspalthälfte 1 mit Unsicherheit behaftet, die jedoch nur durch das Experiment beseitigt werden kann. In der vorliegenden Arbeit kommt es jedoch hauptsächlich auf den Vergleich der verschiedenen Strömungsquerschnitte untereinander sowie auf den Einfluß der Wärmeflußdichteverteilung an, wobei dementsprechend die Forderung nach möglichst einheitlichen Grundlagen unabdingbar ist.

Das eben beschriebene Verfahren: ausgehend von den am ehesten überschaubaren Verhältnissen in der äußeren Ringspalthälfte auf die innere Ringspalthälfte zu schließen, wird nun auch auf die Bestimmung einer charakteristischen Reynolds-Zahl sowie des Widerstandskoeffizienten angewandt. Neben dem den gesamten Ringspaltquerschnitt erfassenden Widerstandskoeffizienten ζ_{12} wird dabei noch zwischen zwei weiteren, den beiden Ringspalthälften zugeordneten Widerstandskoeffizienten ζ_1 und ζ_2 unterschieden. Die Definitionsgleichungen für ζ_1, ζ_2 und ζ_{12} lauten:

$$\Delta p = \zeta_1 \frac{\rho}{2} u_{m1}^2 \frac{l r_1}{2(r_c^2 - r_1^2)} \tag{174a}$$

$$= \zeta_2 \frac{\rho}{2} u_{m2}^2 \frac{l r_2}{2(r_2^2 - r_c^2)} \tag{174b}$$

$$= \zeta_{12} \frac{\rho}{2} u_{m12}^2 \frac{1}{2(r_2 - r_1)} \tag{174c}$$

In den Gleichungen (174a) und (174b) sind für die Abschnitte 1 und 2 hydraulische Durchmesser $d_{hi}=4\ S_i/U_i$ eingeführt, wobei S_i den Strömungsquerschnitt zwischen r_i und r_c und $U_i=2\pi r_i$ den Umfang der betreffenden Wand bedeuten. Mit Hilfe der Beziehung

$$\tau_{wi} = \frac{|r_c^2 - r_i^2|}{2 l r_i} \Delta p$$

und den Gleichungen (172), (174a) und (174b) erhält man:

$$u_i^+ = u_{mi} \sqrt{\zeta_i/8} \tag{175}$$

Damit lassen sich die Gleichungen (171a) und (171b) überführen in:

$$\eta_{c1} = \frac{r_1}{r_c + r_1} \sqrt{\frac{\zeta_1}{32}}\ Re_1 \tag{176a}$$

$$\eta_{c2} = \frac{r_2}{r_c + r_2} \sqrt{\frac{\zeta_2}{32}}\ Re_2 \tag{176b}$$

wobei die Reynolds-Zahlen in den beiden Ringraumhälften mit dem entsprechenden hydraulischen Durchmesser d_{hi} gebildet sind, also:

$$Re_1 = \frac{2u_{m1}(r_c^{\,2}-r_1^{\,2})}{\nu r_1} \tag{177a}$$

$$Re_2 = \frac{2u_{m2}(r_2^{\,2}-r_c^{\,2})}{\nu r_2} \tag{177b}$$

während für den Gesamtquerschnitt

$$Re_{12} = \frac{2u_{m12}(r_2-r_1)}{\nu} \tag{177c}$$

gilt.

Zur Bestimmung der Widerstandskoeffizienten ζ_i wird nun von einer Näherung Gebrauch gemacht. Diese besteht darin, daß in der äußeren Ringspalthälfte 2 das durch die festgelegte Verteilung der Impulsaustauschgröße ε_m/ν (Glg. 173a,b) und dem tatsächlich vorhandenen Schubspannungsverlauf (Glg. 151b) eindeutig festgelegte Geschwindigkeitsprofil (Glg. 186a,b,c) durch dasjenige ersetzt wird, welches aus dem näherungsweise gültigen Verlauf $\tau/\tau_{w2} \approx z_2^+$ hervorgeht. In anderen Worten: Die Geschwindigkeitsprofile zweier Strömungen derselben Flüssigkeit in einem Rohr des Durchmessers d und in der äußeren Ringspalthälfte der Abmessung $r_2-r_c=d/2$ sind unter der Bedingung $\tau_{w2}=\tau_{wT}$ näherungsweise gleich (vgl./8/). Daraus folgt mit den Gleichungen (171b), (172), (175) und (177b):

$$\begin{aligned} u_2^+ &= u_T^+ \\ \eta_{c2} &= \eta_{cT} \end{aligned} \tag{178}$$

$$Re_2 = \left(1+\frac{r_c}{r_2}\right) \frac{\varphi_{m2}}{\varphi_{mT}} Re_T \tag{179}$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m2}}\right)^2 \zeta_T \tag{180}$$

Die in diesen und den nun folgenden Gleichungen enthaltenen Größen sind von Re_T als charakteristischer Reynolds-Zahl abhängig, weshalb hierfür die Bezeichnung "äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl" eingeführt werden soll. Diese läßt sich aus den Gleichungen (177b), (177c) und (179) für eine vorgegebene und in der üblichen Weise definierten Reynolds-Zahl $Re_{12}=u_{m12}d_h/\nu$ berechnen zu:

$$Re_T = \frac{1-r_c/r_2}{1-r_1/r_2} \; \frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}} \; Re_{12} \tag{181}$$

Die Zuordnung der dieser Beziehung gehorchenden Reynolds-Zahlen Re_{12} zu den für die numerische Auswertung ausgewählten Wertepaaren r_1/r_2 und Re_T ist in Tabelle 8 enthalten.

Der mit Hilfe der Gleichungen (174b), (174c) und (180) gewonnene Zusammenhang

$$\zeta_{12} = \frac{1-r_1/r_2}{1-(r_c/r_2)^2} \; \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}}\right)^2 \zeta_T \tag{182}$$

gestattet, den im Ringspalt zu erwartenden Widerstandskoeffizienten aus dem Widerstandsgesetz des Rohres $\zeta_T(Re_T)$ zu bestimmen. Wird mit $\zeta_T^+ = \zeta_T(Re_{12})$ derjenige Widerstandskoeffizient bezeichnet, den man durch formales Einsetzen der Ringspalt-Reynolds-Zahl Re_{12} in das Rohrwiderstandsgesetz erhält, so folgt aus den Gleichungen (69b) und (182):

$$\frac{\zeta_{12}}{\zeta_T^+} = \frac{1-(r_1/r_2)}{1-(r_c/r_2)^2} \; \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{m12}}\right)^2 \left[\frac{\log\,(Re_{12}/7)}{\log\,(Re_T/7)}\right]^2 \tag{183}$$

Für die ebenen Platten erhält man mit $r_1/r_2=r_c/r_2=1$ die bereits in Abschnitt 3.2.2.1 beschriebenen Vereinfachungen.

b) Die Geschwindigkeitsverteilung u/u^+

Aus der vorgegebenen Schubspannungsverteilung τ/τ_w gem. Glg. (151b) und der durch die Annahmen (173a) und (173b) festgelegten Verteilung der Impulsaustauschgröße ε_m/ν läßt sich das Geschwindigkeitsfeld durch Integration der Gleichung

$$\frac{d(u/u^+)}{dz^+} = - \frac{\tau/\tau_w}{(1+\varepsilon_m/\nu)/\eta_c} \tag{184}$$

berechnen. Der dabei zunächst noch unbekannte Radius r_c, der die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums angibt, wird aus der Bedingung $u_{c1}=u_{c2}$ ermittelt.

Im Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes für die Impulsaustauschgröße, das vereinbarungsgemäß bis zum Schnittpunkt mit dem Mittengesetz gelten soll, ist es ratsam, für die innere Ringspalthälfte folgende Unterteilung vorzunehmen: Bis zum Wandabstand $\eta_1 = 15$ wird, wie üblich, mit konstanter Schubspannung $\tau = \tau_w$ gerechnet. Im Bereich $15 < \eta_1 < \eta_{s1}$ ist diese Näherung jedoch infolge des insbesondere bei kleinen Werten r_1/r_2 stark ausgeprägten Abfalls der Schubspannung bereits in Wandnähe nicht mehr zulässig, zumal auch lt. Tabelle 8 die Wandabstände η_{s1} am Schnittpunkt der Kurven des ε_m/ν-Wand- und Mittengesetzes gegenüber dem Fall des Rohres höhere Werte annehmen. Um eine einfache Integration der Gleichung (184) nach Einsetzen des τ_1/τ_{w1}-Verlaufs (151b) zu ermöglichen, wird die ε_m/ν-Verteilung gem. Glg. (173b) durch ihre Asymptote

$$(\varepsilon_m/\nu)_i = \varkappa(\eta_i - 9{,}53) \qquad (185)$$

ersetzt.

ba) $\eta_1 < 15$ (oder $\eta_2 < \eta_{s2}$ für die äußere Ringspalthälfte)

Für die Quadratur der Gleichung (184) gibt H.Reichardt /7/ nach Einsetzen des von Glg. (1) nur unwesentlich abweichenden Wandgesetzes $\varepsilon_m/\nu = \varkappa[\eta - \eta_n \, \mathrm{tgh}(\eta/\eta_n)]$ die Näherungslösung

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{\varkappa} \ln(1+\varkappa\eta) + c_1\left(1 - e^{-\eta/\eta_n} - \frac{\eta}{\eta_n} e^{-b_1\eta}\right) \qquad (186a)$$

mit den in den Gleichungen (65) aufgeführten Konstanten an.

bb) $15 \leq \eta_1 \leq \eta_{s1}$

Aus den Gleichungen (151b), (184) und (185) folgt:

$$\left(\frac{u-u_a}{u^+}\right)_1 = \frac{1}{\varkappa(1+r_c/r_1)(ab-1)} \cdot$$

$$\left[a(ab-2)\ln\frac{a-z_1^+}{a-z_a^+} + \frac{1}{b}\ln\frac{1-bz_1^+}{1-bz_a^+} + (ab-1)(z_1^+ - z_a^+)\right] \qquad (186b)$$

mit den Abkürzungen:

$$a = 1 + \frac{1/\varkappa - 9{,}53}{\eta_{c1}}$$

$$b = 1 - r_1/r_c$$

$$z_a^+ = 1 - \eta_a/\eta_{c1}$$

Die Geschwindigkeit u_a/u^+ erhält man aus Gleichung (186a) mit $\eta_a=15$ zu $u_a/u^+=10{,}59$.

bc) Im Gültigkeitsbereich des Mittengesetzes (173a) kann die molekulare Zähigkeit gegenüber der turbulenten Scheinreibung vernachlässigt werden. Durch Einsetzen der Gleichungen (151b) und (173a) in Glg. (184) folgt:

$$\int\limits_{u_{ci}/u_i^+}^{u_i/u_i^+} d\left(\frac{u_i}{u_i^+}\right) = -\frac{3\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa(1+r_c/r_i)}\int\limits_0^{z_i^+}\frac{z_i^+ + z_i^+/\left[1+(r_i/r_c-1)z_i^+\right]}{(0{,}5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})}dz_i^+ \tag{187}$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt++ (s.Anhang A 3.5.2):

$$\left(\frac{u-u_c}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa}\Bigg[\ln(1-z_i^+)+\ln\frac{1+z_i^+}{1+2z_i^{+2}}+a_{1i}\ln(1+z_i^+)+a_{2i}\ln(1+2z_i^{+2})$$

$$+a_{3i}\ln\left(1-\left(1-\frac{r_i}{r_c}\right)z_i^+\right)+a_{4i}\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,z_i^+)\Bigg] \tag{186c}$$

wobei die beiden ersten Glieder in der eckigen Klammer dem linearen Anteil der Schubspannungsverteilung, also mit $\eta_{ci}/\eta_{c2}=1$ dem Rohr bzw. den parallelen Platten entsprechen.

Die Koeffizienten a_{ji} lauten:

$$\left.\begin{aligned}
a_{1i} &= -\frac{2(1-r_i/r_c)}{(2-r_i/r_c)(1+r_i/r_c)}\\
a_{2i} &= \frac{(1-r_i/r_c)(3-r_i/r_c)}{(2-r_i/r_c)\left[2+(1-r_i/r_c)^2\right]}\\
a_{3i} &= -\frac{6(1-r_i/r_c)^2}{(2-r_i/r_c)(1+r_i/r_c)\left[2+(1-r_i/r_c)^2\right]}\\
a_{4i} &= \frac{2\sqrt{2}\,(1-r_i/r_c)r_i/r_c}{(1+r_i/r_c)\left[2+(1-r_i/r_c)^2\right]}
\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

++ Bei der numerischen Auswertung werden die Ergebnisse dieser Gleichung durch die einfachere Form $u/u^+=a\ln\eta+c$ angenähert, wobei a und c von r_1/r_2 und von Re abhängen.

Inzwischen wurde auch eine von S.Levy durchgeführte Integration der Gleichung (187) bekannt /65/.

bd) Für nicht zu kleine Werte des Radienverhältnisses r_1/r_2 kann die von H.Reichardt /7/ für das Rohr und für parallele Platten hergeleitete Geschwindigkeitsverteilung des Gesamtquerschnitts auf den Ringspalt erweitert werden.

Definiert man eine Zusatzgeschwindigkeit u_z/u^+ in der Weise, daß diese an der Wand ($x_i^+=1$) null wird:

$$\left(\frac{u_z}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa}\left[\ln\frac{1,5(1+z_i^+)}{1+2z_i^{+2}} + a_{1i}\ln\frac{1+z_i^+}{2} + a_{2i}\ln\frac{1+2z_i^{+2}}{3}\right.$$

$$\left. + a_{3i}\ln\frac{1-(1-r_i/r_c)z_i^+}{r_i/r_c} + a_{4i}(\mathrm{arctg}\sqrt{2}x_i^+ - \mathrm{arctg}\sqrt{2})\right] \qquad (189)$$

und damit in Ringraummitte den Wert

$$\left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa}\left[(1-a_{2i})\ln 3-(1+a_{1i})\ln 2-a_{3i}\ln(r_i/r_c)-a_{4i}\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right] \qquad (190)$$

annimmt, so folgt unter Beachtung von $1-x_i^+=\eta_i/\eta_{ci}$

$$\left(\frac{u}{u^+}\right)_i - \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa}\ln\eta_i - \left(\frac{u_z}{u^+}\right)_i = \left(\frac{u_c}{u^+}\right)_i - \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa}\ln\eta_{ci} - \left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_i = \text{konst.}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß für $\eta_{ci}/\eta_{c2}\approx 1$ die Geschwindigkeitsdifferenz $(u-u_z)_i/u_i^+$ dem aus dem Wandgesetz folgenden logarithmischen Gesetz

$$\left(\frac{u-u_z}{u^+}\right)_i = \frac{1}{\varkappa}\ln\eta_i + c_2 \qquad (191)$$

gehorcht. Die Bedingung $\eta_{ci}/\eta_{c2}\approx 1$ ist in der äußeren Ringspalthälfte vereinbarungsgemäß immer, in der inneren dagegen nur bei Halbmesserverhältnissen nahe eins erfüllt. In diesen Fällen können das Mittengesetz (186c) und das Wandgesetz (186a) kombiniert werden, indem in letzterem anstelle von u/u^+ die Geschwindigkeitsdifferenz $(u-u_z)_i/u_i^+$ eingesetzt wird. Dies ist zulässig, da im wandnahen Gebiet, dem Gültigkeitsbereich des Wandgesetzes also, die Zusatzgeschwindigkeit u_z klein gegenüber u ist ($u_{zw}=0$). Die Gleichung für den Geschwindigkeitsverlauf über den gesamten Querschnitt einer Ringspalthälfte lautet demnach:

$$\left(\frac{u}{u^+}\right)_i = \frac{1}{\varkappa}\left\{\ln(1+\varkappa\eta)+\ln\frac{1{,}5(1+z_i^{+2})}{1+2z_i^{+2}} + a_{1i}\ln\frac{1+z_i^+}{2} + a_{2i}\ln\frac{1+2z_i^{+2}}{3}\right.$$

$$\left. + a_{3i}\ln\frac{1-(1-r_i/r_c)z_i^+}{r_i/r_c} + a_{4i}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,z_i^+)-\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right]\right\}$$

$$+c_1(1-e^{-\eta/\eta_n}-\frac{\eta}{\eta_n}e^{-b\eta}) \tag{192}$$

Die mit dem Koeffizienten a_{ji} behafteten Glieder dieser Gleichung, die für $r_1/r_2=1$ sämtlich null sind, geben die Abweichungen gegenüber dem von H.Reichardt für das Rohr bzw. für parallele Platten aufgestellten Geschwindigkeitsgesetz (62) an.

c) Der Radius r_c

Nach Kenntnis des Geschwindigkeitsverlaufs in den beiden Ringspalthälften läßt sich nun die Stelle mit verschwindender Schubspannung, also maximaler Geschwindigkeit, berechnen. Die Bestimmungsgleichung für r_c/r_2 $(r_1/r_2,Re_T)$ ergibt sich aus der Bedingung $u_{c1}=u_{c2}$, mit den Gleichungen (186a,b,c), (190) und (191) folgt:

$$\left(\frac{u_{zc}}{u^+}\right)_2+\frac{1}{\varkappa}\ln\eta_{c2} + c_2 = \left(\frac{u_a}{u^+} + \frac{u_s-u_a}{u^+} - \frac{u_s-u_c}{u^+}\right)_1 \frac{u_1^+}{u_2^+} \tag{193}$$

wobei, außer den bereits bekannten Größen, $(u_s-u_a)/u^+$ und $(u_s-u_c)/u^+$ die Zahlenwerte der Gleichungen (186b) bzw. (186c) für den Mittenabstand $z_{s1}^+=1-\eta_{s1}/\eta_{c1}$ bedeuten. Die durch Iteration gewonnenen Ergebnisse der numerischen Auswertung dieser Gleichung sind in Tabelle 8 zusammengestellt.

d) Die mittlere Geschwindigkeit

Die Mittelwertbildung nach Glg. (22a) mit der Geschwindigkeitsverteilung (192) ergibt nach Weglassen vernachlässigbarer Zusatzglieder:

$$\frac{u_{mi}}{u_i^+} = \frac{1}{\varkappa}\ln\eta_{ci} + c_2 - \frac{2}{(1+r_i/r_c)\varkappa}\left\{a_{1i}\left[\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\ln 2 + \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\right)\frac{r_i}{r_c}\right]\right.$$

$$+\ a_{2i}\left[\frac{1}{4}\ln 3 + \frac{3}{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 3\right)\frac{r_i}{r_c}\right]$$

$$+\ a_{3i}\left[\frac{1}{2(1-r_i/r_c)} + \frac{1}{4}\left(1+\frac{r_i}{r_c}\right)\right]$$

$$+\ a_{4i}\left[\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln 3-1) + \frac{1}{4}\,\frac{r_i}{r_c}\left(\sqrt{2}-\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)\right]$$

$$\left. +\ \frac{r_i}{r_c}\left[\frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2 + (\varkappa c_2 - \ln\varkappa)\frac{\eta_n}{\eta_{ci}}\right] + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 3\right\}$$

$$= 2{,}5\ln\eta_{ci} + 5{,}5 - \frac{5}{1+r_i/r_c}\left\{(0{,}2103+0{,}0966\frac{r_i}{r_c})a_{1i} + (0{,}4241+0{,}2253\frac{r_i}{r_c})a_{2i}\right.$$

$$+\left[\frac{\ln\frac{r_i}{r_c}}{2(1-r_i/r_c)} + \frac{1}{4}\left(1+\frac{r_i}{r_c}\right)\right]a_{3i} + (0{,}2736+0{,}1147\frac{r_i}{r_c})a_{4i}$$

$$\left. +\ (0{,}6212+3{,}120\frac{\eta_n}{\eta_{ci}})\frac{r_i}{r_c} + 0{,}0362\right\} \qquad (194)$$

Für kleine Werte r_1/r_2, die eine getrennte Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung nach den Gleichungen (186a,b,c) erfordern, ist die numerische Integration der analvtischen vorzuziehen, da letztere zu unhandliche Ausdrücke ergeben würde. Die Gleichung zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit φ_{m12} für den Gesamtquerschnitt lautet:

$$\varphi_{m12} = \frac{u_{m12}}{u_c} = \frac{(r_c/r_2)^2-(r_1/r_2)^2}{1-(r_1/r_2)^2}\cdot\frac{u_{m1}/u_1^+}{u_c/u_1^+} + \frac{1-(r_c/r_2)^2}{1-(r_1/r_2)^2}\cdot\frac{u_{m2}/u_2^+}{u_c/u_2^+} \qquad (195)$$

3.6. DAS ROHRBÜNDEL

Wie bereits in der Einleitung vermerkt, wird zur Berechnung der Strömung und des Wärmeübergangs längs Rohrbündeln das bereits von R.N.Lyon/10/ angewandte Verfahren übernommen, welches das Hexagon verschwindender Schubspannung durch einen Kreis gleichen Flächeninhalts ersetzt[++]. Der Radius r_c dieses Kreises folgt aus der Beziehung

$$\left(\frac{r_c}{r_1}\right)_{\Delta} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\left(\frac{p}{d}\right) \qquad (196a)$$

wobei mit p der Achsabstand zwischen den im Dreieck angeordneten Rohren und mit d und r_1 der äußere Durch- bzw. Halbmesser dieser Rohre bezeichnet wird. Für quadratisch angeordnete Rohre ist der in entsprechender Weise definierte Halbmesser r_c aus der Gleichung

$$\left(\frac{r_c}{r_1}\right)_{\square} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{p}{d}\right) \qquad (196b)$$

zu berechnen, mit p als Seitenlänge des aus den Rohrachsen gebildeten Quadrats. Das Ersetzen des ein jedes Rohr umgebenden seitengleichen Rechtecks verschwindender Schubspannung durch einen flächengleichen Kreis bedeutet hier natürlich eine wesentlich deutlichere Abkehr von den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen,als dies beim Hexagen der Dreieckanordnung der Fall ist. Aus den beiden Gleichungen (196a) und (196b) folgt, daß die für Dreieckteilung berechneten numerischen Ergebnisse, unter der vorerwähnten Einbuße an Genauigkeit, für die quadratische Teilung mit dem Abstandsverhältnis

$$\left(\frac{p}{d}\right)_{\square} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{p}{d}\right)_{\Delta} = 0{,}932\left(\frac{p}{d}\right)_{\Delta} \qquad (196c)$$

übernommen werden können.

Unter diesen Vereinfachungen lassen sich die strömungsmechanischen Größen direkt aus den für die innere Hälfte des Ringspaltes geltenden Gleichungen bestimmen.

3.6.1. LAMINARE STRÖMUNG

3.6.1.1. STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

Für die laminare Rohrbündelströmung ist ergänzend zu den in Abschnitt 3.5.1.1 (Ringspalt) enthaltenen Beziehungen über τ_1/τ_{w1}, φ_1 und φ_{m1} noch der Widerstandsbeiwert ζ zu bestimmen.

[++] Die Güte dieser Näherung nimmt (unter der Voraussetzung, daß die strömungsmechanischen Größen in der inneren Hälfte des auf diese Weise zugeordneten Ringspalts bekannt sind) mit steigendem p/d wegen der damit verbundenen Abnahme von $(r_c-r(\tau=0))/(r_c-r_1)$ zu. Bei turbulenter Strömung verringert sich ab einem Bestwert p/d die Genauigkeit wieder, da die beim Ringspalt gemachten Ansätze über ε_m/ν mit abnehmendem r_1/r_2, d.h. mit steigendem p/d des zugeordneten Rohrbündels, unsicherer werden.

Er ergibt sich aus $\zeta = 8\tau_w/(\varrho u_m{}^2)$ durch Einsetzen von

$$\tau_w = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_w = \frac{\mu u_c}{r_1}\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1{}^+}\right)_{y_1^+=1} = \frac{\mu u_c}{r_1}\,\frac{2\left[1-(r_1/r_c)^2\right]}{\ln(r_c/r_1)^2+(r_1/r_2)^2-1} \tag{197}$$

sowie mit Hilfe der Gleichung (154a) und mit $Re = 2(r_c{}^2 - r_1{}^2)u_m/(r_1\nu)$ zu

$$\zeta_B = \frac{64}{Re}\cdot\frac{\left[1-(r_1/r_c)^2\right]\left[1-(r_c/r_1)^2\right]^2}{(r_c/r_1)^2\left[2\,\ln(r_c/r_1)^2-3\right]-(r_1/r_c)^2+4} \tag{198}$$

3.6.1.2. DER WÄRMEÜBERGANG BEI q_w=konst.

a) Der Wärmestromdichteverlauf

Aus Gleichung (53a) folgt unter Beachtung der in Abb.1f aufgeführten Integrationsgrenze $y_0{}^+ = r_c/r_1$ mit $F_0 = 1$ und Glg. (153):

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\displaystyle\int_{(r_c/r_1)^2}^{y^{+2}}\left[\ln\,y^{+2}-(r_1/r_c)^2(y^{+2}-1)\right]dy^{+2}}{y^+\displaystyle\int_{(r_c/r_1)^2}^{1}\left[\ln\,y^{+2}-(r_1/r_c)^2(y^{+2}-1)\right]dy^{+2}}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{y^{+2}\left[\ln\,y^{+2}-(r_1/r_c)^2y^{+2}/2+(r_1/r_c)^2-1\right]+\left[\ln(r_1/r_c)^2+3/2\right]\Big/(r_1/r_c)^2-1}{y^+\left\{(r_1/r_c)^2/2-2+\left[\ln(r_1/r_c)^2+3/2\right]\Big/(r_1/r_c)^2\right\}} \tag{199}$$

b) Der Temperaturverlauf Θ

Durch Einsetzen der Gleichung (199) in Glg. (16) erhält man mit $dy^+ = 0{,}5\ dy^{+2}/y^+$:

$$\Theta = 1 - \frac{\displaystyle\int_{(r_c/r_1)^2}^{y^{+2}}\left\{\left[\ln y^{+2}-(r_1/r_c)^2y^{+2}/2+(r_1/r_c)^2-1\right]+\left(\left[\ln(r_1/r_c)^2+3/2\right]/\left((r_1/r_c)^2-1\right)\right)/y^{+2}\right\}dy^{+2}}{\displaystyle\int_{(r_c/r_1)^2}^{1}\left\{\left[\ln y^{+2}-(r_1/r_c)^2y^{+2}/2+(r_1/r_c)^2-1\right]+\left(\left[\ln(r_1/r_c)^2+3/2\right]/\left((r_1/r_c)^2-1\right)\right)/y^{+2}\right\}dy^{+2}}$$

Die Lösung der Integrale führt zu folgender Gleichung für den Temperaturverlauf:

$$\Theta = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2 - y^{+2}\left[\ln y^{+2} - \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 y^{+2} + \left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 2\right] - \ln y^{+2}\left\{\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \frac{3}{2}\right] - 1\right\}}{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 3 + \frac{9}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + 1\right]} \tag{200}$$

c) Die Mischungstemperatur Θ_m

Setzt man die Gleichungen (153), (154a) und (200) für φ_1, φ_{m1} und Θ in die aus Glg.(21a) folgende Gleichung

$$\Theta_m = \frac{1}{\varphi_{m1}\left[1-(r_c/r_1)^2\right]} \int_{(r_c/r_1)^2}^{1} \varphi_1 \Theta \, dy^{+2} \tag{201a}$$

ein, so ergibt sich (s. Anhang A3.6.1.2):

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_m &= \frac{Z}{N} \\
&\text{mit} \\
Z &= \left[\frac{9}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - 2\right]\left[\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]^2 \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left[10\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{95}{12}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 - \frac{5}{2}\right]\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \\
&\quad + \left[\frac{719}{144} - \left(\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right)^3\right]\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 + \frac{11}{48}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - \frac{35}{3}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{23}{9}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + 9 \\
&\text{und} \\
N &= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \frac{3}{2}\right] - 2\right\} \cdot \left\{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - 3 + \frac{9}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + 1\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{201b}$$

d) Die Nußelt-Zahl Nu

Aus Glg. (19) folgt mit $d_h/r_w = -2\left[(r_c/r_1)^2-1\right]$

$$Nu = \frac{2\left[(r_c/r_1)^2-1\right]}{\Theta_m}\left(\frac{d\Theta}{dy^+}\right)_{y^+=1}$$

Durch Differentiation der Gleichung (200) und Einsetzen zusammen mit Glg. (201b) gelangt man zu folgendem Ergebnis:

$$\left.\begin{aligned} Nu &= \frac{4\left[1-(\frac{r_c}{r_1})^2\right]\left\{\frac{1}{2}(\frac{r_1}{r_c})^2+(\frac{r_c}{r_1})^2\left[\ln(\frac{r_1}{r_c})^2+\frac{3}{2}\right]-2\right\}^2}{Z} \\ \text{mit} \\ Z &= \left[\frac{9}{2}(\frac{r_c}{r_1})^2-2\right]\left[\ln(\frac{r_c}{r_1})^2\right]^2(\frac{r_c}{r_1})^2+\left[10(\frac{r_c}{r_1})^2-\frac{95}{12}(\frac{r_c}{r_1})^4-\frac{5}{2}\right]\ln(\frac{r_c}{r_1})^2 \\ &+\left[\frac{719}{144}-\left(\ln(\frac{r_c}{r_1})^2\right)^3\right](\frac{r_c}{r_1})^4+\frac{11}{48}(\frac{r_1}{r_c})^4-\frac{35}{3}(\frac{r_c}{r_1})^2-\frac{23}{9}(\frac{r_1}{r_c})^2+9 \end{aligned}\right\} \quad (202)$$

3.6.2. TURBULENTE STRÖMUNG, BERECHNUNG STRÖMUNGSMECHANISCHER GRÖSSEN

Die in Abschnitt 3.5.2 für den Ringspalt hergeleiteten Beziehungen, die ihrerseits auf den für das Rohr gültigen Zusammenhängen basieren, können nun noch auf die Strömung längs Rohrbündeln erweitert werden. Die gemeinsame Kenngröße bei dieser Verkettung Rohr-Ringspalt-Rohrbündel ist die bereits eingeführte sog. äquivalente Rohr-Reynolds-Zahl Re_T, die sich aus den Gleichungen (177a), (177b) und (179) mit $Re_B = Re_1$ sowie $\varphi_{mB} = \varphi_{m1}$ ergibt.

$$Re_T = \frac{r_2/r_1 - r_c/r_1}{(r_c/r_1)^2-1}\;\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mB}}\;Re_B \qquad (203)$$

In Tabelle 9 sind die für verschiedene Wertepaare (Re_T, p/d) aus dieser Gleichung gewonnenen Rohrbündel-Reynolds-Zahlen Re_B gemeinsam mit den mittleren Geschwindigkeiten φ_{mB} und dem zugeordneten Ringspalt r_1/r_2 wiedergegeben.

Der Widerstandskoeffizient ζ_B läßt sich in gleicher Weise, wie bereits beim Ringspalt beschrieben, berechnen. Aus den Gleichungen (174a), (174b) und (180) folgt mit $\zeta_B = \zeta_1$:

$$\zeta_B = \frac{(r_c/r_1)^2 - 1}{(r_1/r_2)\left[(r_2/r_1)^2 - (r_c/r_1)^2\right]} \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mB}}\right)^2 \zeta_T \qquad (204)$$

wobei ζ_T wiederum den für Re_T aus dem Widerstandsgesetz des Rohres bestimmten Widerstandskoeffizienten bedeutet. Den Quotienten ζ_B/ζ_T^+ mit dem für Re_B direkt aus dem Rohrgesetz ermittelten Wert ζ_T^+ erhält man mit Hilfe der Gleichungen (69b) und (204):

$$\frac{\zeta_B}{\zeta_T^+} = \frac{(r_c/r_1)^2 - 1}{(r_1/r_2)\left[(r_2/r_1)^2 - (r_c/r_1)^2\right]} \left(\frac{\varphi_{mT}}{\varphi_{mB}}\right)^2 \left[\frac{\log(Re_B/7)}{\log(Re_T/7)}\right]^2 \qquad (205)$$

Die restlichen strömungsmechanischen Größen: τ/τ_w, φ, φ_m lassen sich aus den für die innere Ringspalthälfte hergeleiteten Beziehungen entnehmen.

4. DISKUSSION DER ERGEBNISSE DER NUMERISCHEN BERECHNUNG

Einleitung

Die numerische Auswertung der in den Abschnitten 2 und 3 enthaltenen Gleichungen wurde mit Hilfe einer IBM-7094-Rechenanlage durchgeführt (vom Verfasser programmiert). Die dabei der numerischen Integration der auftretenden Integrale zugrundegelegten Unterteilungen werden im folgenden beschrieben.

a) Laminare Strömung: Lineare Unterteilung der Breite

$$\Delta y_l^+ = (y_w^+ - y_o^+)/100$$

über den gesamten Bereich $y_w^+ \ldots y_o^+$ des Strömungsquerschnitts.

b) Turbulente Strömung: Da sich das Geschwindigkeits- und das Temperaturprofil - letzteres mit Ausnahme der Fälle von Kombinationen kleiner Prandtl- und kleiner Reynolds-Zahlen (s.Abb.38, 60,67,81 und 93) - bereits in unmittelbarer Wandnähe aufbauen, muß die Unterteilung mit Annäherung an die wärmeaustauschende Wand zunehmend feiner werden. Einheitlich für alle betrachteten Formen des Strömungsquerschnitts werden im Bereich, der durch $0 \leq |y^+ - y_o^+| \leq 0{,}9\,|y_w^+ - y_o^+|$ definiert ist, eine lineare Unterteilung der Breite

$$\Delta y_m^+ = (y_w^+ - y_o^+)/60$$

und in der restlichen wandnahen Zone $0{,}9\,|y_w^+ - y_o^+| < |y^+ - y_o^+| \leq |y_w^+ - y_o^+|$ beim Rohr und Rohrbündel sowie bei parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, eine Unterteilung der ortsabhängigen Breite

$$\Delta y_{n1}^+ = (y_w^+ - y_o^+)\Delta\varphi/(d\varphi/dy^+)_{T,Re=10^5}$$

mit $\Delta\varphi = -1/60$ zugrundegelegt. An der Grenze der beiden Bereiche mit gleichmäßiger Abstufung der wandnormalen Ordinate y^+ einerseits und der Geschwindigkeit φ andererseits, d.h. für $y^+ - y_o^+ = 0{,}9(y_w^+ - y_o^+)$, gilt bei der turbulenten Rohrströmung und der oben angegebenen Reynolds-Zahl $Re = 10^5$: $d\varphi/dy^+ = (\tau/\tau_w)(\eta_c u_c/u^+)/(1+\varepsilon_m/\nu) \approx -1$. In den Fällen des Ringspalts und der parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, trennt das Temperaturoptimum ϑ_o, verglichen mit dem Geschwindigkeitsmaximum u_c, im Mittel der doppelte Abstand von der wärmeaustauschenden Wand (gem. Abb 1b,1c und 1f betragen diese Abstandsverhältnisse p_i: $p_{A1} > 2$, $p_{A2} < 2$ und $p_{PAS} = 2$). Aus diesem Grund muß die zuvor genannte Grenze an die Stelle $y^+ - y_o^+ = 0{,}95(y_w^+ - y_o^+)$ gelegt werden. Dies hat zur Folge, daß die Teilbereiche Δy_{n1} zu halbieren sind: $\Delta y_{n2}^+ = \Delta y_{n1}^+/2$. Die Lücke $0{,}9\,|y_w^+ - y_o^+| \ldots 0{,}95\,|y_w^+ - y_o^+|$ wird dabei in drei je gleich große Abschnitte $\Delta y^+ = 0{,}05(y_w^+ - y_o^+)/3$ geteilt. Nach dem so beschriebenen Verfahren erhält man für die 3 erstgenannten Fälle (T, PS,B) 61 und für die 3 letztgenannten (A1,A2,PAS) 64 Teilbereiche. Die verhältnismäßig hohe Reynolds-Zahl von $Re = 10^5$ wurde gewählt, um in großer Wandnähe, bedingt durch den dort vorhandenen steilen Geschwindigkeitsabfall, genügend viele Integrationsschritte zu erhalten. Die auf diese Art und Weise berechneten Unterteilungen erwiesen sich als ausreichend, mit Ausnahme der Kombinationen $Pr^+ \geq 10, Re_T \geq 10^6$, für die eine noch feinere Abstufung in unmittelbarer Wandnähe notwendig wäre (die letzte Teilabszisse befindet sich im Abstand $0{,}886 \cdot 10^{-4}(y_w^+ - y_0^+)$ in den Fällen T,PS,B und im halb so großen Abstand $0{,}443 \cdot 10^{-4}(y_w^+ - y_0^+)$ in den Fällen A1,A2 und PAS zur wärmeaustauschenden Wand). Die auszuschließenden Reynolds-Zahlen kommen allerdings infolge der mit den hohen Prandtl-Zahlen verbundenen großen Zähigkeiten kaum vor. Die in verschiedenen Diagrammen im Bereich $Pr^+ \geq 10, Re_T \geq 10^6$ enthaltenen Ergebnisse sind durch Extrapolation gewonnen.

Bei der Durchführung des wärmetechnischen Teils der numerischen Berechnungen wurden - ausgehend von den bereitgestellten hydrodynamischen Größen φ, ε_m/ν etc. - zunächst der keine Iteration erfordernde Fall mit konstanter Wärmeflußdichteverteilung $F_0=1$ behandelt und daran anschließend mit Hilfe der so erhaltenen Temperaturverteilung der Verlauf erster Näherung der wandnormalen Wärmestromdichte und der Temperatur für den nächsthöheren Wert des Parameters $F_0>1$ berechnet (s. Tabelle 1). Durch Iteration wurde diejenige Näherung als Lösung bestimmt, für die die Verbesserung der Nußelt-Zahl Nu_0 (zu deren Berechnung die Kenntnis der Mischungstemperatur Θ_m nicht notwendig ist und daher keine zusätzliche numerische Integration erfordert) gegenüber dem zuvor berechneten Wert kleiner oder gleich 1 Promille bei der laminaren bzw. 3 Promille bei der turbulenten Strömung beträgt. Beim Übergang zum nächstfolgenden Wert des Parameters F_0 wurde die Temperaturverteilung des bereits bekannten nächstgelegenen Wertes F_0 (im folgenden Beispiel in Klammern gesetzt) bei gleicher Reynolds-Zahl zur Berechnung der ersten Näherung herangezogen, also etwa $F_0 = 1 - 2(1) - 4(2) - 8(4) - 0{,}5(1) - 0(0{,}5)$. Die Konvergenz für $F_0>0$ ist gut, sodaß im Durchschnitt bereits die zweite oder dritte, und nur in Ausnahmefällen die vierte Näherung die oben definierte Lösung ergab.

Beim Übergang zu negativen Werten des Parameters der Wärmestromdichteverteilung mußte das hier beschriebene Verfahren in Bezug auf die Auswahl der Werte F_0 modifiziert werden: Wie Abbildung 3 zeigt, können nicht uneingeschränkt Werte $F_0<0$ gewählt werden, ohne in das auszuschließende Gebiet $F_0/F_m = d\vartheta_m/d\vartheta_0 < 0$ zu gelangen (die im Quadranten $F_0<0$, $F_m>0$ gelegenen Kurvenabschnitte der Funktion (34) sind in Abb.3 weggelassen, wie bereits in Abschnitt 2.2.5 begründet wurde). Um für die festzulegenden Werte $F_0<0$ eine gegenüber $F_0>0$ vergleichbare Abstufung - gekennzeichnet durch den Grad der Annäherung an den Grenzwert $F_0 \to \infty$ für $F_0>0$ bzw. an $F_0 \to -\Theta_m/(1-\Theta_m)$, d.h. $F_m \to -\infty$ für $F_0<0$ (s. Abb.4a und 4b) - zu erhalten, wurden die Werte $F_0<0$ mit Hilfe der Gleichung (34) für die dem Vergleichswert $F_0^+>0$ entsprechende Größe $F_m^+<0$ berechnet und auf 5/100 aufgerundet. Wegen der Symmmetrie der Kurven $F_0(F_m)$ um die Achse $F_0=1-F_m$ folgt $F_m^+=1-F_0^+$, der Reihenfolge $F_0^+=2$, 4, 8 entspricht also die Abstufung $F_m^+= -1, -3, -7$, wie sie in Tabelle 1. für $Pr^+_{T,B}=1$ aufgeführt ist. Anstelle der zunächst noch unbekannten Mischungstemperatur Θ_m wurde der bei dem nächsthöheren Wert F_0 für dieselbe Reynolds-Zahl ermittelte Wert Θ_m' in die Gleichung (34) eingesetzt. Da der zu erwartende Betrag von Θ_m stets kleiner sein wird als Θ_m', muß Vorsorge dafür getroffen werden, daß man nicht zu sehr in die technisch uninteressanten Bereiche $F_m \to -\infty$ $(Nu \to 0)$ einerseits bzw. $F_0/F_m<0$ $(Nu_0<0)$ andererseits gelangt (wie inAbschnitt 2.2.5 beschrieben, ist lediglich der Grenzfall Nu=0, der dem Temperaturausgleich entspricht, von technischem Interesse). Dies geschah auf zweierlei Weise: Zunächst wurde in den Fällen, in welchen als Folge der niedrigen Werte für Θ_m hauptsächlich Vorsicht geboten ist, also bei der laminaren Strömung generell und bei der turbulenten Strömung für $Pr < 0,1$, die aus der Beziehung $F_m^+ = 1 - F_o^+$ gewonnenen Werte F_m^+ erhöht. Damit erreicht man, daß die Tendenz zu höher negativen Werten F_m ($F_m < F_m^+$) teilweise kompensiert wird. Weiterhin wurde die Anzahl der Iterationen zur Bestimmung des endgültigen Wertes Nu_o bei der laminaren Strömung auf 20 und bei der turbulenten Strömung auf 10 begrenzt. Reichte diese Anzahl zur Lösung in dem weiter oben definierten Sinn nicht aus, oder führten im Laufe der Iterationen die Zwischenergebnisse zu negativen Nu_o, so wurde F_o um 5/100 erhöht und der zuvor beschriebene Vorgang solange wiederholt, bis das endgültige Ergebnis innerhalb der Höchstzahl von Iterationen pro Wert F_o vorlag. Die Abnahme der Nußelt-Zahlen für negative F_o ist wesentlich stärker ausgeprägt als die Zunahme für $F_o > 0$, wie die Abbildungen 29, 37, 54, 100 und die Tabellen 10 bis 17 zeigen. Diese Tatsache drückt sich dementsprechend auch in der Anzahl der notwendigen Iterationen aus, die mit Abnahme des Parameters F_o, der Prandtl-Zahl Pr und - etwas weniger deutlich - der Reynolds-Zahl Re, sowie mit zunehmendem Unterschied der aufeinanderfolgenden Werte F_o ansteigt.

Bevor nun auf die numerischen Ergebnisse im einzelnen eingegangen wird, ist es angebracht, die bei der Herleitung der Formeln in den jeweiligen Abschnitten beschriebenen physikalischen Zusammenhänge zwischen Strömungsquerschnitt, thermischer Randbedingung, Strömungsform (laminar oder turbulent) und dem daraus folgenden Einfluß auf die Wärmeübertragung an dieser Stelle nochmals zu skizzieren. Diese Zusammenstellung wird einheitlich für den allgemeinen Fall des Ringspaltes gegeben, in dem das Rohr, die parallelen Platten und das Rohrbündel (letzteres im Rahmen der vereinbarten Näherung $r(\tau = 0) \approx r_c$) als Sonderfälle mit enthalten sind.

Vereinfachend läßt sich folgendes umkehrbare Schema aufstellen: Eine Abnahme des Flächeninhalts unter dem τ/τ_w-Verlauf im Bereich $y_c^+ \ldots y_w^+$ führt zu einer Zunahme der Völligkeit des innerhalb dieser Grenzen befindlichen Anteils der Geschwindigkeitsverteilung φ. Die damit verbundene Abnahme des Flächeninhalts unter dem q/q_w-Verlauf im Bereich $y_o^+ \ldots y_w^+$ führt zu einer Zunahme der Völligkeit des dazugehörigen Θ-Profils. Eine Zunahme der Völligkeit des φ-Verlaufs schließt eine Erhöhung sowohl der mittleren Geschwindigkeit φ_m als auch des Gradienten $(d\varphi/dy)_w$ und damit des Reibungskoeffizienten ζ ein. In der gleichen Weise wirkt sich die Zunahme der Völligkeit des Θ-Profils auf eine Erhöhung von Θ_m, $(d\Theta/dy)_w$ und von Nu aus. Der Einfluß des Parameters F_o - einer Zunahme entspricht eine Verminderung des Flächeninhalts unter dem q/q_w-Verlaufs (und umgekehrt), verbunden mit den zuvor beschriebenen Konsequenzen - ist umso größer, je weniger der Wärmeaustausch von den wandnahen Vorgängen beherrscht wird: Bei laminarar Strömung also im Fall A1 mit steigendem, im Fall A2 mit abnehmendem Wert des Radienverhältnisses r_1/r_2 und bei turbulenter Strömung zusätzlich mit abnehmender Prandtl- und abnehmender Reynolds-Zahl.

Von allen in dieser Arbeit betrachteten Strömungsquerschnitten ist nach dem vorausgehenden der Einfluß von F_o beim Rohr (als Grenzfall des Ringspalts mit $r_1/r_2 = 0$ und $q_w = q_{w2}$) am höchsten. Diese Tatsache ist am deutlichsten in Abb.29 zu ersehen.

Es erweist sich nun als zweckmäßig, für die Zusammenstellung der numerischen Ergebnisse, einschließlich des Vergleichs mit experimentellen Daten, von der bei der Herleitung der Formeln gewählten Reihenfolge abzugehen, und die verschiedenen Strömungsquerschnitte in den übergeordneten Abschnitten für laminare Strömung einerseits bzw. für turbulente Strömung andererseits zu gruppieren.

4.1. LAMINARE STRÖMUNG

Bei laminarer Strömung besteht unter den in Abschnitt 2.1 getroffenen Voraussetzungen Ähnlichkeit sowohl der Geschwindigkeits- als auch der Temperaturprofile für alle Prandtl- und alle Reynolds-Zahlen. Für Kanalströmungen mit linearem Druckabfall bleibt nach Abschnitt 2.2.5 diese Ähnlichkeit bei exponentiellen Wärmeflußverteilungen längs der Wand erhalten. Der Wärmeübergang wird also allein von der Querschnittsform des Kanals, von der thermischen Randbedingung (z.B. A1 - A2 , PS - PAS) und von der Größe des Parameters der Wärmeflußverteilung F_o bestimmt.

4.1.1. DAS ROHR

In Abbildung 14 sind die Temperaturverteilungen $\Theta(y/r_w)$ für verschiedene Werte F_o dargestellt. Das dabei zusätzlich eingezeichnete Temperaturprofil $\Theta=1-1,8y^{+2}+0,8y^{+3}$ entspricht der aus einem Potenzreihenansatz gewonnenen Näherungslösung (s.Glg.61a). Die Kurve $\partial\vartheta/\partial x=0$ gibt im Schnittpunkt mit den Kurven $\Theta(F_o=\text{konst.}<0)$ den aus der Beziehung $\Theta(y_n^+)=F_o/(F_o-1)$ folgenden Wandabstand $y/r_w=1-y_n^+$ mit unveränderlicher Temperatur in Strömungsrichtung an. Derselbe Zusammenhang $y_n^+(F_o)$ ergibt sich in Abb.15 aus dem geometrischen Ort der Maxima der Kurven $(1-y/r_w)q/q_w$, wie bereits in Abschnitt 2.4 ausgeführt wurde (Glg.57d). Dabei ist auch ersichtlich, daß mit $\partial\vartheta/\partial x=0$ im Wärmestromdichteverlauf q/q_w keine ausgezeichnete Stelle verbunden ist. Daß bei kreiszylindrischen Wänden der Verlauf von q/q_w gegenüber demjenigen von y^+q/q_w weniger aufschlußreich ist, kommt weiterhin darin zum Ausdruck, daß die allen Werten F_o im Ursprung $y_w^+=1$ gemeinsame Tangente $q/q_w=2-y^+$ die Kurven q/q_w nicht in zwei Gruppen teilt, je nachdem ob sie teilweise oberhalb ($F_o<0$) oder ausschließlich unterhalb ($F_o>0$) dieser Tangente verlaufen. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte dieser Schluß aus dem bei parallelen Platten vorliegenden Verhalten gezogen werden. Der damit begangene Fehler wäre allerdings nicht sehr groß, wie die in Abb.15 eingezeichnete Tangente mit der Steigung $d(q/q_w)/d(y/r_w)=1$ im Vergleich zu der Kurve für $F_o=0$ im wandnahen Bereich zeigt.

Der Einfluß des Parameters F_o auf die Mischungstemperatur Θ_m, auf die Nußelt-Zahl Nu sowie auf die thermische Einlauflänge x_e geht aus den Abbildungen 27 bis 30 hervor. In Abb. 29 ist dabei insbesondere das bereits am Ende des Abschnitts 2.2.5 begründete Verhalten zu erkennen: $Nu\rightarrow-\infty$, $\Theta_m=0$ für $F_o=F_{od}$ - $Nu=0$, $\Theta_m=\Theta_{mb}>0$ für $F_o=F_{ob}$ - $Nu=Nu_{max}, \Theta_m=\Theta_{m\text{-}max}$ für $F_o\rightarrow+\infty$. Die Größen F_{od}, F_{ob}, Θ_{mb} und Nu_{max} nehmen dabei für jeden speziellen Fall I charakteristische Werte an.

4.1.2. PARALLELE PLATTEN, SYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

Der Wärmeaustausch bei laminarer Strömung zwischen parallelen Platten ist der einzige Fall, in dem sich die Stelle $\partial\vartheta/\partial x=0$ durch einen Wendepunkt im Temperaturprofil auszeichnet. In den beiden Abbildungen 16 und 18 ist diese Tatsache zu erkennen, besonders im Vergleich mit der laminaren Rohrströmung nach Abb.14 Die Abhängigkeit der Mischungstemperatur Θ_m und der Nußelt-Zahl Nu vom Parameter F_o ist aus den das Rohrbündel betreffenden Abbildungen 35 bis 37 zu entnehmen: In der Näherung, die das Rohrbündel durch die innere Hälfte eines Ringspalts bei quasisymmetrischem Wärmeaustausch ($r_o=r_c$) ersetzt, entspricht der Fall der parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch nach Glg.(196a) dem unteren Grenzwert p/d=0,952 ($r_o/r_1=r_c/r_1=1$). Die am Ende des Abschnitts 2.2.5 gegebenen Erläuterungen über die Beeinflussung des wandnormalen Wärmestromdichteverlaufs durch den Parameter F_o werden in Abb.17 veranschaulicht.

4.1.3. PARALLELE PLATTEN, ASYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

Der Temperaturverlauf Θ und die Wärmestromdichteverteilung q/q_w sind in den Abbildungen 18 und 19 für verschiedene Werte F_o wiedergegeben. Der Einfluß der Größe F_o auf Θ_m, Nu, Nu/Nu_q und auf $x_e/(d_h Pe)$ folgt aus den Abbildungen 27 bis 30 : Bei asymmetrischem Wärmeaustausch stellt die Strömung zwischen parallelen Platten den speziellen Fall $r_1/r_2=1$, $q_w=q_{w1}=q_{w2}$ des allgemeinen Falls eines Ringspalts mit einseitigem Wärmeaustausch dar.

4.1.4. DIE EBENE PLATTE

Da der Wärmeaustausch durch die exakten Berechnungen von Sparrow/Lin /4/ für die Wärmeflußverteilung $q_w=ax^m$ bekannt ist, wurden in der vorliegenden Arbeit nur die Näherungslösungen hergeleitet, die neben ihrer Einfachheit hauptsächlich den Vorteil größerer Anschaulichkeit besitzen. Die dabei gewonnenen Ergebnisse wurden bereits in Abschnitt 3.4 beschrieben und in den Abbildungen 7 bis 10 dargestellt.

4.1.5. DER RINGSPALT

Der Schubspannungsverlauf τ/τ_w ist in Abb.20 über der Abszisse $(r-r_i)/(r_c-r_i)$ aufgetragen. Der Index i ist für die innere Ringspalthälfte gleich 1 und für die äußere Ringspalthälfte gleich 2 zu setzen. Der Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung kommt in den Größen τ_w und r_c zum Ausdruck. Während sich in der äußeren Ringspalthälfte die Schubspannungen nur unwesentlich von dem beim Rohr und bei parallelen Platten vorhandenen linearen Verlauf unterscheiden, ergeben sich demgegenüber in der inneren Ringspalthälfte mit abnehmendem Radienverhältnis r_1/r_2 zunehmend starke Abweichungen.

Als Beispiel für diejenigen Fälle, in denen die Fläche, durch die der wandnormale Wärmefluß tritt, mit dem Abstand von der wärmeaustauschenden Wand zunimmt, sind in Abb.21 die Wärmestromdichteverteilungen q/q_w für 3 verschiedene Radienverhältnisse r_1/r_2 eines Ringspalts mit Wärmeaustausch am inneren Zylinder r_1 wiedergegeben. Die Neigungen der Kurven q/q_w an der wärmeaustauschenden Wand, die in der Darstellung $y^+q/q_w=f(y^+)$ für alle kreiszylindrischen Wände den Wert -1 annehmen, werden in der hier vorliegenden speziellen Form der Abszisse $(r-r_1)/(r_2-r_1)$ mit abnehmendem r_1/r_2 steiler. Aus diesem Grund können sich auch nur für verhältnismäßig große Radienverhältnisse r_1/r_2 in Verbindung mit genügend stark negativen Werten des Parameters F_o Maxima $d(q/q_w)/dr=0$ ausbilden, die dann meist auch mit Werten $q/q_w>1$ verbunden sind. Die Stelle $\partial\vartheta/\partial x=0$ liegt in Bezug auf diese Maxima in größerem Abstand zur wärmeaustauschenden Wand, während dies beim Rohr und beim Ringspalt, Wärmeaustausch am äußeren Zylinder, umgekehrt ist, wie der Vergleich mit Abb.15 und die Ausführungen in Abschnitt 2.4 zeigen. (Einheitlich für alle kreiszylindrischen Wände - T, A1, A2 und B - liegt diese Stelle also bei einem höheren Wert des Halbmessers r.)

Die nach Gleichung (157b) berechneten Temperaturverteilungen bei konstantem Wärmefluß q_w sind für verschiedene Werte des Radienverhältnisses r_1/r_2 in Abb.22 wiedergegeben. In der dabei gewählten Abszisse $(r-r_i)/(r_j-r_i)$ ist bei Wärmeaustausch am inneren Zylinder (Fall A1 - $q_w=q_{w1}$) $r_i=r_1$ und $r_j=r_2$ und bei Wärmeaustausch am äußeren Zylinder (Fall A2 - $q_w=q_{w2}$) entsprechend $r_i=r_2$ und $r_j=r_1$ zu setzen. Während für $q_w=q_{w2}$ die Abhängigkeit von r_1/r_2 gering ist, nimmt diese für $q_w=q_{w1}$ mit sinkenden Werten r_1/r_2 deutlich zu.

Der Einfluß des Parameters F_o auf die einzelnen Größen geht aus folgenden Abbildungen hervor: Für die Temperaturverteilung $\Theta((r-r_i)/(r_j-r_i),F_o=\text{konst.})$ bei verschiedenen Radienverhältnissen und Wärmeaustausch am inneren Zylinder aus den Abbildungen 23 bis 25 , bei Wärmeaustausch am äußeren Zylinder und $r_1/r_2=0,10$ aus Abb.26 , für die Mischungstemperatur $\Theta_m(r_1/r_2,F_o=\text{konst.})$ aus Abb.27, für die Nußelt-Zahl $Nu(r_1/r_2,F_o=\text{konst.})$ aus Abb.28 , für das Nußelt-Zahlen-Verhältnis $Nu/Nu_q(F_o,r_1/r_2=\text{konst.})$ aus Abb.29 und für die thermische Einlauflänge x_e in der Form $x_e/(d_h Pe)=f(r_1/r_2;F_o=\text{konst.})$ aus Abb.30.

In der inneren Ringspalthälfte strebt mit $r_1/r_2 \rightarrow 0$ das Geschwindigkeitsprofil der Rechteckform zu (s. $\varphi_{m1}=1$ in Abb.33). Der damit verbundene Geschwindigkeitsgradient $(d\varphi/dy)_w \rightarrow \infty$ führt zu $(d\Theta/dy)_w \rightarrow \infty$, $\Theta_m=1$, $Nu \rightarrow \infty$ und $x_e=0$, wie aus den Abbildungen 27, 28 und 30 hervorgeht.

Als Beispiele für Temperaturverteilungen bei Wärmeaustausch längs des inneren und äußeren Zylinders eines Ringspalts sind für den speziellen, hier mit quasisymmetrischem Wärmeaustausch bezeichneten Fall $r_o=r_c$ in den beiden Abbildungen 31 und 32 die Funktionen $\Theta=f_1((r-r_i)/(r_o-r_i),r_1/r_2=\text{konst.})$ und $(\vartheta-\vartheta_{w1})/(\vartheta_o-\vartheta_{w1})=f_2((r-r_1)/(r_2-r_1),r_1/r_2=\text{konst.})$ bei $q_{w1}=\text{konst.}$ und $q_{w2}=\text{konst.}\neq q_{w1}$ dargestellt. Aus Abb.32 sind dabei die Unterschiede in den Wandtemperaturen der beiden Zylinder ersichtlich.[++] In der Form $\Theta_{wc12}=(\vartheta_{w2}-\vartheta_o)/(\vartheta_{w1}-\vartheta_o)$ ist dieser Zusammenhang in Abb.33 in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 aufgetragen. Aus Abb.33 sind weiterhin zu entnehmen: Die in den Ringspalthälften 1 und 2 vorliegenden Werte der Mischungstemperaturen Θ_{m1} und Θ_{m2} einerseits bzw. der mittleren Geschwindigkeiten φ_{m1} und φ_{m2} andererseits, die Werte der über den Gesamtquerschnitt integrierten Mischungstemperatur ϑ_{m12} in der Form $\Theta_{m12}=(\vartheta_{m12}-\vartheta_{w1})/(\vartheta_o-\vartheta_{w1})$ und der mittleren Geschwindigkeit φ_{m12} sowie die durch die Gleichung (167) definierten Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2.

4.1.6. DAS ROHRBÜNDEL

Die vereinbarte Näherung $r(\tau=0)\cong r_c$ führt den Wärmeübergang beim Rohrbündel auf jenen in der inneren Hälfte eines Ringspalts mit quasisymmetrischem Wärmeaustausch zurück. Demzufolge können die in den Abbildungen 31 und 32 dargestellten Temperaturverteilungen im Bereich $r_1 < r < r_c$ sowie die in Abb.33 enthaltenen Größen $\varphi_{m1}=\varphi_{mB}$, $\Theta_{m1}=\Theta_{mB}$ und $Nu_1=Nu_B$ direckt übernommen werden. Umgekehrt gilt die in Abb.34 für das Rohrbündel mit p/d=1,61 bei Dreieckteilung (bzw. nach Glg.196c mit p/d=1,50 bei quadratischer Teilung) für verschiedene Werte von F_o wiedergegebene Temperaturverteilung Θ auch für die innere Ringspalthälfte bei $r_1/r_2=0{,}40$ und $r_o=r_c$. Die Zuordnung p/d - r_1/r_2, die aus den Gleichungen (151a), (196a) und (196b) folgt, ist in Abb.37 durch einige Wertepaare angegeben.

Der Einfluß des Parameters der Wärmeflußverteilung geht aus Abb. 35 für $\Theta_m(p/d,F_o=\text{konst.})$, aus Abb.36. für $Nu(p/d,F_o=\text{konst.})$ sowie aus Abb.37 für $Nu/Nu_q(F_o,p/d=\text{konst.})$ hervor. Für konstante Werte von F_o läßt sich die Abhängigkeit der Nußelt-Zahl vom Schrittverhältnis p/d durch Näherungsformeln angeben. Bei unveränderlichem Wärmefluß ($F_o=1$) zum Beispiel lauten diese, mit Hilfe der Abbildung 36 gewonnenen Gleichungen (die Werte in den Klammern geben den Gültigkeitsbereich sowie die maximalen Abweichungen gegenüber den nach Glg.202 ermittelten Ergebnissen an):

$$Nu = 1{,}4 + 7\left(\frac{p}{d}\right) \qquad (p/d < 2\,,\ \pm 1\%) \qquad (206a)$$

$$Nu = 7\left(\frac{p}{d}\right)^{1{,}15} \qquad (2 < p/d < 5\,,\ \pm 2{,}5\%) \qquad (206b)$$

$$Nu = 4\left(\frac{p}{d}\right)^{1{,}5} \qquad (5 < p/d < 20\,,\ \pm 1\%) \qquad (206c)$$

[++] Wie aus Abb.32 weiterhin hervorgeht, ist die Temperaturdifferenz $\vartheta-\vartheta_{w1}=0{,}35(\vartheta_c-\vartheta_{w1})$ näherungsweise für alle Radienverhältnisse r_1/r_2 an die Stelle $r-r_1=0{,}886(r_2-r_1)$ gebunden.

4.2. TURBULENTE STRÖMUNG

Im Vergleich zur laminaren Strömung werden bei der turbulenten Strömung das Geschwindigkeitsprofil $\varphi(y^+)$ zusätzlich von der Reynolds-Zahl und die Temperaturverteilung $\Theta(y^+)$ zusätzlich von der Reynolds- und von der Prandtl-Zahl beeinflußt. Bei der Wiedergabe der numerischen Ergebnisse in Tabellen und Diagrammen erscheinen diese beiden Größen, Re und Pr^+, entweder als unabhängige Veränderliche oder als Parameter. Durch eine sinnvolle Wahl der Veränderlichen läßt sich der Einfluß der Reynolds-Zahl für gewisse Zusammenhänge weitgehend eliminieren. Solche Fälle liegen z.B. vor bei der Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung in der Form $u/u^+=f(\eta)$ und der Temperaturverteilung in der Form $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta, Pr)$. Die Reynolds-Zahl ist hierbei implizit über die Schubspannungsgeschwindigkeit $u^+=\sqrt{\tau_w/\varrho}$ in dem dimensionslosen Wandabstand $\eta=yu^+/\nu$ -dieser hat selbst die Form einer Reynolds-Zahl- sowie in der Schubspannungstemperatur $\vartheta^+=q_w/(\varrho c_p u^+)$ enthalten.

Für den Bereich kleiner Prandtl-Zahlen zeigt es sich, daß die Einflüsse der Reynolds- und der Prandtl-Zahl auf die Wärmeübertragung ungefähr gleich groß sind und die Nußelt-Zahl nur noch vom Produkt dieser beiden Größen, Pe=Re Pr , abhängt: Nu=f(Pe). Zur Darstellung der Nußelt-Zahlen für mittlere und große Prandtl-Zahlen wird in der vorliegenden Arbeit eine vereinfachte Form der Gleichung (90) herangezogen:

$$Nu = \frac{Re\, Pr^+ \zeta/8}{1+f(Pr^+)\sqrt{\zeta/8}} \tag{207}$$

Diese Formel, ebenso wie das damit zusammenhängende logarithmische Temperaturgesetz, gelten grundsätzlich für alle diejenigen Fälle von Wärmeübertragungen, in denen einerseits das Geschwindigkeitsmaximum und das Temperaturoptimum an dieselbe Stelle fallen und andererseits die q/q_w- und die ε_m/ν-Verteilungen sich nicht allzusehr von dem der Herleitung zugrundegelegten Fall des Rohres unterscheiden, oder die Abweichungen davon sich in etwa kompensieren: In den Gleichungen (90) und (207) schließt der Reibungskoeffizient ζ implizit außer der Reynolds-Zahl auch noch den Einfluß geometrischer Parameter, wie z.B. das Schrittverhältnis p/d beim Rohrbündel mit ein (s. Abschnitt 4.2.5).

4.2.1. DAS ROHR

Die bereits durch die feinere Unterteilung bei der Auswahl der Parameter für die numerische Berechnung vorgenommene gesonderte Behandlung des Rohres gegenüber den nichtkreisförmigen Querschnitten (mit Ausnahme des Rohrbündels), findet bei der Darstellung der numerischen Ergebnisse ihre Fortsetzung in der Anzahl der aufgezeigten Zusammenhänge unter den einzelnen, hier interessierenden Größen. Dient ersteres hauptsächlich zur Erleichterung der Interpolation der für die restlichen Strömungsquerschnitte grober gestaffelten Ergebnisse (eine Einschränkung ist durch die mit den zusätzlichen geometrischen Parametern r_1/r_2 , p/d einerseits und den verschiedenen thermischen Randbedingungen A1 - A2 , PS - PAS andererseits verbundene Vervielfachung der Daten auferlegt), so hat letzeres seinen Grung darin, die Beschreibung der für die verschiedenen Fälle gleichermaßen gültigen Eigenschaften auf das einfachste, jedoch technisch wichtigste Beispiel zu beschränken.

a) Die Temperaturverteilung

Für konstanten Wärmefluß längs der Wand ist die Temperaturverteilung in fünf verschiedenen Auftragungen wiedergegeben. Die dabei gewählten unabhängigen Veränderlichen, die alle Funktionen des Wandabstandes sind, lauten :
$y/r_w = 1-y^+$ (Abb.38) - φ (Abb.40) - u/u^+ (Abb.41) - ηPr^+ (Abb.42) - η (Abb.43)
Über den Einfluß der Parameter Re und Pr^+ geben folgende Zusammenhänge Aufschluß (beim Übergang von η auf u/u^+ wird von der Beziehung $u/u^+=f(\eta)$ und beim Übergang von u/u^+ auf φ von der Proportionalität $u/u^+=c_u\varphi$, wobei $c_u=1/(\varphi_m\sqrt{\zeta/8})=f(Re)$ ist, Gebrauch gemacht) :

aa) Für kleine Prandtl-Zahlen folgt aus Glg.(88c), einschließlich der in Abschnitt 3.1.2.3 gegebenen Interpretation :

$(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f_1(y/r_w, Re\,Pr^+)=f_2(\eta Pr^+)=f_3(\eta,Pr^+)=f_4(u/u^+,Pr^+)=f_5(\varphi,Re,Pr^+)$

(Eine zusätzliche, leichte Abhängigkeit der Funktionen f_1 bis f_4 von Re und der Funktion f_2 von Pr^+ ist durch den Einfluß der Reynolds-Zahl auf den q/q_w-Verlauf einerseits und auf die Näherung $\eta_c Pr^+=f(RePr^+)$ andererseits bedingt.)

ab) Für mittlere bis große Prandtl-Zahlen (mit mittleren Prandtl-Zahlen sind Werte für Pr^+ in der Größenordnung 1 bezeichnet) erhält man nach Glg.(89b) :

$(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=\bar{f}_3(\eta,Pr^+)=\bar{f}_4(u/u^+,Pr^+)=\bar{f}_5(\varphi,Re,Pr^+)=\bar{f}_2(\eta Pr^+,Pr^+)=\bar{f}_1(y/r_w,Re,Pr^+)$

(In den Funktionen $\bar{f}_2$ bis $\bar{f}_4$ bleibt durch die Re-Abhängigkeit des q/q_w-Verlaufs noch ein geringer Einfluß der Reynolds-Zahl bestehen.)

ac) Für alle Prandtl-Zahlen gilt in der wärmeleitenden Unterschicht :
$(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=\eta Pr=(y/r_w)\eta_c Pr$ und zusätzlich in der laminaren (hydrodynamischen) Unterschicht $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=(u/u^+)Pr=\varphi Pr\, f(Re)$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die fünf Darstellungen der Temperaturverteilung in einfacher Weise interpretieren.

1) Die Abbildung 38 zeigt die Abhängigkeit des Temperaturverlaufs $\Theta(y/r_w)$ von der Reynolds- und von der Prandtl-Zahl. Während für kleine Werte von Pr^+ und Re das Temperaturprofil noch vergleichbar mit demjenigen bei laminarer Strömung ist, nimmt es für $Pr^+=1000$ praktisch Rechteckform an. Entsprechend der Funktion $f_1(y/r_w,RePr^+)$ gelten im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen die für $Pr^+=0{,}01$ eingezeichneten Kurven Re=konst. bei gleichem Wert des Produktes $RePr^+$ näherungsweise auch für andere Prandtl-Zahlen. Für Pr=0 und sämtliche Re weichen die Temperaturen $\Theta(y/r_w)$ nur unwesentlich von jenen des Wertepaares $Pr^+=0{,}01$ - $Re=4.10^3$ ab, sie sind deshalb in Abb.38 weggelassen.

Der für $Pr^+=1$, $Pr^+=10$ und $Re=3.10^4$ durch kleine Kreise angedeutete Temperaturverlauf folgt aus der Anwendung des mit Hilfe der Abb.43 gewonnenen logarithmischen Temperaturgesetzes. Dagegen zeigen die für $Pr^+=0{,}01$ und $Re=3.10^4$ eingezeichneten Punkte die Abweichung der für kleine Prandtl-Zahlen gültigen Näherungslösung Glg.(88c) von den nach dem genauen Verfahren bestimmten Ergebnissen.

2) Der Zusammenhang zwischen dem Temperatur- und dem Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl geht für $Re=3.10^4$ aus Abb.40 hervor: $\Theta=f(\varphi,Re=3.10^4,Pr^+=\text{konst.})$. Wie man sieht, besteht auch unter der Voraussetzung $\varepsilon_h=\varepsilon_m$ für $Pr^+=Pr=1$ keine Identität $\varphi\equiv\Theta$ (vgl. Ende des Abschnitts 3.4.3). Die beste Übereinstimmung $\varphi\approx\Theta$ erhält man mit $\varepsilon_h/\varepsilon_m=\text{konst.}$ für einen leicht über 1 liegenden Wert von Pr^+.

Das Temperaturprofil baut sich bei kleinen Prandtl-Zahlen vorwiegend in einem Bereich auf, in dem die Geschwindigkeit bereits nahe ihrem Maximalwert ist, während umgekehrt bei großen Prandtl-Zahlen die Temperatur sich schon ab kleinen Beträgen der Geschwindigkeit - und damit umso mehr ab verschwindend kleinen Wandabständen - nicht mehr wesentlich ändert. Letzteres erklärt, warum (mit Ausnahme der Fälle von Kombinationen kleiner Prandtl- und kleiner Reynolds-Zahlen) zur Bestimmung der Größe der Teilabschnitte Δy^+ bei der numerischen Berechnung eine Abstufung der Geschwindigkeit oder ein diesem ähnliches Verfahren zugrundezulegen ist. Die in den Absätzen aa und ab aufgezeigte Abhängigkeit der Funktionen f_5 und $\bar{f}_5$ von der Reynolds-Zahl erweist sich in den Kurvenabschnitten rechts (in Richtung $\varphi\rightarrow1$, $\Theta\rightarrow1$) der gekrümmten Mittelabschnitte als gering.

3) In Abb.41 sind die Temperaturverteilungen in der Form $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ für verschiedene Prandtl-Zahlen und $Re=3.10^4$ über der Geschwindigkeitsverteilung u/u^+ aufgetragen (zur besseren Darstellung sind die Werte $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ mit den an den Kurven vermerkten Faktoren multipliziert, die Bezifferung der Ordinatenskala ist also durch diese Faktoren zu dividieren). Die Kurven der beiden Abbildungen 40 und 41 lassen sich durch Maßstabänderung der Koordinaten ineinander überführen: Es gilt $u/u^+=c_u\varphi$ und $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=c_t\,\Theta$, wobei die Proportionalitätsfaktoren $c_u=1/(\varphi_m\sqrt{\zeta/8})$ und $c_t=\sqrt{\zeta/8}\,RePr^+/(Nu\,\Theta_m)$ lauten. Aus diesem Grund ist den Darstellungen Abb.40 und Abb.41 auch folgendes Verhalten gemeinsam:

Ab mittleren Prandtl-Zahlen entsprechen die vorwiegend einen linearen Verlauf aufweisenden Kurvenabschnitte zu beiden Seiten der deutlich gekrümmten Mittelabschnitte (letztere entfallen für Prandtl-Zahlen in der Nähe von 1) dem Geltungsbereich der in der wärmeleitenden Unterschicht - diese liegt für $Pr^+\geq1$ innerhalb der laminaren - einerseits und in der turbulenten Kernströmung andererseits vorliegenden Gesetzmäßigkeiten: Nach Absatz ac gilt $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=(u/u^+)Pr^+=\varphi Pr^+f(Re)$ und aus den beiden logarithmischen Gesetzen für die Geschwindigkeit und für die Temperatur folgt $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=(a_t/a)u/u^++c_t(Pr^+)=\varphi f(Re)u/u^++c_t(Pr^+)$. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei kleinen Prandtl-Zahlen. Zwar bleibt in der laminaren Unterschicht, die bis ca $\eta=u/u^+=5$ reicht, die Proportionalität zwischen der Temperatur und der Geschwindigkeit bestehen, dagegen kann sich die wärmeleitende Unterschicht bis in die gekrümmten Mittelabschnitte der Kurven, oder auch darüber hinaus, erstrecken. Die mit Annäherung an die Rohrmitte ($\varphi\rightarrow1$) vorliegenden linearen Kurvenabschnitte hängen damit zusammen, daß sowohl die Geschwindigkeits- als auch die Temperaturverteilung dort parabolische Form annehmen (gültig für sämtliche Prandtl-Zahlen): Wegen $d\varepsilon_m/dy^+=0$ an der Stelle $y^+=0$ - näherungsweise gilt ε_m/ν=konst. über einen größeren Bereich y^+ - folgt mit $q/q_w \sim \tau/\tau_w = y^+$: $(u_o-u)/u^+ \sim y^{+2}$ sowie $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta-\vartheta_o)/\vartheta^+ \sim y^{+2}$ und damit $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ \cong A+Bu/u^+$.

Ein geringfügiger Unterschied zwischen den beiden Abbildungen 40 und 41 in Bezug auf den Bereich der Prandtl-Zahlen nahe 1 ergibt sich dadurch, daß im Gegensatz zu $\Theta \approx \varphi$ die beste Übereinstimmung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ \cong u/u^+$ an eine Prandtl-Zahl Pr^+ leicht unterhalb des Wertes 1 gebunden ist. Dies liegt daran, daß die für alle Reynolds-Zahlen und für Pr nahe dem Wert 1 gültige Näherung $Nu=(\zeta/8)RePr^+/1{,}07$ zu einem schwacn über 1 liegenden Wert des Quotienten $c_t/c_u=1{,}07\varphi_m/\Theta_m$ führt (im Bereich $Re=4.10^3 \ldots 3.10^6$ steigt φ_m nach Tab.2 von 0,74 auf 0,88 und Θ_m nach Tab.15 von 0,79 auf 0,88 an).

4) Die Temperaturverteilung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta Pr^+, Pr^+=\text{konst.})$, einschließlich der Näherungslösung für kleine Prandtl-Zahlen Glg.(88c), ist in Abb.42 dargestellt. Das Einmünden aller Kurven Pr^+=konst. in den innerhalb der wärmeleitenden Unterschicht vorgeschriebenen Verlauf $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=\eta Pr^+$ sowie die im vollturbulenten Bereich näherungsweise zulässige Wiedergabe des Temperaturverlaufs durch ein logarithmisches Gesetz der Form $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+= a_t \ln\eta + c_t(Pr^+)$ sind deutlich zu erkennen. In der Übergangszone sind die durch molekularen und turbulenten Austausch übertragenen Wärmemengen für Pr nahe 1 von derselben Größenordnung, für $Pr \gg 1$ überwiegen dagegen letztere schon vor Annäherung an $\eta=25$.

Für kleine Prandtl-Zahlen läßt sich die Temperaturverteilung näherungsweise durch eine nur von ηPr^+ abhängige Funktion $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta Pr^+)$ wiedergeben, wie bereits in Abschnitt 3.1.2.3 beschrieben wurde. Dieser Zusammenhang wurde auch experimentell von V.I. Subbotin et al. für Flüssigmetalle nachgewiesen /27/:

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \eta Pr \qquad \text{(für } 0<\eta Pr<1)$$

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = 1{,}87\ \ln(\eta Pr+1) + 0{,}065\ \eta Pr - 0{,}36 \qquad \text{(für } 1<\eta Pr<11{,}7)$$

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = 2{,}5\ \ln(\eta Pr) - 1 \qquad \text{(für } \eta Pr>11{,}7)$$

Dieser Temperaturverlauf ($\varepsilon_h/\varepsilon_m=1$ gesetzt) deckt sich bis $\eta Pr^+=20$ mit der in Abb.42 für $Pr^+=0{,}1$ eingezeichneten Kurve $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$, für höhere Werte ηPr^+ liegt er leicht darunter. Berücksichtigt man, daß der Quotient $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ für niedrige Prandtl-Zahlen kleiner als 1 ist, so kann sich die Übereinstimmung mit den für $Pr^+=0{,}01$ und $Pr^+=0{,}03$ berechneten Temperaturen noch verbessern.

5) Die Abhängigkeit des Temperaturverlaufs $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ vom Wandabstand η ist in Abb.43 dargestellt (die Werte der linken Ordinatenskala sind mit den Nennern der am rechten Ende der Kurven vermerkten Maßstäbe zu multiplizieren). Die strichpunktiert gezeichneten Geraden mit nur unwesentlich voneinander abweichenden Steigungen (erscheint durch die unterschiedlichen Maßstäbe verzerrt) zeigen die Abweichungen des logarithmischen Temperaturgesetzes von dem mit Hilfe des genauen Verfahrens ermittelten Verlauf. Als untere

Grenze für die Gültigkeit dieser Näherung ergibt sich $\eta_{min}=25$. Dies bestätigt die in Abschnitt 3.1.2.4 aus der Rückführung der Differentialgleichung der Temperatur auf eine solche der Geschwindigkeit gefolgerte näherungsweise Übereinstimmung der unteren Grenzen der Gültigkeit der beiden diesbezüglichen logarithmischen Gesetze.

Die Größe $c_t(Pr^+)$ ist in Abb.43 über Pr^+ aufgetragen (Ordinatenskala rechts) und zusammen mit a_t zusätzlich in der in Abb.43 enthaltenen Tabelle für verschiedene Werte von Pr^+ angegeben. Mit Ausnahme mittlerer Prandtl-Zahlen ist der Einfluß der Reynolds-Zahl auf $c_t(Pr^+)$ unbedeutend. Für $Pr^+=10...1000$ läßt sich $c_t(Pr^+)$ mit guter Genauigkeit durch folgende Gleichung annähern:

$$c_t(Pr^+) = 9{,}5\ Pr^{+0{,}79} \tag{208}$$

Für den Vergleich der Temperaturverteilungen mit experimentell gewonnenen Ergebnissen ist nun die Kenntnis des Quotienten $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ notwendig, wobei insbesondere auch die Abhängigkeit vom Wandabstand - wenigstens aber abschnittsweise - inbegriffen ist. Von letzterem, der Aufteilung in einzelne Bereiche, wird im folgenden Gebrauch gemacht. Die nachstehend beschriebene Näherung ist auf diejenigen Prandtl-Zahlen beschränkt, für die das logarithmische Temperaturgesetz gültig ist.

Da zuverlässige Daten über den Zusammenhang $\varepsilon_h/\varepsilon_m=f(Re,Pr,y^+)$ fehlen, sei die einfachste Art einer Differenzierung, die Gliederung in zwei Teilabschnitte, zugrundegelegt: Teilabschnitt 1 für Wandabstände $0 \leq \eta < 25$ und Teilabschnitt 2 für Wandabstände $25 \leq \eta < \eta_c$. In Teilabschnitt 1 ist im Bereich der wärmeleitenden Unterschicht der Einfluß von $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ auf die Temperaturverteilung von untergeordneter Bedeutung, es gilt für alle Werte Re und Pr die Beziehung $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=\eta Pr$. In der daran anschließenden Übergangszone bis zum Beginn des vollturbulenten Gebiets ($\eta=25$) ist ein in verwickelter Art und Weise vorliegender Einfluß der Prandtl-Zahl Pr, der Reynolds-Zahl Re und des Wandabstandes η auf den Wert der Größe $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ zu erwarten. Diese Vorgänge im einzelnen bleiben hier jedoch ausgespart zugunsten einer Beschränkung auf den wirksamen Wert $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}$, der zur Temperatur $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ am Ende des Teilabschnitts 1 führt. Die Definitionsgleichung für $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}$ lautet also:

$$\left(\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+}\right)_{\eta=25} = \left(\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m}\ \frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+}\right)_{\eta=25}\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_{25} \tag{209a}$$

Für den Teilabschnitt 2, der im Rahmen dieser Näherung in erster Linie interessiert, wird angenommen, daß ein über die gesamte Breite $\eta=25...\eta_c$ gültiger, konstanter Wert des Quotienten $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_2$ existiert. Mit diesen beiden Ansätzen läßt sich der Temperaturverlauf $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ in Teilabschnitt 2 wie folgt angeben:

$$\frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} = \left(\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m}\ \frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+}\right)\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_2 + \left(\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_m}\ \frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+}\right)_{\eta=25}\left[\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_{25} - \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_2\right] \tag{209b}$$

Über die Größe des Quotienten $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_2$ geben die Versuche von R. E. Johnk et al./28/ Aufschluß, die an einem von Luft durchströmten und mit konstantem Wärmefluß beheizten Rohr vorgenommen wurden. In Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl wurden Werte für $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ bestimmt, wobei die Annahme zugrundelag, daß im mittleren Teil des Strömungsquerschnitts die Austauschgrößen ε_m für den Impuls und ε_h für die Wärme konstant sind. (Die Gültigkeit dieser Annahme wurde durch eine geeignete Wahl der unabhängigen Veränderlichen bei der Auftragung der Temperaturverteilung für $Re=3{,}5.10^4$ in dem Bereich $r=0....0{,}85r_w$ bestätigt.) Die Auswertung der Meßergebnisse ergab folgende Werte für den Quotienten $\varepsilon_h/\varepsilon_m$: 1,23 (Re=18000) - 1,30 (Re=35000) - 1,24 (Re=71000).

Im Gegensatz zu den aus der Theorie von R.Jenkins (/11/-Abb.13) folgenden Ergebnissen sind also auch für $Pr<1$ noch Werte $\varepsilon_h/\varepsilon_m>1$ möglich. Dieser Sachverhalt geht auch aus einer analytischen Untersuchung von T.Mizushina et al./29/ hervor, in der für $Pr=0{,}74$ ebenfalls Werte $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ nahe 1,3 berechnet wurden. Aus Messungen an Quecksilber ($Pr=0{,}02$) wurden von S.E.Isakoff et al./30/ selbst für kleine Prandtl-Zahlen in Verbindung mit sehr hohen Reynolds-Zahlen Werte $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ größer als 1 festgestellt.

Für den Teilabschnitt 1 wird nun in Ermangelung entsprechender Daten $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ für Prandtl-Zahlen nahe 1 in erster Näherung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}=1$ gesetzt (für große Prandtl-Zahlen sind Werte $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}>1$ zu erwarten). Wendet man auf die Gleichung (209b) das logarithmische Temperaturgesetz $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=a\ln\eta+c(Pr^+)$ an, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta_w-\vartheta}{\vartheta^+} &= a'\ln\eta + c'(Pr) \\ \text{mit}\qquad a' &= a\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_2 \\ \text{und}\qquad c'(Pr) &= a\ln(25)\left[\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_{25}-\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_2\right] + c(Pr)\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}\right)_{25} \end{aligned}\right\}\quad(209c)$$

Setzt man die für $Re=3.10^4$ ermittelten Werte: $a=3{,}17$ - $c(Pr^+)=-0{,}207$ sowie $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}=1$ und $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_2=1{,}30$ in die Gleichung (209c) ein ($(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=2{,}44\ln\eta+2{,}15$), so ergibt sich im Vergleich zu den von R.E.Johnk et al./28/ einerseits und von R.G.Deissler et al./31/ andererseits an Luft gemessenen Temperaturverteilungen eine gute Übereinstimmung (die maximalen Abweichungen betragen weniger als 5 Prozent). R.E.Johnk et al. beschränken die Gültigkeit des von ihnen angegebenen logarithmischen Gesetzes $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=a_1\ln\eta+c_1(Pr)$ auf den Bereich $\eta=30$ bis $\eta=200...300$. Die Koeffizienten a_1 und $c_1(Pr)$ nehmen dabei Werte zwischen $a_1=2{,}4$ - $c_1=3{,}06$ (Re=18000) und $a_1=2{,}16$ - $c_1=3{,}72$ (Re=71000), bzw. im Mittel für $Re>25000$ Werte von $a_1=2{,}2$ und $c_1=3{,}3$ an. (Der Einfluß von Re auf die in Tab.17 enthaltenen Koeffizienten a_{rp} und c_{rp} wirkt sich im gleichen Sinn, wie hier angegeben, aus.) Für Wandabstände $\eta>200...300$ nehmen die Steigungen der Kurven $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta)$ in der halblogarithmischen Auftragung zu, was bei einer Aufrechterhaltung des logarithmischen Gesetzes im Bereich $\eta=30$ bis $\eta=\eta_c$ zu höheren Werten des Koeffizienten a_1 führt. Dasselbe Verhalten ist auch in Abb.43 zu erkennen: Hier ergibt sich für $\eta=30...200$ ein Koeffizient $a=2{,}9$ (gegenüber $a=3{,}17$ im Bereich $\eta=25...\eta_c$), der nach Division durch $\varepsilon_h/\varepsilon_m=1{,}30$ den von R.E.Johnk et al. für $Re=3{,}5.10^4$ angegebenen Wert $a_1=2{,}23$ liefert.

In Tab.17 sind für die verschiedenen hier behandelten Strömungsquerschnitte - formal auch angewandt auf die Fälle A1 und PAS, für die die Herleitung in Abschnitt 3.1.2.4 nicht gilt - die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ in Abhängigkeit von der Prandtl- und von der Reynolds-Zahl für q_w=konst. zusammengestellt. Diese Koeffizienten wurden nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate für die Gesamtheit der über η=25 berechneten Temperaturen ermittelt: a_{rp} und c_{rp} gelten für die jeweils angegebenen Reynolds- und Prandtl-Zahlen; a_p und c_p gelten für Pr^+=konst. und die in Abhängigkeit von Pr^+ angegebenen Re-Bereiche (die untere Grenze $Re_T=10^4$ ist durch den Gültigkeitsbereich des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes und die obere Grenze durch die mit zunehmender Prandtl-Zahl verbundene Genauigkeitsabnahme der numerischen Ergebnisse - s. Einleitung des Abschnitts 4 - bedingt); der Koeffizient a ist der für Pr^+=1...1000 und für die einzelnen Re-Bereiche durch Probieren gewonnene Bestwert für nur von der Prandtl-Zahl abhängige Koeffizienten c. Die Werte e_i geben in Prozent die mittleren quadratischen Abweichungen gegenüber den berechneten Temperaturen an: e_{pr} in Abhängigkeit von Re_T und Pr^+, e_p in Abhängigkeit von Pr^+ unter Zugrundelegung von a_p und c_p; e in Abhängigkeit von Pr^+, e_m für Pr^+=1...1000 und die einzelnen Re-Bereiche unter Zugrundelegung von a und c. Die mittleren Abweichungen der mit a_{rp} und c_{rp} erhaltenen Näherungen sind von folgenden Größenordnungen: 1% (Pr^+=1) - 0,5% (Pr^+=3) - 0,3% (Pr^+=10) - 0,1% (Pr^+=100) - <0,05% (Pr^+=1000). Bei der Koeffizientenbestimmung unter Heranziehung sämtlicher Reynolds-Zahlen sind die Fälle mit hohem Re_T gegenüber solchen mit niedrigem Re_T durch die höhere Anzahl von Teilabszissen η>25 mit größerem Gewicht beteiligt. Für Pr^+=konst. hängen die Koeffizienten a_{rp} von der Reynolds-Zahl ab, dagegen ist der Einfluß von Pr^+ für Re=konst. nur gering (vgl. Abschnitt 3.1.2.4).

Es ist nun noch interessant zu wissen, in welchem Maß die Nußelt-Zahl von den Vorgängen in den einzelnen Bereichen des Strömungsquerschnitts - und hier insbesondere bei welchem Verhältnis von molekularem und turbulenten Anteil am Wärmeaustausch - beeinflußt wird. Hierüber gibt die Abbildung 43 einen anschaulichen Einblick. Aus der Beziehung (s. Absatz c in Abschnitt 4.2.4.2)

$$Nu = \frac{RePr\sqrt{\zeta/8}}{\Theta_m(\vartheta_w-\vartheta_o)/\vartheta^+} \tag{210}$$

ist zu ersehen, daß die Nußelt-Zahl dem Maximalwert $(\vartheta_w-\vartheta_o)/\vartheta^+$ der Temperaturverteilung $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ umgekehrt proportional ist. Der Verlauf der Kurven $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ gibt also über den Wert des Quotienten $(\vartheta_w-\vartheta)/(\vartheta_w-\vartheta_o)$ für jede Stelle η den Anteil an der Bildung der Nußelt-Zahl an. In Abb.43 werden durch die halblogarithmische Darstellung besonders die Vorgänge in dem wichtigen Bereich großer Wandnähe hervorgehoben. Es zeigt sich nun das interessante Verhalten, daß für große Prandtl-Zahlen der größte Teil des Temperaturanstiegs bereits in der wärmeleitenden Unterschicht und in demjenigen Bereich der daran anschließenden Übergangszone stattfindet, in dem die durch molekularen und turbulenten Austausch bedingten Anteile von derselben Größenordnung sind. (Die Wandabstände η_b mit $q_t=q_m$ befinden sich ungefähr an der Stelle, an der sich die Kurven ηPr^+ und $a\ln\eta+c(Pr^+)$ schneiden, wie man sich mit Hilfe der Abb.5 leicht überzeugt.) Diese Tatsache erklärt, warum der Einfluß der Prandtl-Zahl auf Nu mit steigendem Pr abnimmt (gekennzeichnet durch die Abnahme des Exponenten d in der Beziehung $Nu=bRe^cPr^d$). Ein gleichartiges Verhalten liegt auch bei kleinen Prandtl-Zahlen vor (für $Re=3.10^4$ ergibt sich im mittleren Strömungsabschnitt mit $\eta_c=813$ aus $Pr^+\varepsilon_m/\nu \cong 0{,}07\eta_c Pr^+$: $q_t/q_m=0{,}6$ für $Pr^+=0{,}01$ und $q_t/q_m=5{,}7$ für $Pr^+=0{,}1$). Der Einfluß der Prandtl-Zahl auf die Nußelt-Zahl ist bei mittleren Prandtl-Zahlen am größten: Der Anteil des Temperaturanstiegs im Bereich $q_t/q_m \gg 1$ (d.h. $1+Pr^+\varepsilon_m/\nu \rightarrow Pr^+\varepsilon_m/\nu$) überwiegt jenen im Bereich $q_t/q_m \ll 1$. Diese Eigenschaft ist umso stärker ausgeprägt, je größer die Reynolds-Zahl ist: In Bezug auf die in Abb.43 dargestellten Kurven drückt sich eine Erhöhung von Re näherungsweise in einer Zunahme der Temperatur $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+$ längs der in das Gebiet $\eta>\eta_c(Re=3.10^4)=813$ verlängerten Gerade $a\ln\eta+c(Pr^+)$ aus, während im Bereich $q_t/q_m \ll 1$ keine wesentliche Änderung eintritt. Auf diese Zusammenhänge wird auch nochmals in den zu Abb.50 gegebenen Erläuterungen eingegangen.

Einige Bemerkungen sind an dieser Stelle noch bezüglich des ε_m/ν-Wandgesetzes angebracht. Aus den durch die Theorie einerseits und durch das Experiment (Index e) andererseits für hohe Prandtl-Zahlen gewonnenen Beziehungen $Nu=bRe^c Pr^{+d}$ und $Nu_e=b_e Re^c Pr^d$ läßt sich ein für die Nußelt-Zahl wirksamer Wert des Quotienten $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ definieren: $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}=(b_e/b)^{1/d}$ für $Nu=Nu_e$. (Die Exponenten c und d ändern sich bei hohen Prandtl-Zahlen nur wenig. Weichen c und d aus Theorie und Experiment jeweils gegenseitig voneinander ab, so können sie trotzdem im allgemeinen ohne große Einbuße an Genauigkeit durch entsprechende Anpassung der Koeffizienten b auf einheitliche Werte zurückgeführt werden.) Da der Koeffizient d für große Prandtl-Zahlen klein ist, nimmt der Quotient $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}$ schon bei geringen Abweichungen zwischen b und b_e verhältnismäßig große Werte an. Ob diese die tatsächlich vorliegenden Zusammenhänge richtig wiedergeben, hängt ausschlaggebend von der Güte des der Theorie zugrundegelegten ε_m/ν-Wandgesetzes ab. Aus diesem Grund ist es auch umgekehrt nicht möglich, ohne die genaue Kenntnis von $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ aus dem Grad der Übereinstimmung zwischen den für große Prandtl-Zahlen experimentell und analytisch bestimmten Nußelt-Zahlen eindeutige Schlüsse über die Güte des gewählten ε_m/ν-Gesetzes zu ziehen.

Die hier geschilderten Gesichtspunkte sind zu bedenken, wenn die mit dem ε_m/ν-Wandgesetz von R.G.Deissler /31/

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = n^2\eta\,(u/u^+)\left[1 - \exp(n^2\eta u/u^+)\right] \qquad \text{mit } n=0{,}124 \qquad (211)$$

und die mit dem ε_m/ν-Wandgesetz (1) von H.Reichardt /6/ berechneten Nußelt-Zahlen mit Meßergebnissen verglichen werden. Für $Pr=Pr^+=100$ sind die von Deissler ermittelten Nußelt-Zahlen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment (z.B. von Friend et al. /47/), während die in der vorliegenden Arbeit berechneten Werte um etwa 25 Prozent zu niedrig liegen (s. Abb.57). Die beiden Ansätze Glg.(1) und Glg.(211) unterscheiden sich z.B. für $\eta=3$ – nach Abb.43 ein für $Nu(Pr^+=100)$ entscheidender Wandabstand – um fast den Faktor 3. Dieser Faktor entspricht andererseits ungefähr dem Wert des Quotienten $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}$, den man aus der obenangeführten Beziehung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{Nu}=(b_e/b)^{1/d}$ für $b_e/b=1{,}25$ und $d=0{,}25$ (vgl. Abb.51) erhält. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß bei hohen Prandtl-Zahlen die Abweichungen zwischen den theoretisch und experimentell bestimmten Nußelt-Zahlen auch einen Anhaltspunkt über die damit verbundenen Abweichungen der Temperaturverteilungen im

Gültigkeitsbereich des logarithmischen Gesetzes geben: Da sich nach Abb.43 die Temperaturen in diesem Bereich nur verhältnismäßig wenig ändern, kann in erster Näherung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}=b_e/b$ gesetzt werden.

In Verbindung mit Abb.43 wird abschließend noch auf folgendes hingewiesen: Überträgt man sinngemäß die Definition der Dicke η_h der laminaren, hydrodynamischen Unterschicht - Ort der Ablösung der Kurve $u/u^+=f(\eta)$ vom Verlauf $u/u^+=\eta$ ($\eta_h=5$) - auf die Dicke η_t der wärmeleitenden Unterschicht - Ort der Ablösung der Kurve $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta,Pr,Re)$ vom Verlauf $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=\eta Pr$ - so wird für kleine Prandtl-Zahlen wegen $\eta_t>\eta_h$ durch den überlagerten Einfluß der bereits spürbaren Abnahme von q/q_w der Wert η_t etwas verfälscht.

6) Der Einfluß der Wärmeflußverteilung F_o auf den Temperaturverlauf $\Theta(y/r_w)$ geht aus Abb.39 hervor. Dieser Einfluß kommt bei der Temperaturverteilung noch deutlicher zum Ausdruck als bei der Nußelt-Zahl, wie das Beispiel $Pr^+=1$ im Vergleich zu Abb.54 zeigt.

b) Die wandnormale Wärmestromdichteverteilung

Als Beispiele für den Verlauf der wandnormalen Wärmestromdichte q/q_w sind die beiden folgenden Darstellungen gewählt: In Abb.44 sind für den Fall konstanter Wandtemperatur die Funktionen q/q_w und $(q/q_w)/(\tau/\tau_w)$ für $Re=3.10^4$ und für verschiedene Prandtl-Zahlen im Bereich $Pr^+=0...1000$ über dem Wandabstand y/r_w aufgetragen. Die strichpunktiert eingezeichnete Gerade entspricht dem in Abschnitt 3.1.2.3 beschriebenen Näherungsansatz $(q/q_w)/(\tau/\tau_w)=1+c(y/r_w)$ für $Pr^+=0{,}01$. In Abb.45 ist die Abhängigkeit des q/q_w-Verlaufs vom Parameter F_o für $Pr^+=0{,}01$ und $Re=3.10^4$ veranschaulicht. Die Kurve mit $F_o=1$, d.h. q_w=konst., gilt für alle Prandtl-Zahlen.

c) Die Mischungstemperatur

Der Einfluß der Prandtl- und der Reynolds-Zahl auf die Mischungstemperatur Θ_m geht aus Abb.46 hervor. Für sehr kleine Prandtl-Zahlen kann Θ_m innerhalb eines bestimmten Bereichs kleiner Reynolds-Zahlen (für Pr=0 für alle Re) mit abnehmender Reynolds-Zahl ansteigen. Dies liegt daran, daß das Integral $\int\varphi\Theta dy^{+2}$ in Glg.(21a) gegenüber der mittleren Geschwindigkeit φ_m von der Reynolds-Zahl weniger beeinflußt wird: Im wandnahen Gebiet, in dem sich die Unterschiede der Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit von Re hauptsächlich ausdrücken, sind die Temperaturen noch verhältnismäßig klein. Die Mischungstemperatur Θ_m für konstante Werte des Parameters F_o ist in Abb.47 über der Prandtl-Zahl Pr^+ aufgetragen ($Re=3.10^4$). Weitere Angaben über den Zusammenhang $\Theta_m=f(F_o,Re,Pr^+)$ finden sich in den Tabellen 10 und 15.

d) Die Nußelt-Zahl

Für konstanten Wärmefluß sind die Nußelt-Zahlen Nu, oder Koeffizienten, mit Hilfe derer sie sich berechnen lassen, in den Abbildungen 48 bis 53 dargestellt. Die Gegenüberstellung mit experimentell gewonnenen Ergebnissen ist in den Abbildungen 55 bis 58 vorgenommen. Der Einfluß der Wärmeflußverteilung auf die Nußelt-Zahl geht aus Abb.54 hervor.

1) In Abb.48 sind für q_w=konst. und Pr=0 die Nußelt-Zahlen in Abhängigkeit von Re für das Rohr (T), für parallele Platten bei symmetrischem (PS) bzw. asymmetrischem (PAS) Wärmeaustausch, für den Ringspalt bei Wärmeaustausch am inneren Zylinder (A1) und

für das Rohrbündel dargestellt. Die Nußelt-Zahlen für den Ringspalt bei Wärmeaustausch am äußeren Zylinder liegen zwischen den Werten der Kurven PAS und T. Durch das Völligerwerden der Geschwindigkeitsprofile - für Pr=0 hängt Nu, wie im Fall der laminaren Strömung, nur vom φ-Verlauf ab - steigt Nu mit Re leicht an.

2) Eine Trennung der durch Molekularbewegung einerseits und durch Turbulenz andererseits übertragenen Anteile am Wärmeaustausch führt zu den in Abb.49 eingezeichneten Ergebnissen. In der Darstellung $Nu=f(Re, Pr^{+}=\text{konst.})$ unterscheiden sich die Kurvenverläufe für kleine Prandtl-Zahlen grundlegend von denen für mittlere bis große Prandtl-Zahlen (mit abnehmendem Pr geht der Einfluß von Re auf Nu zurück). Zieht man dagegen von $Nu(Re,Pr^{+})$ den durch reine Wärmeleitung bedingten Anteil $Nu(Re,Pr=0)$ ab, so nehmen für alle Prandtl-Zahlen die Kurven $Nu-Nu(Re,Pr=0)=f(Re,Pr^{+}=\text{konst.})$ in der doppeltlogarithmischen Auftragung einheitlich einen vorwiegend linearen Verlauf mit nahezu gleicher Steigung an (gestrichelte Linien). Um die nur geringfügige Re-Abhängigkeit der Funktion $Nu(Re,Pr=0)$ (s. Abb.48) zu umgehen, sind in Abb.49 auch noch die mit der bei turbulenter Strömung kleinstmöglichen Nußelt-Zahl $Nu_{min}=Nu(Re=4.10^{3},Pr=0)$ gebildeten Differenzen $Nu-Nu_{min}=f(Re,Pr^{+})$ eingetragen (strichpunktierte Linien). Schließt man Reynolds-Zahlen unter 10^{4} aus, so weist diese Funktion gegenüber $Nu-Nu(Re,Pr=0)=f(Re,Pr^{+})$ den linearen Verlauf in der doppeltlogarithmischen Darstellung sogar noch deutlicher auf. Die Werte c der leicht von Pr^{+} abhängigen Steigungen, die dem Exponenten der Reynolds-Zahl in der Gleichung

$$Nu = Nu_{min} + bRe^{c}Pr^{+d} \tag{212}$$

entsprechen, sind in Abb.51 wiedergegeben.

3) Wie bereits in Zusammenhang mit der Abb.43 aufgezeigt wurde, geht der Einfluß der Prandtl-Zahl auf die Nußelt-Zahl mit Annäherung sowohl an sehr kleine als auch an sehr große Prandtl-Zahlen zurück. Dieser Sachverhalt kommt in Abb.50 durch den Verlauf der Neigungen an die Kurven $Nu=f(Pr^{+},Re=\text{konst.})$ zum Ausdruck. Die Prandtl-Zahlen Pr_1^{+}, für die der Einfluß auf die Nußelt-Zahl am größten ist, hängen von der Reynolds-Zahl ab. In Abb.50 ergeben sich Werte Pr_1^{+}, die ungefähr auf einer Geraden zwischen den Wertepaaren $Pr_1^{+}=0,15$ - $Re=3.10^{6}$ und $Pr_1^{+}=0,8$ - $Re=4.10^{3}$ liegen. Während die Neigungen an die Kurven $Nu=f(Pr^{+},Re=\text{konst.})$ mit Annäherung an $Pr=0$ verschwinden - verbunden mit $d \longrightarrow 0$ in der Beziehung $Nu=bRe^{c}Pr^{+d}$ - bleibt ein geringer Einfluß der Reynolds-Zahl für $Pr \rightarrow 0$ erhalten, wie aus Abb.48 hervorgeht.

Um die Exponenten d der Prandtl-Zahl in Glg.(212) zu bestimmen, wurden in Abb.50, wie bereits in Abb.49, den Kurven Nu auch jene der Differenzen $Nu-Nu_{min}$ hinzugefügt. Die daraus entnommenen Neigungen $d'(Re,Pr^{+})$ wurden für die Auftragung in Abb.51 dahingehend korrigiert, daß die für kleine Prandtl-Zahlen bestehende leichte Reynolds-Abhängigkeit des Koeffizienten $b'(Re,Pr^{+})$ durch einen mittleren Verlauf $b(Pr^{+})$ ersetzt werden kann. Auch über der unabhängigen Veränderlichen Pr^{+} nehmen erst die dem rein turbulenten Anteil am Wärmeaustausch entsprechenden Differenzen $Nu-Nu(Pr=0)$ bzw. $Nu-Nu_{min}$ einen für alle Reynolds-Zahlen gemeinsam gültigen charakteristischen Verlauf an.

4) Die mit Hilfe der beiden Abbildungen 49 und 50 gewonnenen Koeffizienten b, c und d sind in Abb.51 zusammengestellt. Wie man sieht, laufen die Kurven c und d im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen in etwa zusammen: $c \approx d \approx 0{,}75$. Da auch der Proportionalitätsfaktor b in diesem Bereich nahezu konstant ist, folgt die für Flüssigmetalle experimentell gut bestätigte Beziehung

$$Nu = a + b(RePr)^c \qquad \text{(kleine Prandtl-Zahlen)} \qquad (213)$$

Ab mittleren Prandtl-Zahlen kann das Glied Nu_{min} in Glg.(212) gegenüber bRe^cPr^{+d} vernachlässigt werden und man erhält:

$$Nu = bRe^cPr^d \qquad \text{(große Prandtl-Zahlen)} \qquad (214)$$

Die letztgenannte Beziehung eignet sich jedoch durch die Abhängigkeit der Koeffizienten b, c und d von der Prandtl-Zahl nur in unbefriedigender Weise zur Wiedergabe der Nußelt-Zahl über einen größeren Bereich der Prandtl-Zahl. Zieht man noch die zusätzliche Abhängigkeit des Koeffizienten b von der Reynolds-Zahl in Betracht, so ergibt sich ein deutlicher Vorteil der Formel (207) im Vergleich zu (214). Demgegenüber stellt die Gleichung (214) bei der Auswertung experimentell ermittelter Ergebnisse zur Ausschaltung des Einflusses unvermeidbarar Streuungen der Prandtl-Zahl einen recht brauchbaren und häufig angewandten Ansatz dar.

5) Aus Abb.52 sind für das Rohr (T) und für die parallelen Platten bei symmetrischem (PS) und asymmetrischem Wärmeaustausch (PAS) die Abweichungen zu entnehmen, die durch die Näherung $Nu(Re,Pr^+) \cong Nu(RePr^+)$ entstehen. Die einfache Beziehung $Nu = a + b(RePr^+)^c$ erweist sich dabei zur Wiedergabe der genauen Ergebnisse als ausreichend. Die Koeffizienten a, b und c wurden aus den für die Prandtl-Zahlen $Pr^+ = 0{,}01$ und $Pr^+ = 0{,}03$ berechneten Wertegruppen Nu, Re, Pr^+ nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt (eine Zusammenstellung der Koeffizienten a, b und c für alle hier behandelten Fälle T, PS, PAS, A1, A2 und B liegt in Abb.91 vor). Die Nußelt-Zahlen für das Rohr liegen bei kleinen Prandtl-Zahlen zwischen denjenigen für die parallelen Platten bei asymmetrischem ($Nu_T > Nu_{PAS}$) und symmetrischem Wärmeaustausch ($Nu_T < Nu_{PS}$). Dabei nähert sich Nu_T mit steigender Péclet-Zahl gegen Nu_{PS} und mit abnehmender Péclet-Zahl gegen Nu_{PAS} (bei der laminaren Strömung lautet die Reihenfolge $Nu_T < Nu_{PAS} < Nu_{PS}$).

Die für kleine Prandtl-Zahlen und konstante Wärmeflußverteilung ($F_o = 1$) durch das Produkt $RePr^+$ hinreichend genau erfasste Abhängigkeit des Wärmeübergangs von den beiden unabhängigen Größen Re und Pr^+ bleibt auch für $F_o \neq 1$ erhalten: $Nu(RePr^+)$ und $\Theta(y^+, RePr^+)$. Im Gegensatz zu dem Fall q_w=konst., für den dieses Verhalten bereits aus dem Aufbau der Gleichungen erkennbar war (s. Abschnitt 3.1.2.3 für Nu und Absatz a1 in Abschnitt 4.1.6 für Θ), geben hierüber für $F_o \neq 1$ erst die numerischen Ergebnisse Aufschluß. Die Schwierigkeit, durch eine diesbezügliche Interpretation der Ausgangsgleichungen auch für $F_o \neq 1$ zu einer zuverlässigen Aussage über die Art des Einflusses von Re und Pr^+ zu gelangen, liegt daran, daß die wandnormale Wärmestromdichteverteilung q/q_w zusätzlich von Θ, und damit von Re und von Pr^+ abhängt (s. Glg.53a und 53b sowie die Näherungen Glg.79b und 84a). Wie die Ergebnisse der numerischen Berechnung weiterhin zeigen, gilt auch für die Mischungstemperatur Θ_m näherungsweise $\Theta_m(Re,Pr^+) \approx \Theta_m(RePr^+)$. Damit folgt aus Glg.(55a) für die thermische

Einlauflänge $x_e/d_h \approx f(RePr^+)$ (bei laminarer Strömung besteht Proportionalität $x_e/d_h \sim RePr$, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben ist). Der Grad an Genauigkeit der beiden letztgenannten Beziehungen geht aus Tab.10 und aus Abb.59 hervor.

6) Die in der Gleichung (207) enthaltene Funktion $f(Pr^+)$ wurde für das Rohr (T) und für die parallelen Platten (PS, PAS) aus den Wertegruppen Nu, Re, Pr^+, $\zeta(Re)$ nach der Gleichung

$$f(Pr^+) = \frac{\sqrt{\zeta/8}\, RePr^+}{Nu} - \frac{1}{\sqrt{\zeta/8}} \tag{215}$$

berechnet und in Abb.53 über Pr^+ aufgetragen (Ordinatenskala links, Abszissenskala unten). Für die Fälle T und PS ist $f(Pr^+)$ ab $Pr^+ > 0{,}1$ weitgehend unabhängig von Re, für den Fall PAS - die Gleichung (207) ist hier nur formal übernommen - wird dagegen der Einfluß von Re erst ab $Pr^+ > 0{,}7$ vernachlässigbar klein.

Die Werte $f(Pr^+)$ sind für $Pr^+ < A$ negativ, wobei A von dem betrachteten Fall abhängt: $A_T = 0{,}87$ - $A_{PS} = 0{,}94$ - $A_{PAS} = 0{,}58$. Trägt man die Funktion $f(Pr^+)/(Pr^+ - A)$ über Pr^+ in doppeltlogarithmischen Koordinaten auf, so ergibt sich für den Bereich $Pr^+ = 0{,}7...1000$ die in Abb.53 (Ordinatenskala rechts, Abszissenskala oben) eingezeichnete Gerade mit der Neigung -0,22. Die gesuchte Funktion $f(Pr^+)$ läßt sich also durch die Gleichung $f(Pr^+) = B(Pr^+ - A)(Pr^+)^{-0{,}22}$ wiedergeben. Der Koeffizient B nimmt dabei für alle 3 Fälle T, PS und PAS den Wert 10 an. Stellt man die mit der Formel

$$Nu = \frac{RePr^+ \zeta/8}{1 + 10(Pr^+ - A)(Pr^+)^{-0{,}22}\sqrt{\zeta/8}} \tag{216}$$

(ζ nach Glg.69b) berechneten Nußelt-Zahlen den genauen Werten gegenüber, so ergeben sich folgende mittleren quadratischen Abweichungen e in Prozent (die Zahlen in Klammern geben die maximalen Einzelabweichungen aller Wertepaare $Re > 4.10^3$, $Pr^+ > 0{,}72$ an): $e_T = 0{,}9$ (1,9) - $e_{PS} = 1{,}4$ (3,3) - $e_{PAS} = 2{,}3$ (4,8). Diese gute Übereinstimmung zeigt, daß die vereinfachte Formel (207) ausreicht, die Wärmeübertragung ab mittleren Prandtl-Zahlen zuverlässig zu beschreiben.

7) Der Einfluß des Parameters der Wärmeflußverteilung F_o auf die Nußelt-Zahl Nu ist in Abb.54 aus der Darstellung der Verhältniswerte Nu/Nu_q für die Prandtl-Zahlen $Pr^+ = 0{,}01$ und $Pr^+ = 1{,}0$ und für die verschiedenen Reynolds-Zahlen zu ersehen. Zahlenwerte der Funktion $Nu/Nu_q = f(F_o, Re, Pr^+)$ sind in Tab.10 für die Prandtl-Zahlen 0 - 0,01 - 0,03 - 0,1 - 1,0 - 10 enthalten. Für $Pr^+ = 0{,}01$ ist die Abhängigkeit von F_o bis zu Reynolds-Zahlen von $Re = 3.10^5$ vergleichbar mit jener bei laminarer Strömung, wie der Vergleich mit Abb.29 zeigt (für $Re = 3.10^4$ ist z.B. Nu für ϑ_w=konst. gegenüber q_w=konst. um 20 Prozent niedriger). Mit zunehmender Prandtl-Zahl geht der Einfluß von F_o zurück, er ist jedoch selbst bei mittleren Prandtl-Zahlen noch nicht ganz abgeklungen.

8) In Abb.55 sind die für $Pr^+ = 0{,}01$ und q_w=konst. berechneten Nußelt-Zahlen Nu(Pe) - $Pr^+ = Pr$ gesetzt - mit theoretischen und an Flüssigmetallen experimentell ermittelten Ergebnissen anderer Autoren (/33/.../44/) verglichen. Während für große Péclet-Zahlen

die Übereinstimmung aller eingezeichneten Kurven, die Kurve j-j ausgenommen, gut ist, liegen im Bereich kleiner Péclet-Zahlen die in der vorliegenden Arbeit berechneten Nußelt-Zahlen an der oberen Grenze der durch das Experiment erhaltenen Werte. Letzteres hängt damit zusammen, daß bei kleinen Prandtl- und kleinen Reynolds-Zahlen der Quotient $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ Werte unterhalb 1 aufweist. (Auf der anderen Seite haben die im Experiment auftretenden Schwierigkeiten, wie zum Beispiel Nichtbenetzen der Wand, Gaseinschlüsse und Oxyde im Flüssigmetall, eine Herabminderung des Wärmeübertragungskoeffizienten zur Folge.) Daneben gibt es jedoch auch eine Reihe von Messungen, die über den gesamten Bereich der Péclet-Zahlen in guter Übereinstimmung mit analytisch gewonnenen Ergebnissen sind. Als Beispiel hierfür sind die in der vorliegenden Arbeit für $Pr^+=Pr=0,01$ berechneten Nußelt-Zahlen mit den Meßergebnissen von P.L.Kirillov et al./36/, S.E.Isakoff et al./30/ und H.E.Brown et al. /45/ in Abb.56 verglichen.

9) Für Prandtl-Zahlen zwischen 1 und 100 sind in Abb.57 die hier berechneten Nußelt-Zahlen folgenden Gleichungen gegenübergestellt (die Faktoren, die den Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte berücksichtigen, sind dabei weggelassen):

$$Nu = \frac{RePr(\zeta/8)}{1,07+12,7(Pr^{2/3}-1)\sqrt{\zeta/8}} \qquad \text{(B.S.Petukhov et al./46/)} \qquad (217)$$

$$Nu = \frac{RePr(\zeta/8)}{1,20+11,8(Pr-1)Pr^{-1/3}\sqrt{\zeta/8}} \qquad \text{(W.L.Friend et al./47/)} \qquad (218)$$

$$Nu = 0,021\ Re^{0,80}\ Pr^{0,43} \qquad \text{(M.A.Mikheyev /48/)} \qquad (219)$$

$$Nu = 0,023\ Re^{0,80}\ Pr^{1/3} \qquad \text{(A.P.Colburn /49/)} \qquad (220)$$

$$Nu = 0,027\ Re^{0,80}\ Pr^{1/3} \qquad \text{(E.N.Sieder et al./50/)} \qquad (221)$$

Die Gleichung (217) ist das Ergebnis einer analytischen Untersuchung, den Gleichungen (218) bis (221) liegen Meßergebnisse zugrunde, als Gültigkeitsbereich wird im Mittel $Pr=0,7...120$ und $Re>10^4$ angegeben. Die bereits in Zusammenhang mit der Abb.51 in Absatz d4 erwähnte Unzulänglichkeit des Potenzgesetzes $Nu=bRe^cPr^d$ bei einer Anwendung über einen größeren Bereich der Prandtl-Zahlen kommt durch die nicht unerhebliche Streuung der mit den Formeln (219) bis (221) berechneten Nußelt-Zahlen zum Ausdruck. Auf die Abweichungen der hier für hohe Prandtl-Zahlen ermittelten Nußelt-Zahlen im Vergleich zum Experiment wurde bereits am Ende des Absatzes a5 hingewiesen. Demgegenüber erhält man für Prandtl-Zahlen nahe 1 eine gute Übereinstimmung, wie aus dem Vergleich mit den von R.G.Deissler et al./31/ an Luft und von W.Hufschmidt et al./51/ an Wasser gemessenen Nußelt-Zahlen hervorgeht. Letztere sind in Abb.58 wiedergegeben. Der Quotient $(Pr/Pr_w)^{0,11}$ - Pr ist die bei der Mischungstemperatur ϑ_m und Pr_w die bei der Wandtemperatur ϑ_w vorliegende Prandtl-Zahl - berücksichtigt dabei die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte, sein Wert hängt in erster Linie von der Höhe der Wärmestromdichte q_w an der Wand ab.

E) Die thermische Einlauflänge

In Abbildung 59 ist die thermische Einlauflänge x_e/d für q_w= konst. in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl für Prandtl-Zahlen von 0,01 bis 1000 dargestellt. Schließt man die Kombinationen $Pr^+>100$, $Re<2.10^4$ aus, so lassen sich die Eigenschaften der Funktion $x_e/d=f(Re,Pr^+)$ folgendermaßen zusammenfassen:

- Mit steigender Prandtl- und steigender Reynolds-Zahl nimmt die thermische Einlauflänge zu.
- Der Grad des Einflusses von Pr^+ und von Re auf x_e/d geht mit zunehmender Prandtl-Zahl zurück.
- Für $Pr^+>0,72$ gilt näherungsweise:

$$\frac{x_e}{d} = 5,2 \lg(Re) - 4,0 \tag{222}$$

(In Abb.59 ist die dieser Gleichung entsprechende Gerade durch 3 kleine Kreise angedeutet.)

Daß ab mittleren Prandtl-Zahlen die thermische Einlauflänge von Pr^+ nahezu unabhängig wird, ist in Übereinstimmung sowohl mit theoretischen Untersuchungen von S.Levy /52/ als auch mit an Wasser und Öl vorgenommenen Messungen von J.P.Hartnett /54/. Die leichte Zunahme der thermischen Einlauflänge x_e/d mit steigender Reynolds-Zahl deckt sich mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen $Nu(x)/Nu= f(Re,Pr,x/d)$ von V.J.Berry /53/, H.Latzko /55/ und R.G.Deissler /56/ sowie mit den Messungen von J.P.Hartnett an Wasser und von L.K.M. Boelter et al./57/ an Luft, während sich für Öl bei den Messungen von J.P.Hartnett x_e/d mit zunehmender Reynolds-Zahl verringerte. (In sämtlichen hier genannten theoretischen Arbeiten wurden - im Gegensatz zu dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen Verfahren - die Vorgänge längs des gesamten thermischen Einlaufs untersucht.)

J.P.Hartnett gibt - vermutlich unter Zugrundelegung von $Nu(x=l_e)/Nu=1,01$ - folgende Zusammenstellung der Ergebnisse der hier erwähnten Autoren an

Autor	Art der Untersuchung	Thermische Randbedingung	Prandtl-Zahl	l_e/d $Re=10^4$	$Re=10^5$
Hartnett	Experimentell	q_w=konst.	7-200	10	15
Boelter et al.	Experimentell	ϑ_w=konst.	0,7	12*	
Latzko	Theoretisch	ϑ_w=konst.	1,0	10	15
Deissler	Theoretisch	q_w=konst.	0,73	10	15
Deissler	Theoretisch	ϑ_w=konst.	0,73	10	15
Berry	Theoretisch	ϑ_w=konst.	0,001-100	13 (Pr≫1)	17 (Pr≫1)

* Für Re=27700

f) Die in diesem Abschnitt 4.2.1 für das Rohr gegebene Interpretation der numerischen Ergebnisse gilt im großen und ganzen auch für die anderen, hier behandelten Strömungsquerschnitte. In den folgenden Abschnitten wird daher nur noch auf solche Fälle näher eingegangen, die gegenüber dem Rohr entweder abweichende oder zusätzliche Zusammenhänge aufzeigen. Die Tabelle 18 soll dabei das Auffinden der für das Rohr gemachten Ausführungen erleichtern.

4.2.2. PARALLELE PLATTEN, SYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

Die für die parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch erhaltenen numerischen Ergebnisse sind in den Abbildungen 48, 52, 53, 60 bis 66 sowie in den Tabellen 11, 15 und 17 auszugsweise wiedergegeben (s. Gegenüberstellung mit den entsprechenden Darstellungen für das Rohr in Tab.18).

In Abb.65 sind die für $Pr^+=Pr=0{,}72$ berechneten Nußelt-Zahlen mit Messungen verglichen, die von J.L.Novotny et al./58/ in 3 von Luft durchströmten Rechteckkanälen mit den Seitenverhältnissen b/h=1 - 5 - 10 durchgeführt wurden (q_w=konst.). Als charakteristische Länge ist auch hier in Nu und in Re der hydraulische Durchmesser eingesetzt, der also mit dem gesamten benetzten Umfang 2b der beheizten und 2h der unbeheizten Wände gebildet ist. Die gemessenen Nußelt-Zahlen stellen Mittelwerte dar, da sowohl q_w als auch ϑ_w über b gemittelt wurden. Wie Abb.65 zeigt, ist der Einfluß des Seitenverhältnisses b/h auf die Nußelt-Zahl gering. Die Übereinstimmung mit der Theorie für seitlich unbegrenzte parallele Platten ($b/h=\infty$) ist gut.

Die Nußelt-Zahlen für den Fall der parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch sind im Vergleich zum Rohr etwas höher: Für $Pr^+=0{,}72$ ergeben sich Verhältniswerte Nu_{PS}/Nu_T zwischen 1,06 (für $Re=10^4$) und 1,02 (für $Re=10^6$).

Von E.Brundrett et al./59/ wurden in einem ebenfalls von Luft durchströmten Kanal von quadratischem Querschnitt bei allseitiger Beheizung (q_w=konst.) Temperaturmessungen vorgenommen. Die Ergebnisse lassen sich für mehrere Stellen am Umfang und für verschiedene Reynolds-Zahlen durch einen einheitlichen Verlauf $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta)$ darstellen. In den beiden Größen ϑ^+ und η sind dabei die lokalen Werte der Schubspannung τ_w und der Wärmestromdichte q_w einzusetzen. Für $\eta>25$ gibt das logarithmische Gesetz $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=1{,}95\ln\eta+3{,}8$ die Meßwerte innerhalb einer Genauigkeit von 4 Prozent wieder. Rechnet man die in Tab.17 angegebenen Werte a_{rp} und $c_{rp}(Pr^+)$ (für $Pr^+=0{,}72$ extrapoliert) mit Hilfe der Gleichung (209c) um, so erhält man für $Re=6{,}21.10^4$ unter Beibehaltung der in Absatz a5 des Abschnitts 4.2.1 angegebenen Werte $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_{25}=1$ und $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)_2=1{,}30$: $(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=2{,}33\ln\eta+2{,}50$. Auch diese Gleichung ist für den gesamten Bereich $\eta=25...\eta_c$ in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen.

Die mit dem hydraulischen Durchmesser dimensionsbefreite thermische Einlauflänge x_e/d_h(q_w=konst.) ist gegenüber dem Rohr - bedingt durch die höheren Werte Θ_m - nur etwa halb so groß. Wird dagegen x_e auf den Plattenabstand $h=d_h/2$ bezogen, so nimmt der Quotient x_e/h mit dem Rohr vergleichbare Werte an (s. Abb.59 und 66).

Ab mittleren Prandtl-Zahlen - mit Ausnahme der Kombinationen großer Prandtl-Zahlen mit kleinen Reynolds-Zahlen - läßt sich x_e/d_h näherungsweise mit Hilfe folgender Gleichung berechnen (in Abb.66 durch 3 kleine Kreise angedeutet):

$$\frac{x_e}{d_h} = 3{,}3 \lg(Re) - 3{,}4 \tag{223}$$

4.2.3. PARALLELE PLATTEN, ASYMMETRISCHER WÄRMEAUSTAUSCH

Eine repräsentative Auswahl der für die parallelen Platten bei asymmetrischem Wärmeaustausch erhaltenen numerischen Ergebnisse ist in den Abbildungen 48, 52, 53, 67 bis 73 sowie in den Tabellen 11, 15 und 17 zusammengestellt.

Die formale Anwendung des logarithmischen Temperaturgesetzes führt im Vergleich zum Rohr und zu den parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch zu größeren Abweichungen, wie zu erwarten war (s. Einleitung des Abschnitts 4.2). Die mittleren quadratischen Abweichungen, unter Zugrundelegung der Koeffizienten a_{rp} und c_{rp}, betragen hier im Durchschnitt 4% ($Pr^+=1$) - 2,5% ($Pr^+=10$) - 0,3% ($Pr^+=100$) - <0,05% ($Pr^+=1000$). Das Entsprechende gilt auch für die Wiedergabe der Nußelt-Zahlen durch eine Gleichung der Form (207), wie in Absatz d6 des Abschnitts 4.2.1 aus dem Vergleich der Werte e_T, e_{PS} und e_{PAS} zu ersehen ist. Für kleine Prandtl-Zahlen geht aus Abb.71 hervor, daß auch die Beziehung Nu=f(Pe) gegenüber den Fällen T und PS eine etwas grobere Näherung darstellt: Die Exponenten c, d unterscheiden sich hier um 6 bis 7 Prozent. Diese Tatsache kommt auch in der Auftragung $Nu=f(RePr^+,Pr^+)$ der Abbildung 52 zum Ausdruck.

Ab mittleren Prandtl-Zahlen geht der Einfluß des Strömungsquerschnitts und der thermischen Randbedingung auf die Wärmeübertragung mehr und mehr zurück. Der Grund hierfür wird im folgenden am Beispiel der drei Fälle T, PS und PAS erläutert.

Geht man in Gleichung (19) vom Wandabstand y^+ auf η über, so ergibt sich:

$$Nu = -\frac{(d_h/r_w)(d\eta/dy^+)}{\Theta_m \int_0^{\eta_0} \frac{q/q_w}{1+Pr^+\varepsilon_m/\nu}\, d\eta} \tag{224}$$

Mit $y_T^+=1-\eta/\eta_{cT}$, $y_{PS}^+=1-\eta/\eta_{cPS}$ und $y_{PAS}^+=1-0{,}5\eta/\eta_{cPAS}$ erhält man unter Berücksichtigung von $\eta_{cPS}=\eta_{cPAS}=0{,}5\eta_{cT}$ (vgl. Glg.78 und 97) für den Zähler in Gleichung (224) für alle drei Fälle T, PS und PAS den Wert $2\eta_{cT}$. Im Nenner dieser Gleichung unterscheiden sich zwar die oberen Integrationsgrenzen teilweise um den Faktor 2 ($\eta_{oT}=\eta_{cT}$, $\eta_{oPS}=\eta_{cPS}=0{,}5\eta_{cT}$, $\eta_{oPAS}=2\eta_{cPAS}=\eta_{cT}$), da sich jedoch bei hohen Prandtl-Zahlen der Wert des Integrals ab verhältnismäßig kleinen Wandabständen η nicht mehr wesentlich ändert, bleibt dieser Einfluß gering (im wichtigen wandnahen Bereich gilt $q/q_w \cong 1$ und $\varepsilon_m/\nu=f(\eta)$; vgl. Absatz a5 in Abschnitt 4.2.1). Zieht man noch in Betracht, daß auch die Mischungstemperaturen Θ_m nur geringe gegenseitige Unterschiede aufweisen, so ergibt sich für große Prandtl-Zahlen bei einheitlichen Wertepaaren Re, Pr^+: $Nu_T \cong Nu_{PS} \cong Nu_{PAS}$. Dieses Ergebnis zeigt auch, daß ab mittleren Werten Pr der äquivalente hydraulische Durchmesser $d_h=4S/U$ dem äquivalenten thermischen Durchmesser $d_t=4S/U_w$ als charakteristische Länge vorzuziehen ist.

In Abb.72 sind die für $Pr^+=Pr=0{,}01$ und q_w=konst. berechneten Nußelt-Zahlen mit theoretischen und an Flüssigmetallen experimentell ermittelten Ergebnissen anderer Autoren (/60/ bis /63/) verglichen. Die von L.M.Trefethen et al./63/ übernommenen Meßpunkte, die in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen sind, wurden in einem von Quecksilber durchströmten Ringspalt ($r_1/r_2=0{,}714$ - q_{w1}=konst.) erhalten. Der Vergleich mit dem Fall PAS ist zulässig, da sich bei Werten r_1/r_2 nahe 1 die Ergebnisse des Ringspalts nur wenig von denen der parallelen Platten unterscheiden: Nach den Abbildungen 83 und 85 sind für sämtliche Prandtl- und Reynolds-Zahlen bei $r_1/r_2=0{,}7$ die Nußelt-Zahlen für A1 gegenüber PAS nur um ungefähr 5 Prozent höher. Die Meßergebnisse von L.Duchatelle et al./62/ liegen für Pe>250 um 15 bis 20 Prozent unter den hier berechneten Werten, während bei kleineren Péclet-Zahlen die Übereinstimmung besser wird.

Den in Abb.72 eingezeichneten Kurven liegen folgende Gleichungen zugrunde:

$$Nu = 5{,}32 + 0{,}0215(RePr^+)^{0{,}768} \qquad \text{(O.E.Dwyer et al./60/)} \qquad (225)$$

$$Nu = 4{,}9 + 0{,}0175\, Pe^{0{,}8} \qquad \text{(W.B.Harrison et al./61/)} \qquad (226)$$

$$\left.\begin{array}{ll} Nu = 5{,}14 + 0{,}0127\, Pe^{0{,}8} & (200<Pe<1220) \\ Nu = 6{,}1 & (Pe<200) \end{array}\right\} \text{(L.Duchatelle et al./62/)} \qquad (227)$$

In diesem Zusammenhang seien hier auch die in Abb.52 enthaltenen Gleichungen zur Berechnung der Nußelt-Zahlen für das Rohr (T) und für die parallelen Platten (PS,PAS) nochmals aufgeführt:

$$Nu_T = 5{,}7 + 0{,}041(RePr^+)^{0{,}75} \qquad (228)$$

$$Nu_{PS} = 9{,}7 + 0{,}030(RePr^+)^{0{,}78} \qquad (229)$$

$$Nu_{PAS} = 5{,}6 + 0{,}016(RePr^+)^{0{,}81} \qquad (230)$$

Messungen in einem von Luft durchströmten Rechteckkanal mit dem Seitenverhältnis b/h=5 bei asymmetrischer Heizung (q_w=konst.) wurden von E.M.Sparrow et al./64/ durchgeführt. Dabei wurden sowohl der Fall untersucht, daß nur eine der beiden Wände (Breite b) beheizt war (q_{w1}=konst. - $q_{w2}=0$), als auch jener, daß beide Wände Wärme im Verhältnis $q_{w1}/q_{w2}=1/2$ abgaben. Die gemessenen Nußelt-Zahlen des erstgenannten Falls stimmen gut mit den in der vorliegenden Arbeit für $Pr^+=0{,}72$ berechneten überein. Gegenüber dem symmetrischen Wärmeaustausch ($q_{w1}=q_{w2}$=konst.) ergeben sich bei asymmetrischem Wärmeaustausch kleinere Nußelt-Zahlen. Für $Pr^+=0{,}72$ als Beispiel nimmt der Quotient Nu_{PAS}/Nu_{PS} Werte zwischen 0,78 (für $Re=10^4$) und 0,84 (für $Re=10^6$) an. Die Tendenz, daß die Abweichungen $Nu_{PAS}<Nu_{PS}$ gegenüber $Nu_{PS}>Nu_T$ größer sind, zeigte sich bereits bei kleinen Prandtl-Zahlen, kombiniert mit großen Reynolds-Zahlen (s. Abb.52).

Wie aus dem Vergleich der Abbildungen (59), (66) und(73) hervorgeht, ist die auf den hydraulischen Durchmesser bezogene thermische Einlauflänge x_e/d_h bei parallelen Platten und asymmetrischem Wärmeaustausch um etwa das doppelte größer als beim Rohr und um nahezu den Faktor 4 größer als bei parallelen Platten und symmetrischem Wärmeaustausch. Dieser Sachverhalt erklärt sich aus dem Zusammenwirken der Größen St und Θ_m einerseits, sowie aus dem Einfluß des Quotienten $U/U_w=U^+$ auf den Parameter F_m andererseits (vgl. Glg.37 und 55a). Es zeigt sich zum Beispiel, daß ab mittleren Prandtl-Zahlen für festgehaltene Wertepaare Re,Pr^+ näherungsweise die Zusammenhänge $\Theta_{mPAS}\cong\Theta_{mT}$ und $1/\Theta_{mPAS}-1\cong2(1/\Theta_{mPS}-1)$ gelten. Unter Beachtung von $Nu_{PAS}\cong Nu_{PS}\cong Nu_T$ und $U^+_{PAS}=2U^+_{PS}=2U^+_T$ ergeben sich aus Glg.(55d) die oben genannten Faktoren 2 und 4.

Die in Absatz d5 des Abschnitts 4.2.1 erwähnte Näherung $x_e/d_h=f(RePr^+)$, die für kleine Prandtl-Zahlen zulässig ist, wird durch die Versuche von L.Duchatelle et al. bestätigt: Für Wertepaare aus dem Bereich Pr=0,01...0,022 und Re=3000.....100000 war der thermische Einlauf nach $l_e/d_h=Pe/80$ in etwa beendet. Dies entspricht nach Abb.73 im Mittel einem Verhältnis $x_e/l_e=1/2$. Wie in Abb.73 durch die drei kleinen Kreise angedeutet ist, kann die thermische Einlauflänge x_e/d_h ab mittleren Prandtl-Zahlen näherungsweise mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{x_e}{d_h} = 12{,}4\ \lg(Re) - 14{,}4 \qquad (231)$$

berechnet werden.

4.2.4. DER RINGSPALT

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind für die strömungsmechanischen Größen in den Abbildungen 74 bis 80 und in den Tabellen 8 und 16, und für die thermischen Größen in den Abbildungen 81 bis 91 und in den Tabellen 12, 14, 17 zusammengestellt.

4.2.4.1. STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

a) Die Geschwindigkeitsverteilung

Für das Halbmesserverhältnis $r_1/r_2=0{,}20$ zeigt Abb.74 die mit Hilfe der Gleichungen (186a,b,c) berechneten Geschwindigkeitsverteilungen $\varphi=f((r-r_1)/(r_2-r_1)$, Re=konst.). Der Einfluß des Halbmesserverhältnisses auf die Geschwindigkeitsverteilung geht für $Re_T=3.10^4$ aus Abb.75 hervor: $\varphi=f((r-r_1)/(r_2-r_1)$, r_1/r_2=konst.). In der äußeren Ringspalthälfte liefert die Gleichung (192) im Vergleich zu (186a,b,c) nur unwesentlich abweichende Ergebnisse. Durch die nahezu lineare Schubspannungsverteilung ist jedoch auch die einfache Gleichung (62) schon ausreichend (y^+ ist dabei durch z_2^+ zu ersetzen). In der vorliegenden Arbeit wurden bei der numerischen Berechnung die Gleichungen (186a,b,c) für die äußere Ringspalthälfte nur deshalb beibehalten, um mit einer einzigen, für den Gesamtquerschnitt gültigen Beziehung auszukommen.

In Abb.76 ist im Abschnitt $r_1<r<r_c$ für das Radienverhältnis $r_1/r_2=0{,}40$ die mit der Gleichung (192) berechnete Geschwindigkeitsverteilung $\varphi=f((r-r_1)/(r_2-r_1)$, Re=konst.) dargestellt. Die Unterschiede der mit den Gleichungen (186a,b,c) einerseits und mit Glg. (192) andererseits für die innere Ringspalthälfte berechneten Geschwindigkeitsprofile φ sind für $r_1/r_2=0{,}125$ und $r_1/r_2=0{,}0625$ aus derselben Abbildung zu entnehmen. Dabei sind zum Vergleich auch die von J.A.Brighton et al./25/ an Luft gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen eingezeichnet. Die Übereinstimmung der mit (192) berechneten Geschwindigkeitsprofile φ ist gegenüber (186a,b,c) etwas besser, während umgekehrt in der Auftragung u/u^+ der Abb.77, die genauere Aufschlüsse über die Güte der getroffenen Annahmen gibt, die mit Glg.(186a,b,c) ermittelten Geschwindigkeiten den gemessenen Werten näher kommen. (Die Darstellung $u/u^+=f(\eta)$ ist gegenüber $\varphi=f((r-r_1)/(r_2-r_1)$, Re) deswegen aufschlußreicher, weil in den beiden Veränderlichen u/u^+ und η zusätzlich noch der Einfluß des Wiederstandsbeiwertes ζ enthalten ist, dessen Bestimmung ebenfalls Annahmen zugrundelagen.) Die Meßpunkte in Abb.77 liegen im Vergleich zur Theorie etwas höher. Sehr gut wird dagegen der Einfluß der Reynolds-Zahl wiedergegeben: Beim Radienverhältnis $r_1/r_2=0{,}562$ nimmt u/u^+ mit steigendem Re leicht ab, während umgekehrt beim kleineren Radienverhältnis $r_1/r_2=0{,}0625$ u/u^+ mit steigendem Re zunimmt. Beiden Werten r_1/r_2 gemeinsam ist die Tatsache, daß der Einfluß der Reynolds-Zahl auf $u/u^+=f(\eta)$ mit zunehmendem Re zurückgeht.

An der unteren Grenze der Gültigkeit des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes, d.h. bei $\eta\approx30$, ist auch der Einfluß des Radienverhältnisses r_1/r_2 auf u/u^+ nur noch gering. Diese Tatsache wurde von A.Roberts /65/ und von W.M.Kays et al./67/ dazu verwandt, die von r_1/r_2 abhängigen Koeffizienten a und c der Beziehung $u/u^+=a\ \ln\eta+c$ zu bestimmen (in/65/ ist allen Kurven $u/u^+=f(\eta)$ der Punkt $\eta=22$ - $u/u^+=13$ gemeinsam; nähere Angaben zu /67/ finden sich in Absatz c) des Abschnitts 4.2.4.2). Die in der vorliegenden Arbeit aus den Wertegruppen u/u^+, η, Re, r_1/r_2 nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate ermittelten Koeffizienten a und c sind in Tabelle 16 aufgeführt.

b) Die mittlere Geschwindigkeit

Die mittleren Geschwindigkeiten φ_{m1}, φ_{m2} und φ_{m12} sind in Abb.78 in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 für verschiedene Werte der Reynolds-Zahl Re dargestellt.

c) Der neutrale Radius

Der auf den Radius r_2 des äußeren Zylinders bezogene neutrale Radius r_c ist in Tab.8, zusammen mit den Größen Re_{12} und η_s, in Abhängigkeit von r_1/r_2 und von Re_T angegeben. Der Einfluß der Reynolds-Zahl wird erst bei Annäherung an sehr kleine Radienverhältnisse r_1/r_2 spürbar, und zwar in dem Sinn, daß der Quotient r_c/r_2 mit steigendem Re kleiner wird. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den von J.A.Brighton et al./25/ an Luft in Ringspalten mit den Radienverhältnissen $r_1/r_2=0{,}562$ - $0{,}375$ - $0{,}125$ - $0{,}0625$ durchgeführten Messungen (der Innendurchmesser des äußeren Zylinders betrug bei allen 4 Radienverhältnissen $2r_2=203$ mm).
Bei diesen Versuchen wurde der Radius r_c mit Hilfe einer doppelten Pitot-Sonde bestimmt. Die Anzeige dieser Sonde gab also direkt

ein Maß für die Geschwindigkeitsdifferenzen, wodurch sich der Ort des nur schwach ausgebildeten Geschwindigkeitsmaximums zuverlässig bestimmen ließ. Für $r_1/r_2=0{,}0625$ ergaben sich so beispielsweise Meßwerte von $r_c/r_2=0{,}339$ (Re=95800) und $r_c/r_2=0{,}332$ (Re=327000). Durch Interpolation der in Tab.8 enthaltenen Werte erhält man für $r_1/r_2=0{,}0625$ folgende Ergebnisse: $r_c/r_2=0{,}336$ (Re=95800) und $r_c/r_2=0{,}329$ (Re=327000). Die Absolutwerte aus Theorie und Experiment unterscheiden sich also nur um 1 Prozent, der relative Unterschied für die genannten Reynolds-Zahlen beträgt in beiden Untersuchungen 2 Prozent. Bei der laminaren Strömung ergibt sich $r_c/r_2=0{,}424$, ein Wert also, der im Vergleich zur turbulenten Strömung um etwa 25 Prozent höher liegt.

Im Widerspruch hierzu sind jedoch auch Messungen bekannt geworden, die keinen Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung in Bezug auf die Lage des Geschwindigkeitsmaximums zu erkennen gaben. Als Beispiel hierfür seien die Geschwindigkeitsmessungen von R.R.Rothfus et al./66/ angeführt. Zur Bestimmung von r_c wurden bei dieser Untersuchung lediglich die mit einer einfachen Pitot-Sonde gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen herangezogen. Auch waren die maximal erreichten Reynolds-Zahlen bei den zwei untersuchten Radienverhältnissen relativ niedrig: Re=14400 für $r_1/r_2=0{,}650$ und Re=21600 für $r_1/r_2=0{,}162$.

Von W.M.Kays et al./67/ wurde unter Verwendung von Versuchsergebnissen mehrerer Autoren empirisch eine Gleichung für r_c/r_2 aufgestellt. In der doppeltlogarithmischen Darstellung von $(r_c-r_1)/(r_2-r_1)=f(r_1/r_2)$ ließen sich die Meßergebnisse (hauptsächlich fanden die von F.R.Lorenz /68/ bei Radienverhältnissen bis $r_1/r_2=0{,}0525$ gewonnenen Ergebnisse Berücksichtigung) näherungsweise durch eine Gerade mit der Neigung $n_K=0{,}343$ wiedergeben. Die Gültigkeit dieser Näherung wird durch die Theorie bekräftigt. Die für 13 Radienverhältnisse im Bereich $r_1/r_2=0{,}7...0{,}03$ und bei jeweils 7 Reynolds-Zahlen im Bereich $Re_T=4.10^3...3.10^6$ ermittelten Wertepaare $r_c/r_2, r_1/r_2$ ergaben nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate eine mittlere Neigung von n=0,3336 bei einer mittleren quadratischen Abweichung von 3,0 Prozent. Die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums läßt sich also mit ausreichender Genauigkeit aus der Gleichung

$$\frac{r_c}{r_2} = \frac{r_1/r_2 + (r_1/r_2)^{1/3}}{1 + (r_1/r_2)^{1/3}} \qquad (232)$$

berechnen. Die dieser Gleichung entsprechende Kurve ist in Abb.11 eingezeichnet. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung mit den von J.A.Brighton et al. gemessenen Werten über den gesamten Bereich der Radienverhältnisse $r_1/r_2 \geq 0{,}0625$ sehr gut.

d) Der Widerstandsbeiwert

Werden die nach Gleichung (182) berechneten Widerstandsbeiwerte $\zeta_{12}(Re_{12})$ auf ζ_T^+ bezogen ($\zeta_T^+=\zeta_T(Re_{12})$ sind die aus dem Widerstandsgesetz des Rohres (69b) für Re_{12} berechneten Werte) so ergeben sich die in Abb.79 dargestellten Kurven $\zeta_{12}/\zeta_T^+=f(Re, r_1/r_2=\text{konst.})$ (Abszissenskala unten) und $\zeta_{12}/\zeta_T^+=f(r_1/r_2, Re=\text{konst.})$

(Abszissenskala oben). Der Quotient ζ_{12}/ζ_T^+ bleibt für den gesamten Bereich der Radienverhältnisse $r_1/r_2=0...1$ unterhalb des Wertes 1,08. Für $r_1/r_2 > 1/4$ und $Re > 3.10^4$ betragen die Abweichungen gegenüber der Näherung

$$\zeta_{12}/\zeta_T^+ = 1{,}095 - 0{,}078(r_1/r_2) \tag{233}$$

weniger als 1 Prozent.

Die Messungen von J.A.Brighton et al. ergaben für 3 von Wasser durchströmte Ringspalte (r_1/r_2=0,118 - 0,200 - 0,400) für den Bereich niedriger Reynolds-Zahlen (Re<17000) Werte ζ_{12}/ζ_T^+ zwischen 1,06 und 1,08 und für die 4 weiter oben erwähnten Ringspalte (r_1/r_2=0,562...0,0625) bei Luft und Re=30000...327000 Werte ζ_{12}/ζ_T zwischen 1,00 und 1,10. Aus den Messungen von R.R.Rothfus et al. wurden diese Quotienten für r_1/r_2=0,650 und Re=10000...15000 zu 1,05 und für r_1/r_2=0,162 und Re=4000...20000 zu 1,12 bestimmt. Die Ergebnisse dieser experimentellen Untersuchungen sind also in Übereinstimmung mit der Theorie. Wesentlich höhere Widerstandskoeffizienten ergaben dagegen Messungen von K.H.Presser et al./68/ in 3 von Stickstoff und Kohlendioxyd durchströmten Ringspalten: ζ_{12}/ζ_T^+=1,10 - 1,20 - 1,32 für r_1/r_2=2/3 - 1/2 - 3/8.

Der in Abb.80 dargestellte, sog. fiktive Widerstandsbeiwert ζ_{F1} wird in Zusammenhang mit den Nußelt-Zahlen in Absatz c) des Abschnitts 4.2.4.2 erläutert.

4.2.4.2. DER WÄRMEAUSTAUSCH

a) Die Temperaturverteilung

Beispiele von Temperaturverteilungen bei Wärmeaustausch am inneren Zylinder sind für r_1/r_2=0,40 in den beiden Abbildungen 81 und 82 angegeben: $\Theta=f((r-r_1)/(r_2-r_1), Pr^+=\text{konst.}, Re=\text{konst.}, F_o=1)$ und $\Theta=f((r-r_1)/(r_2-r_1), Pr^+=\text{konst.}, Re=5{,}77.10^4, F_o=\text{konst.})$. Die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ der Beziehung $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = a \ln\eta + c(Pr^+)$ sind in Tab.17 enthalten. Die Anwendung des hier nur formal übernommenen logarithmischen Temperaturgesetzes führt zu beträchtlichen Ungenauigkeiten, wie die Werte der mittleren quadratischen Abweichungen zeigen.

b) Die Mischungstemperatur

In Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl, von der Reynolds-Zahl und vom Radienverhältnis sind Werte der Mischungstemperatur Θ_m für $F_o\neq1$ in Tab.12 und für F_o=1 in Tab.14 aufgeführt.

b) Die Nußelt-Zahl

Bei einseitigem Wärmeaustausch im Ringspalt stellt der Fall paralleler Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS) den Grenzfall mit r_1/r_2=1 dar. Aus diesem Grund wurde für die Auftragung der Nußelt-Zahlen für den Fall q_w=konst. die Form $Nu/Nu_{PAS}=f(Re, Pr^+, r_1/r_2)$ gewählt. Der Einfluß des Parameters F_o

der Wärmeflußverteilung geht aus den in der Tabelle 12 enthaltenen Quotienten $Nu/Nu_q=f(Re,Pr^+,r_1/r_2,F_o)$ hervor.

Der Verlauf von $Nu/Nu_{PAS}=f(Re,Pr^+=konst.,r_1/r_2=konst.)$ ist für q_{w1}=konst. in Abb.83 (r_1/r_2=0,7 - 0,4) und Abb.84 (r_1/r_2= 0,2 - 0,1) dargestellt. Die Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl ist nicht sehr groß. Demgegenüber ist der Einfluß der Prandtl-Zahl auf Nu/Nu_{PAS} wesentlich stärker ausgeprägt, wie Abb.85 bei q_{w1}=konst. für verschiedene Werte von r_1/r_2 zeigt. Alle Kurven $Nu/Nu_{PAS}=f(Pr^+,Re=konst.,r_1/r_2=konst.)$ durchlaufen im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen ein Maximum, um mit Annäherung an Pr=0 einem Grenzwert zuzustreben. Die Lage der Maxima verschiebt sich mit steigender Reynolds-Zahl gegen kleinere Werte der Prandtl-Zahl. Sie sind bei Wärmeaustausch am äußeren Zylinder besonders deutlich, wie Abb.87 zeigt. Für q_{w2}=konst. ist die Funktion $Nu/Nu_{PAS}=f(Re,Pr^+=konst.,r_1/r_2=konst.)$ in Abb.86 aufgetragen (r_1/r_2=0,2 - 0,1).

In den beiden Abbildungen 88 und 89 ist Nu/Nu_{PAS} für verschiedene Werte der Prandtl- und der Reynolds-Zahl in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 dargestellt. Derselbe Zusammenhang, jedoch mit r_2/r_1 als unabhängiger Veränderlicher und in doppeltlogarithmischen Koordinaten, geht aus Abb.90 hervor. In der letztgenannten Darstellung nehmen die Kurven Nu/Nu_{PAS} für hohe Prandtl-Zahlen nahezu einen linearen Verlauf an.

Für den Bereich kleiner Prandtl-Zahlen sind in Abb.91 in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 für q_{w1}=konst. und für q_{w2}=konst. die Koeffizienten a, b und c der Näherungsgleichung $Nu=a+b(RePr^+)^c$ aufgetragen. Die mittleren quadratischen Abweichungen von den für Pr^+=0,01 und Pr^+=0,03 berechneten Werten Nu betragen in Prozent, abgestuft für die 4 Radienverhältnisse

r_1/r_2=0,70 - 0,40 - 0,20 - 0,10 :

e_1=2,3 - 2,3 - 2,2 - 2,2 für Wärmeaustausch am inneren Zylinder

e_2=2,4 - 2,2 - 2,1 - 2,3 für Wärmeaustausch am äußeren Zylinder

Der Vergleich mit experimentell an Flüssigmetallen ermittelten Nußelt-Zahlen (Ref. /33/ und /70/ bis /73/) geht aus Abb.92 hervor. (Ein Teil der in der vorliegenden Arbeit zitierten experimentellen Untersuchungen an Flüssigmetallen ist in der von B.Lubarsky /74/ vorgenommenen Zusammenstellung enthalten.) Über den Einfluß des Radienverhältnisses geben die Meßergebnisse noch keinen zuverlässigen Aufschluß. Eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung mit der Theorie ergeben die Meßergebnisse von V.I.Petrovichev /70/, die gemessenen Nußelt-Zahlen liegen im gesamten Bereich von Pe=600 bis Pe=4000 um ca. 6 Prozent unter den berechneten Werten.

Die analytische Untersuchung von R.V.Bailey /9/ führte zu folgender Gleichung (Wärmeaustausch am inneren Zylinder):

$$Nu_1 = Nu_{s1} + 0{,}0106(r_2/r_1)^{0,37}(RePr^+)^{0,86} \tag{234a}$$

Die Nußelt-Zahl Nu_{s1}, die man für das Rechteckprofil $\varphi=1$ mit $\varepsilon_m/\nu=0$ erhält, läßt sich aus folgender Gleichung berechnen:

$$\frac{1}{Nu_{s1}} = \frac{4(B+1)^4 \ln(r_2/r_1) - 4B^3 - 14\,B^2 - 12B - 3}{8B(r_2/r_1+1)^2} \qquad (234b)$$

mit

$$B = 1/(r_2/r_1-1)$$

Unter Zugrundelegung der von R.R.Rothfus et al. /8/ gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen ergaben die von O.E.Dwyer et al./60/ für kleine Prandtl-Zahlen durchgeführten Rechnungen folgende Ergebnisse:

- Wärmeaustausch am inneren Zylinder

$$Nu_1 = a_1 + b_1(RePr^+)^{c1} \qquad (235a)$$

mit

$$a_1 = 4{,}63 + 0{,}686(r_2/r_1)$$

$$b_1 = 0{,}02154 - 0{,}000043(r_2/r_1)$$

$$c_1 = 0{,}752 + 0{,}01657(r_2/r_1) - 0{,}000883(r_2/r_1)^2$$

- Wärmeaustausch am äußeren Zylinder

$$Nu_2 = a_2 + b_2(RePr^+)^{c2} \qquad (235b)$$

mit

$$a_2 = 5{,}26 + 0{,}050(r_2/r_1)$$

$$b_2 = 0{,}01848 + 0{,}003154(r_2/r_1) - 0{,}0001333(r_2/r_1)^2$$

$$c_2 = 0{,}780 - 0{,}01333(r_2/r_1) + 0{,}000833(r_2/r_1)^2$$

Für den Bereich mittlerer bis großer Prandtl-Zahlen lassen sich aus den hier berechneten Nußelt-Zahlen ebenfalls Näherungsgleichungen angeben. Dazu wird wieder die Beziehung (207) herangezogen, deren Herleitung zwar, wie bereits erwähnt, für den Fall des Ringspalts nicht gilt (bei formaler Anwendung müßte als Widerstandsbeiwert für $Nu(q_{w1})$ ζ_1 nach Glg.(174a) und für $Nu(q_{w2})$ ζ_2 nach Glg.(174b) eingesetzt werden). Der Vorteil dieser Beziehung, der darin besteht, den Einfluß der Prandtl- und der Reynolds-Zahl über einen großen Bereich zuverlässig zu beschreiben, kann jedoch auch beim Ringspalt genutzt werden, wenn anstelle der Widerstandsbeiwerte ζ_1 und ζ_2 fiktive Widerstandsbeiwerte ζ_F eingeführt werden. Diese sind so definiert, daß sie die Gleichung (207) mit $f(Pr^+)=f_{PAS}(Pr^+)$ befriedigen. Mittelwerte der Funktion $\zeta_F = f(Re, Pr^+, r_1/r_2)$ sind in Abb.80 für den Fall, daß der Wärmeaustausch an der inneren Wand stattfindet, in der Form $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f_1(Re, r_1/r_2=\text{konst.})$ (Abszissenskala unten) und $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f_2(r_2/r_1, Re=\text{konst.})$ (Abszissenskala oben) dargestellt. Für ζ_{F1}/ζ_T^+ läßt sich eine im Bereich $1 \leq r_2/r_1 \leq 10$ gültige Näherungsgleichung aufstellen, die in der nachfolgenden Zusammenstellung enthalten ist.

$$Nu_1 = \frac{RePr^+ \zeta_{F1}/8}{1+10(Pr^+-0,58)(Pr^+)^{-0,22}\sqrt{\zeta_{F1}/8}} \tag{236a}$$

$$\frac{\zeta_{F1}}{\zeta_T^+} = 1 + (\frac{r_2}{r_1} - 1)\left[0,18 - 0,017\ lg(Re)\right] \tag{236b}$$

$$\zeta_T^+ = \left[1,8\ lg(Re/7)\right]^{-2} \tag{236c}$$

Die mittleren quadratischen Abweichungen e in Prozent der mit diesen Gleichungen für $Pr^+ \geq 1$ - $Re_T \geq 4.10^3$ berechneten Nußelt-Zahlen im Vergleich zu den genauen Werten betragen für die vier Radienverhältnisse r_1/r_2=0,70 - 0,40 - 0,20 - 0,10 (die Zahlen in Klammern geben die Abweichungen e' an, die man erhält, wenn in Glg.(236a) ζ_{F1}/ζ_T^+ nach Abb.80 eingesetzt wird): e=1,8 (1,4) - 3,4 (1,7) - 3,1 (1,9) - 4,2 (3,0).

Erfolgt der Wärmeaustausch am äußeren Zylinder, so genügt es ab mittleren Prandtl-Zahlen, die Nußelt-Zahlen aus der für den Fall der parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, angegebenen Formel zu berechnen und bei kleinen Radienverhältnissen mit dem aus Abb.89 zu entnehmenden Faktor Nu/Nu_{PAS} zu multiplizieren (in Glg.(236a) ist ζ_{F1} durch $\zeta_{PP} \cong \zeta_T^+$ gemäß Glg.(236c) zu ersetzen).

Für den Vergleich der in der vorliegenden Arbeit berechneten Nußelt-Zahlen mit experimentell an Flüssigkeiten mittlerer Prandtl-Zahl ermittelten Ergebnissen eignet sich die Auftragung der Abbildung 90, $Nu/Nu_{PAS}=f(r_2/r_1)$ in doppeltlogarithmischen Koordinaten, am besten, da in der Mehrzahl der anschließend genannten Arbeiten der Einfluß des Radienverhältnisses auf die Nußelt-Zahl durch eine Beziehung der Form $Nu \sim (r_2/r_1)^n$ angegeben wird. Die Werte der Exponenten n weisen allerdings beträchtliche Streuungen auf, wie aus den folgenden Beispielen zu entnehmen ist.

Nach Messungen, die von C.C.Monrad et al./75/ an Wasser und Luft in 3 Ringspalten durchgeführt wurden, ergab sich folgende Beziehung:

$$Nu_1 = 0,020(r_2/r_1)^{0,53}Re^{0,8}Pr^{0,4} \tag{237}$$

Die maximal erreichten Reynolds-Zahlen betrugen dabei Re=220000 (r_2/r_1=1,65), Re=170000 (r_2/r_1=2,45) und Re=30000 (r_2/r_1=17)

Eine von E.D.Davis /76/ im Jahre 1943 vorgenommene Zusammenstellung von Meßergebnissen verschiedener Autoren (einschließlich /75/) führte zu der Gleichung

$$Nu_1 = 0,038(r_2/r_1-1)^{0,2}(r_2/r_1)^{0,15}Re^{0,8}Pr^{1/3} \tag{238}$$

Von O.Walger /77/ wurde, ebenfalls nach Auswertung von Meßergebnissen mehrerer Autoren, die Beziehung

$$Nu_1 = 0{,}021(r_2/r_1)^{0{,}45} Re^{0{,}8} Pr^{1/3} \tag{239}$$

empfohlen. Die Gültigkeit dieser Gleichung wurde später von F.J.Quirrenbach /78/ nach Hinzunahme weiterer Arbeiten, die inzwischen erschienen waren, bestätigt. Die Streuungen der Meßergebnisse in Bezug auf die der Glg.(239) entsprechenden Kurve betrugen allerdings ±20 Prozent. Der Betrag dieser Streuungen liegt also ungefähr in der gleichen Höhe, wie nach der Theorie für den Einfluß von r_1/r_2 auf Nu zu erwarten ist. Die gegenüber dem Proportionalitätsfaktor 0,023 in Gleichung (220) niedrigeren Werte 0,020 in Glg.(237) bzw. 0,021 in Glg.(239) berücksichtigen die Tatsache, daß bei mittleren Prandtl-Zahlen die Nußelt-Zahlen für den Fall paralleler Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch ($r_1/r_2=1$), im Vergleich zum Rohr um etwa 10 bis 15 Prozent niedriger sind (s.Abb.89, q_{w2}).

Den vier hier genannten Arbeiten ist gemeinsam, daß sie einen gegenüber der Theorie wesentlich höheren Einfluß des Halbmesserverhältnisses auf die Nußelt-Zahl angeben: Aus Abb.90 lassen sich für den Bereich $r_2/r_1=1...10$ (gemittelt über Re) näherungsweise die folgenden Zusammenhänge entnehmen

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{Nu}{Nu_{PAS}} = 0{,}94\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{0{,}25} & \text{für } 2{,}5 \leq r_2/r_1 \leq 10 \\[2ex] \dfrac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{0{,}18} & \text{für } 1{,}0 \leq r_2/r_1 \leq 2{,}5 \end{array}\right\} \text{für } Pr^+=1{,}0 \tag{240a}$$

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0{,}16} \qquad \text{für } Pr^+=10 \tag{240b}$$

$$\frac{Nu}{Nu_{PAS}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0{,}13} \qquad \text{für } Pr^+>100 \tag{240c}$$

Mit zunehmendem Radienverhältnis r_2/r_1 und abnehmender Prandtl- und Reynolds-Zahl steigen die Exponenten n in $Nu/Nu_{PAS} \sim (r_2/r_1)^n$ an. So ergeben sich zum Beispiel im Bereich r_2/r_1 nahe 10 Werte von n=0,4 für $Pr^+=1$ - $Re=10^4$ und n=0,65 für $Pr^+=0{,}01$ - $Re=10^4$.

Neuere experimentelle Untersuchungen bestätigen den aus der Theorie sich ergebenden Zusammenhang $Nu(r_2/r_1)$. Von R.L.Judd et al. /79/ wurden in 6 Ringspalten mit den Radienverhältnissen r_2/r_1= 1,5 - 2,0 - 2,5 - 3,0 - 3,5 - 4,0 Wärmeübergangsmessungen an Wasser durchgeführt (Re=20000...120000). Für diesen r_2/r_1-Bereich ergab sich $Nu \sim (r_2/r_1)^{0{,}25}$. Der Wert des Exponenten n=0,25 stimmt in etwa mit der aus Abb.91 zu entnehmenden Neigung n'=0,23 an die Kurve Nu/Nu_{PAS} für $Pr^+=1$ - $Re=3.10^4$ - $1{,}5<r_2/r_1<4$ überein. Die auf die Nußelt-Zahl $Nu_{1,5}$ für das Radienverhältnis r_2/r_1 =1,5 bezogene Nußelt-Zahlen Nu sind für $Re=3.10^4$ in der nachfolgenden Tabelle mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen verglichen ($Pr^+=1$).

	r_2/r_1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
R.L.Judd et al./79/	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,04	1,08	1,14	1,19	1,23
Vorliegende Arbeit	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,06	1,11	1,15	1,20	1,25

Die Ergebnisse der von K.H.Presser et al. durchgeführten Messungen des Wärmeaustauschs an Kohlendioxyd und Stickstoff werden anschließend, ebenfalls in der Form $Nu/Nu_{1,5}$, den für $Pr^+=1$ und $Re=3.10^5$ berechneten Werten gegenübergestellt (die Re-Bereiche betrugen in /69/: $Re=7.10^4...1,3.10^6$ für $r_2/r_1=1,5$ - $Re=1,4.10^5...4,0.10^6$ für $r_2/r_1=2,0$ - $Re=2,2.10^5...4,0.10^6$ für $r_2/r_1=2,67$):

	r_2/r_1	1,5	2,0	2,67
K.H.Presser et al./69/	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,02	1,15
Vorliegende Arbeit	$Nu/Nu_{1,5}$	1,00	1,05	1,12

Für die Berechnung der Nußelt-Zahl wurde folgende Gleichung angegeben

$$Nu=k\ Re^{0,83}\ Pr^{0,44} \tag{241}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor k für die 3 obengenannten Radienverhältnisse die Werte 0,0142 - 0,0145 - 0,0164 annimmt.

Im Rahmen eines umfangreichen Untersuchungsprogramms über den Wärmeaustausch in Ringspalten wurden von W.M.Kays et al./67/ ein Teilbericht veröffentlicht, in dem sehr sorgfältig durchgeführte theoretische und experimentelle Untersuchungen beschrieben werden. Die Grundlagen des analytischen Teils dieser Arbeit werden im folgenden kurz zusammengefaßt.

Wie bereits in Absatz c) des vorausgegangenen Abschnitts erwähnt ist, wurde für den Ort des Geschwindigkeitsmaximums die empirisch gewonnene Formel (232) mit dem Exponenten $n_K=0,343$ anstelle von $n=1/3$ den Berechnungen zugrundegelegt (n_K und n unterscheiden sich um ca. 3 Prozent). Für die ε_m/ν-Verteilung wurden das Wandgesetz (211) von R.G.Deissler und das Mittengesetz (2) von H.Reichardt, beide jedoch in modifizierter Form, übernommen. In Glg.(211) wurde dabei η durch $\eta_i^+=1,5\eta_i(1+z_i^+)/(1+2z_i^{+2})$ ersetzt. Gleichung (2) erfuhr eine Korrektur dahingehend, daß die von F.R.Lorenz gemessenen ε_m/ν-Verteilungen in etwa erreicht werden: Wie F.R.Lorenz und J.A.Brighton feststellten, sind die Maximalwerte ε_m/ν in der äußeren Ringspalthälfte größer als in der inneren. Diese Tatsache wurde dadurch berücksichtigt, daß die rechte Seite der Gleichung (173c) für die äußere Ringspalthälfte mit $(1+0,6(z_2^+-z_2^{+2}))$ und für die innere Ringspalthälfte mit $(1+0,6\sqrt{r_1/r_2}(z_1^+-z_1^{+2}))\{1-[1-(r_c/r_2-r_1/r_2)/(\sqrt{\tau_{w2}/\tau_{w1}}(1-r_c/r_2))]z_1^+\}$ multipliziert wird. In der vorliegenden Arbeit ergeben sich aus den getroffenen Annahmen gleiche Werte für die beiden Maxima ε_m/ν. Der Einfluß ist jedoch nicht sehr groß (dem Verfasser lagen die beiden Arbeiten /25/ und /68/ zum Zeitpunkt der Berechnungen nicht vor).

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung wurden von W.M.Kays et al. für das wandnahe Gebiet ($\eta_i^+ < 42$) die Gleichung (184) mit ε_m/ν nach Glg.(211) und $\tau/\tau_w = 1$ integriert (dieses Integral läßt sich nicht in geschlossener Form lösen), während für den restlichen Strömungsquerschnitt die vereinfachte Form der Gleichung (62)

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{\varkappa_i} \ln \eta_i \frac{1{,}5(1+z_i^+)}{1+2z_i^{+2}} + c_i \qquad (242)$$

gewählt wurde. Für die äußere Ringspalthälfte (i=2) wurden die für das Rohr gültigen Werte $\varkappa_2 = 0{,}4$ und $c_2 = 5{,}5$ übernommen. Die Koeffizienten $\varkappa_1$ und c_1 ergeben sich aus den beiden Bedingungen, daß (1) im Wandabstand $\eta_1^+ = 42$ u/u^+ den aus dem u/u^+-Wandgesetz berechneten Wert annimmt, und (2) an der Stelle $r = r_c$ die Geschwindigkeiten u_{c1} und u_{c2} gleich groß sind.

Im Gültigkeitsbereich des ε_m/ν-Wandgesetzes wurde der Quotient $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ gleich 1 gesetzt, da die Gleichung (211) einen guten Ansatz für die ε_h/ν-Verteilung darstellt (vgl. Absatz a5 in Abachnitt 4.2.1). Für größere Wandabstände erfolgte die Berechnung von $\varepsilon_h/\varepsilon_m$ nach der von R.Jenkins /11/ angegebenen Gleichung. Um dabei eine Anpassung an Versuchsergebnisse zu erfassen, wurden die Werte nach R.Jenkins mit dem Faktor 1,20 multipliziert.

Die numerische Berechnung wurde für folgende Werte bzw. Bereiche der Parameter durchgeführt: $r_1/r_2 = 0 - 0{,}10 - 0{,}20 - 0{,}50 - 0{,}80 - 1{,}00$, $Pr = 0...1000$, $Re = 10^4...10^6$.

Für den beidseitigen Wärmeaustausch bei q_{w1}=konst., q_{w2}=konst.$\neq q_{w1}$ wird von W.M.Kays et al. ein einfaches Verfahren angegeben, um die Nußelt-Zahlen aus den Ergebnissen des einseitigen Wärmeaustauschs zu berechnen. Dieses Verfahren basiert auf der Tatsache, daß infolge der Linearität der Differentialgleichung für die Temperaturverteilung partikuläre Lösungen durch Superposition kombiniert werden können. Bezeichnet man mit Nu_{11} und Nu_{22} die Nußelt-Zahlen bei einseitigem Wärmeaustausch an der Wand 1 bzw. 2 und mit Nu_1 und Nu_2 die Nußelt-Zahlen bei beidseitigem Wärmeaustausch, bezogen auf die Wand 1 bzw. 2, also

$$Nu_{11} = \frac{q_{w1} d_h}{\lambda(\vartheta_{w1} - \vartheta_{m1})} \qquad (243a)$$

$$Nu_{22} = \frac{q_{w2} d_h}{\lambda(\vartheta_{w2} - \vartheta_{m2})} \qquad (243b)$$

$$Nu_1 = \frac{q_{w1} d_h}{\lambda(\vartheta_{w1} - \vartheta_{m12})} \qquad (244a)$$

$$Nu_2 = \frac{q_{w2} d_h}{\lambda(\vartheta_{w2} - \vartheta_{m12})} \qquad (244b)$$

so erhält man:

$$Nu_1 = \frac{Nu_{11}}{1 - \Theta_1^+ \frac{q_{w2}}{q_{w1}}} \qquad (245a)$$

und

$$Nu_2 = \frac{Nu_{22}}{1 - \Theta_2^+ \frac{q_{w1}}{q_{w2}}} \qquad (245b)$$

Die von W.M.Kays et al. mit"Einfluß-Koeffizienten"bezeichneten Größen Θ_1^+ und Θ_2^+ lassen sich mit Hilfe folgender Beziehungen berechnen:

$$\Theta_1^+ = \frac{Nu_{11}}{Nu_{22}} \left(\frac{1}{\Theta_{m2}} - 1\right) \qquad (246a)$$

und

$$\Theta_2^+ = \frac{Nu_{22}}{Nu_{11}} \left(\frac{1}{\Theta_{m1}} - 1\right) \qquad (246b)$$

Die Nußelt-Zahl Nu_{11} und die Mischungstemperatur Θ_{m1} für den Fall q_{w1}=konst., bzw. Nu_{22} und Θ_{m2} für den Fall q_{w2}=konst. sind aus den Abbildungen 69 bis 71, 83 bis 91 (betreffend Nu_{ii}) und aus der Tabelle 14 (betreffend Θ_{mi}) zu entnehmen. Als Beispiel wird anschließend für die parallelen Platten aus den Ergebnissen des asymmetrischen Wärmeaustauschs (PAS) die Nußelt-Zahl bei symmetrischem Wärmeaustausch (PS) berechnet (anstelle der Bezeichnung"asymmetrischer Wärmeaustausch", der hier für den Fall q_{w1}=konst.,q_{w2}=0 gewählt worden war, ist es besser, die Bezeichnung"einseitiger Wärmeaustausch"zu gebrauchen, um den Ausdruck "asymmetrischer Wärmeaustausch"dem Fall q_{w1}=konst.,q_{w2}=konst.$\neq q_{w1}$ vorzubehalten).

Aus den Gleichungen (245a) und (246a) folgt mit $Nu_{11}=Nu_{22}=Nu_{PAS}$, $Nu_1=Nu_{PS}$, $\Theta_{m2}=\Theta_{m1}=\Theta_{mPAS}$ und $q_{w2}=q_{w1}$:

$$Nu_{PS} = \frac{Nu_{PAS}}{2 - 1/\Theta_{mPAS}} \qquad (247)$$

Für $Pr^+=1$ und $Re=8,05.10^3$ erhält man $Nu_{PAS}=28,8$ und $\Theta_{mPAS}=0,829$ (s. Tab.15). Eingesetzt in Glg.(247) ergibt sich für Nu_{PS} der richtige Wert 36,3. Bei der laminaren Strömung gilt analog (vgl. Abschnitt 3.2.1 und 3.3.1): $Nu_{PS}=(70/13)/(2-35/26)=140/17$. Wird das asymmetrische Temperaturprofil (98) auf beide Platten angewandt, also $\Theta_1=1-2y^{+3}+y^{+4}$ und $\Theta_2=1-2(1-y^+)^3+(1-y^+)^4$, so folgt durch Addition dieser beiden Gleichungen mit Hilfe der Substitution $y_{PS}^+=2(y_{PAS}^+-0,5)$ und nach Division durch den Wert $\Theta_1+\Theta_2$, der sich für $y_{PS}^+=0$ ergibt, die Gleichung (89).

Die Ergebnisse des experimentellen Teils der Untersuchungen von W.M.Kays et al. sind in der nachfolgenden Tabelle für Pr=0,7, Re=40000 den in der vorliegenden Arbeit berechneten Werten gegenübergestellt.

	r_1/r_2	0	0,192	0,255	0,375	0,500
W.M.Kays et al./67/	Nu_{11}	-	97,0	93,0	84,5	81,0
	Nu_{22}	87,0	81,5	79,5	76,0	76,0
Vorliegende Arbeit	Nu_{11}	-	99,0	91,4	83,1	79,4
	Nu_{22}	85,1	75,1	74,0	72,6	72,1

Die Übereinstimmung erweist sich, insbesondere für den wichtigen Fall q_{w1}=konst., als recht gut. Der Einfluß des Halbmesserverhältnisses r_1/r_2 auf Nu_{11} ist in /67/ im Vergleich zu den älteren experimentellen Arbeiten wesentlich geringer. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen von W.M.Kays et al. decken sich ausgezeichnet mit deren Messungen, die Fälle mit beidseitigem Wärmeaustausch inbegriffen.

Abschließend sei hier noch der Zusammenhang zwischen der Nußelt-Zahl und der Temperaturdifferenz $(\vartheta_w-\vartheta_o)/\vartheta^+$ aufgezeigt. Durch Erweiterung und Umgruppierung der Definitionsgleichung für die Nußelt-Zahl erhält man:

$$Nu_i = \frac{\alpha d_h}{\lambda} = \frac{q_w d_h}{\lambda(\vartheta_w-\vartheta_m)} = \frac{q_w}{\rho c_p u_i^+}\,\frac{\nu\rho c_p}{\lambda}\,\frac{u_{m12} d_h}{\nu}\,\frac{u_i^+}{u_{mi}}\,\frac{u_{mi}}{u_{m12}}\,\frac{1}{\vartheta_w-\vartheta_o}\,\frac{\vartheta_w-\vartheta_o}{\vartheta_w-\vartheta_m} \tag{248a}$$

Unter Beachtung der Gleichungen (20), (174a), (174c) und (175) geht diese Beziehung über in

$$Nu_i = \frac{Re_{12} Pr\sqrt{\zeta_{12}/8}}{\Theta_m(\vartheta_w-\vartheta_o)/\vartheta^+}\sqrt{\frac{\left|(r_c/r_2)^2-(r_i/r_2)^2\right|}{(1-r_1/r_2)(r_i/r_2)}} \tag{248b}$$

Im Grenzfall des Rohres (r_1/r_2=0) und der parallelen Platten (r_1/r_2=1) entfällt die zweite Wurzel auf der rechten Seite dieser Gleichung und man erhält Glg.(210). Der Vergleich der beiden Gleichungen (207) und (210) läßt folgenden Zusammenhang für die Funktion f(Pr) erkennen:

$$f(Pr) = \Theta_m(\vartheta_w-\vartheta_o)/\vartheta^+ - 1/\sqrt{\zeta/8}$$

4.2.5. DAS ROHRBÜNDEL

Wie bereits aus der Zusammenstellung in Tabelle 1 hervorgeht, wurde die numerische Berechnung für den Fall des Rohrbündels für dieselbe feingestaffelte Auswahl der Parameter Pr^+, Re und F_o bzw. F_m durchgeführt, wie für das Rohr. Dies geschah im Hinblick darauf, daß ein von M.Rieger /80/ und vom Verfasser entworfener Versuchskreislauf zur Messung des Wärmeaustauschs längs Rohrbündeln in Vorbereitung war. Diese Anlage war so ausgelegt, daß die Wärmeübertragung sowohl an Wasser und Wasser-Glykol-Gemischen als auch an einer Natrium-Kalium-Legierung untersucht werden konnte. An drei Meßkammerpaaren mit den Teilungsverhältnissen p/d=1,25 - 1,60 - 1,95 wurden je in einer als Heizer ausgeführten Meßkammer der Fall F_o=1 (q_w=konst.) und - beschränkt auf die Versuchsreihe mit NaK - in einer als Wärmeaustauscher ausgeführten Meßkammer die Fälle $F_o \neq 1$ (einschließlich des Sonderfalls F_o=1) vorgesehen. Das Versuchsprogramm ist inzwischen abgeschlossen. Die an der Natrium-Kalium-Legierung vorgenommenen Messungen sind noch nicht ausgewertet, die Ergebnisse darüber werden zu einem späteren Zeitpunkt veröffentlicht werden. Der Bericht über die von M.Rieger an Wasser und an einem Wasser-Glykol-Gemisch durchgeführten Messungen (p/d=1,25 - 1,60) erscheint gleichzeitig mit der vorliegenden Arbeit, Ergebnisse sind auch hier bereits enthalten.

4.2.5.1. STRÖMUNGSMECHANISCHE GRÖSSEN

a) Die Geschwindigkeitsverteilung

Die von der Reynolds-Zahl und vom Teilungsverhältnis abhängigen Koeffizienten a_r und c_r der für η>30 näherungsweise gültigen Beziehung $u/u^+=a \ln\eta + c$ sowie die über $Re_T=10^4 \ldots 3.10^6$ gemittelten Koeffizienten a und c, die nur noch von p/d abhängen, sind in Tab.16 aufgeführt.

b) Die mittlere Geschwindigkeit

In Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis p/d und von der äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahl Re_T ist die mittlere Geschwindigkeit φ_{mB} in Tab.9 angegeben. In diese Tabelle sind auch die Bündel-Reynolds-Zahl Re_B und das Radienverhältnis r_1/r_2 des zugeordneten Ringspalts mit aufgenommen.

c) Der Widerstandsbeiwert

Das Verhältnis aus dem Widerstandsbeiwert $\zeta_B(Re_B)$ und dem aus dem Widerstandsgesetz des glatten Rohres berechneten Wert $\zeta_T^+=\zeta_T(Re_B)$ ist in Abb.93 dargestellt: $\zeta_B/\zeta_T^+=f_1$(Re,p/d=konst.) (Abszissenskala unten) und $\zeta_B/\zeta_T^+=f_2$(p/d,Re=konst.) (Abszissenskala oben). Wie durch kleine Kreise bzw. Quadrate angedeutet ist, läßt sich der Quotient ζ_B/ζ_T^+ näherungsweise mit Hilfe der beiden folgenden Gleichungen wiedergeben:

---

*Die Versuche wurden in der Abteilung für Flüssigmetalle des Kernforschungszentrums Fontenay-aux-Roses der Französischen Atomenergiekommission (CEA) durchgeführt. Sie sind Teil des Assoziationsvertrags EURATOM-CEA über Schnelle Neutronen.

$$\zeta_B/\zeta_T{}^+ = 0{,}81 + 0{,}24\,\frac{p}{d} \quad (\text{für } 1{,}25 < \frac{p}{d} < 2{,}0 - Re > 3.10^4) \qquad (249a)$$

$$\zeta_B/\zeta_T{}^+ = 0{,}95 + 0{,}17\,\frac{p}{d} \quad (\text{für } \frac{p}{d} > 2 - Re = 3.10^4 \ldots 3.10^5) \qquad (249b)$$

Diese Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit mehreren Versuchsergebnissen. Die von W.Eifler et al./81/ in einer von Wasser durchströmten Rohrbündel-Anordnung bei den Teilungsverhältnissen p/d=1,0...1,20 gemessenen Widerstandsbeiwerte schließen sich an die in der vorliegenden Arbeit für p/d > 1,25 berechneten Werte an. Diese Meßergebnisse sind in Abb.93 durch die gestrichelte Linie angedeutet. Dabei wurden die gemessenen Widerstandsbeiwerte ζ_B auf diejenigen des glatten Rohres ($\zeta_T{}^+$) bezogen, während in /81/ bei der Berechnung von ζ_T eine relative Rauhigkeit $\varepsilon=k/d_h$ berücksichtigt worden war (mit $\varepsilon=10^{-4}$ für p/d=1,20 ergibt sich z.B. $\zeta_B/\zeta_T=1{,}04$ gegenüber $\zeta_B/\zeta_T{}^+=1{,}09$). Diese gute Übereinstimmung mit dem Experiment läßt darauf schließen, daß die Näherung, die darin besteht, die Strömung in einem Rohrbündel derjenigen in der inneren Hälfte eines Ringspalts gleichzusetzen, bis herunter zu Teilungsverhältnissen von p/d=1,20 zulässig ist.

Bei sehr kleinen Teilungen p/d nimmt das Verhältnis ζ_B/ζ_T Werte kleiner als 1 an. Nach den Messungen von W.Eifler et al. ist dies der Fall ab Werten p/d=1,09 (in der Darstellung $\zeta_B/\zeta_T{}^+$ ab p/d=1,05). Aus einer analytischen Untersuchung von R.G.Deissler /82/ folgt $\zeta_B/\zeta_T=1$ für p/d=1,13. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Messungen von B.W.Le Tourneau et al./83/, die für p/d=1,12 über den gesamten Meßbereich Re=8000...90000 $\zeta_B \cong \zeta_T$ ergaben. Demgegenüber erhielten V.I.Subbotin et al./84/ in einem von Wasser durchströmten Rohrbündel mit p/d=1,13 Werte ζ_B/ζ_T zwischen 1,10 und 1,15.

Ergebnisse aus Messungen von E.V.Firsova /85/ an Wasser in einem Rohrbündel mit p/d=1,20 decken sich im Bereich kleiner Reynolds-Zahlen in etwa mit den hier berechneten Werten, für Re>10^4 dagegen sind sie höher (der Einfluß der Reynolds-Zahl auf den Verlauf ζ_B(Re) ist in /86/ wesentlich geringer als in den anderen hier zitierten Arbeiten). Widerstandskoeffizienten ζ_B, die gegenüber dem Rohrgesetz um 65 Prozent höher lagen, ergaben sich aus Messungen von P.Miller et al./86/ in einem von Wasser durchströmten Rohrbündel mit dem Teilungsverhältnis p/d=1,46 und Reynolds-Zahlen im Bereich zwischen 40000 und 700000.

Aus den beiden Arbeiten von W.Eifler et al. und von R.G.Deissler folgt übereinstimmend, daß ab p/d<1,05 mit Annäherung an p/d=1 der Einfluß des Teilungsverhältnisses stark zunimmt: Im Fall sich berührender Rohre (p/d=1) beträgt $\zeta_B/\zeta_T \approx 0{,}6$, ein Wert, der auch durch die Versuche von V.I.Subbotin et al. bestätigt wurde.

Nach einer analytischen Untersuchung von V.S.Osmachkin /87/ lassen sich die Widerstandsbeiwerte ζ_B des Rohrbündels innerhalb einer Genauigkeit von ±5 Prozent durch das Widerstandsgesetz des Rohres berechnen, wenn anstelle des hydraulischen Durchmessers d_h ein sog. wirksamer Durchmesser d_e eingeführt wird: d_e ist dabei diejenige Länge, die bei der laminaren Strömung in Rohrbündeln das Rohrgesetz $\zeta_{r}=64/Re$ exakt befriedigt („exakt" im Rahmen der Näherung $r_c \cong r(\tau=0)$), d.h. $\zeta_B=64/Re_e$ mit $Re_e=u_m d_e/\nu$. Der wirksame Durchmesser d_e entspricht also dem Kehrwert der rechten Seite der Gleichung (198), multipliziert mit 64/Re:

$$d_e = \frac{(r_c/r_1)^2[2\ \ln(r_c/r_1)^2 - 3]-(r_1/r_c)^2 + 4}{[1 - (r_1/r_c)^2][1 - (r_c/r_1)^2]^2}\ d_h \qquad (250)$$

4.2.5.2. DER WÄRMEAUSTAUSCH

a) Die Temperaturverteilung

Für das Teilungsverhältnis $p/d=1{,}60$ sind in Abb.94 Temperaturprofile für die Prandtl-Zahlen $Pr^+=0{,}01$ - 1,0 - 10 - 100 aufgetragen. Der Einfluß des Parameters der Wärmeflußverteilung auf die Temperaturverteilung geht für $p/d=1{,}60$, $Pr^+=0{,}01$ - 1,0 und $Re=7{,}02.10^4$ aus Abb.95 hervor. Die Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ des logarithmischen Temperaturgesetzes sind in Tab.17 für die 4 Teilungsverhältnisse $p/d=1{,}25$ - 1,60 - 1,95 - 3,50 aufgeführt.

b) Die Mischungstemperatur

Für den Fall veränderlicher Wärmestromdichte q_w längs der Wand ($F_o \neq 1$) sind Werte der Mischungstemperatur Θ_m in Tab.13, und für den Fall konstanter Wärmestromdichte in Tab.15 in Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis, von der Prandtl- und von der Reynolds-Zahl angegeben.

c) Die Nußelt-Zahl

Durch die Näherung $r_c \cong r(\tau=0)$, die den Wärmeaustausch im Rohrbündel auf jenen in der inneren Hälfte eines Ringspalts bei quasisymmetrischem Wärmeaustausch ($r_c=r_o$) zurückführt, entspricht dem (rein rechnerischen) Teilungsverhältnis $p/d=0{,}952$ das Radienverhältnis $r_c/r_1=r_2/r_1=1$, also der Fall der parallelen Platten bei symmetrischem Wärmeaustausch (PS). Aus diesem Grund ist es vorteilhaft, die Nußelt-Zahl durch das Verhältnis Nu/Nu_{PS} anzugeben.

Für den Fall q_w=konst. sind in den Abbildungen 96 bis 99 Werte dieses Quotienten über den verschiedenen Einflußgrößen aufgetragen: $Nu/Nu_{PS}=f_1(Re,Pr^+=\text{konst.},p/d=\text{konst.})$ in Abb.96 und 97, $Nu/Nu_{PS}=f_2(Pr^+,Re=\text{konst.},p/d=\text{konst.})$ in Abb.98 und $Nu/Nu_{PS}=f_3(p/d,Pr^+=\text{konst.},Re=\text{konst.})$ in Abb.99. Mit steigender Prandtl- und steigender Reynolds-Zahl nimmt Nu/Nu_{PS} ab, mit steigendem Teilungsverhältnis dagegen nimmt Nu/Nu_{PS} näherungsweise linear mit p/d zu. Die im Bereich $p/d<1{,}2$ in Abb.99 eingezeichneten Kurven gelten nur für die innere Hälfte eines Ringspalts und nicht mehr für das zugeordnete Rohrbündel, da die Näherung $r_c \cong r(\tau=0)$ dort unzulässig wird.

Der Einfluß des Parameters der Wärmeflußverteilung F_o auf die Nußelt-Zahl Nu ist in Tab. 13 für die vier obengenannten Teilungsverhältnisse in Abhängigkeit von der Prandtl- und von der Reynolds-Zahl in der Form Nu/Nu_q angegeben. Der gleiche Zusammenhang ist für $p/d=1{,}60$, $Pr^+=0{,}01$ - 3,0 und für verschiedene Reynolds-Zahlen in Abb.100 dargestellt.

Zur Berechnung der Nußelt-Zahl bei kleinen Prandtl-Zahlen mit Hilfe der Gleichung $Nu=a+b(RePr^+)^c$ sind in Abb.91 die nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate für $Pr^+=0{,}01$ und $Pr^+=0{,}03$ berechneten Koeffizienten a, b und c in Abhängigkeit von p/d aufgetragen (die Kurvenabschnitte im Bereich $p/d<1{,}2$ gelten nur für die innere Hälfte des zugeordneten Ringspalts bei quasisymmetrischem Wärmeaustausch). Die mittleren quadratischen Abweichungen, abgestuft für die 4 Teilungsverhältnisse p/d=1,25 - 1,60 - 1,95 - 3,50, betragen in Prozent: e=2,0 - 1,8 - 1,8 - 1,8.

Für mittlere Werte p/d lassen sich folgende Näherungsgleichungen für die Koeffizienten a, b und c angeben:

$$\left.\begin{aligned} Nu &= a + b(RePr^+)^c \\ a &= 2{,}8 + 6{,}8\,\frac{p}{d} \\ b &= 0{,}0072 + 0{,}0245\,\frac{p}{d} \\ c &= 0{,}80 - 0{,}024\,\frac{p}{d} \end{aligned}\right\} \qquad (251)$$

In Abb.101 sind die in der vorliegenden Arbeit für die vier Teilungen berechneten Nußelt-Zahlen (q_w=konst., $Pr^+=Pr=0{,}01$) mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen von O.E.Dwyer et al./88/ und den experimentell gewonnenen Ergebnissen von V.I.Subbotin et al./27/ verglichen.

Die von O.E.Dwyer angegebene Gleichung (gültig im Bereich $1{,}375 \leq p/d \leq 2{,}200$)

$$Nu = 0{,}93 + 10{,}81\left(\frac{p}{d}\right) - 2{,}01\left(\frac{p}{d}\right)^2 + 0{,}0252\left(\frac{p}{d}\right)^{0{,}273}(RePr^+)^{0{,}8}$$

lieferte im Vergleich zu Messungen (Nu_{exp}), die ebenfalls von O.E.Dwyer /89/ in zwei von Quecksilber durchströmten Bündeln aus 13 bzw. 19 Rohren durchgeführt wurden (q_w=konst.), die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Abweichungen:

$RePr^+$	800	1000	1500	2000	2500	3000	4000	5000
Nu_{exp}/Nu	0,76	0,80	0,84	0,86	0,88	0,89	0,90	0,90

Die aus den Messungen von V.I.Subbotin et al. abgeleitete Beziehung (gültig für $1{,}1 \leq p/d \leq 1{,}5$ - $80 \leq Pe \leq 4000$)

$$Nu = 0{,}58\,(d_h/d)^{0{,}55} Pe^{0{,}45} \qquad (252)$$

weist einen gegenüber der Theorie wesentlich stärkeren Einfluß des Teilungsverhältnisses auf die Nußelt-Zahl auf.

Ab mittleren Prandtl-Zahlen eignet sich die Beziehung (207) wieder in sehr vorteilhafter Weise zur Wiedergabe der berechneten Nußelt-Zahlen (im Fall des Rohrbündels ist die bei der Herleitung von (207) getroffene Voraussetzung $r_c=r_o$ erfüllt). Mit den in

Abb.93 dargestellten Quotienten ζ_B/ζ_T^+ (bzw. angenähert durch Glg.(249a,b)) läßt sich Nu aus der Gleichung

$$Nu = \frac{RePr^+(\zeta_B/8)}{1 + 10(Pr^+ - 0,94)(Pr^+)^{-0,22}\sqrt{\zeta_B/8}} \qquad (253)$$

bestimmen. Die mittleren quadratischen Abweichungen e für die Gesamtheit der Wertepaare $Pr^+=1 - 3 - 10 - 14 - 100 - 1000$, $Re_T \geq 4.10^3$ beträgt in Prozent (die Werte in Klammern geben die Teilungsverhältnisse an): e=1,7 (1,25) - 2,1 (1,60) - 2,7 (1,95) - 5,6 (3,50). Diese geringen Abweichungen bringen die Leistungsfähigkeit der Beziehung (207) überzeugend zum Ausdruck, wenn man bedenkt, daß in dem hier betrachteten Fall der Widerstandsbeiwert nicht nur den Einfluß der Reynolds-Zahl, sondern auch den Einfluß des Teilungsverhältnisses umfaßt.

Von V.S.Osmachkin /87/ wurde das bereits in Zusammenhang mit dem Widerstandsbeiwert in Absatz c) des Abschnitts 4.2.5.1 beschriebene Verfahren auch auf die Berechnung der Nußelt-Zahl angewandt. Die analytisch berechnete Funktion $Nu=f(r_c/r_1, Pr^+, Re)$ ließ sich näherungsweise nach Ersetzen des hydraulischen Durchmessers d_h durch den wirksamen Durchmesser d_e (Glg.250) auf die von B.S.Petukhov /46/ hergeleitete Beziehung (217) reduzieren.

In Abb.102 sind die für verschiedene Wertepaare p/d, $Pr \geq 1$ berechneten Nußelt-Zahlen über Re aufgetragen und mit experimentell ermittelten Daten verglichen. Messungen, die von P.Miller /86/ in einem von Wasser durchströmten Bündel aus 37 Rohren mit p/d=1,46 durchgeführt wurden, ergaben, bei Heizung eines einzigen Rohres (längs einer verhältnismäßig kurzen Strecke), eine im Vergleich zum Rohr um 40 Prozent höhere Nußelt-Zahl (Re=70000...700000). Zusammen mit Meßergebnissen von D.A.Dingee et al./90/ (p/d=1,12 - 1,20 - 1,27) stellte J.Weisman /91/ daraus folgende Beziehung auf:

$$Nu = (0,026\,\frac{p}{d} - 0,006)\,Re^{0,8}\,Pr^{1/3} \qquad (254)$$

Für die beiden Teilungsverhältnisse 1,25 und 1,60 und für Pr=3 ist die dieser Gleichung entsprechende Gerade in Abb.102 eingezeichnet. Der Einfluß von p/d ist im Vergleich zur Theorie wesentlich größer.

Eine recht gute Übereinstimmung ergibt sich dagegen zwischen den von M.Rieger /80/ gemessenen und den in der vorliegenden Arbeit berechneten Nußelt-Zahlen, und zwar sowohl in Bezug auf den Einfluß des Teilungsverhältnisses p/d, als auch auf den Einfluß der Prandtl- und der Reynolds-Zahl. Die theoretisch gewonnenen Werte liegen zwischen 6 Prozent für Re=10000 und 14 Prozent für Re=150000 unter den gemessenen Werten. Letztere lassen sich durch die beiden folgenden Gleichungen wiedergeben:

$$Nu = (0,0122 + 0,00245\,\frac{p}{d})\,Re^{0,86}\,Pr^{0,4} \qquad (255)$$

und

$$Nu = \frac{Re\,Pr\,(\zeta_B/8)}{1 + 8,8(Pr - 1,3)Pr^{-0,22}\sqrt{\zeta_B/8}} \qquad (256)$$

In Glg.(256) ist dabei ζ_B aus den beiden Gleichungen (249) und (69b) zu berechnen.

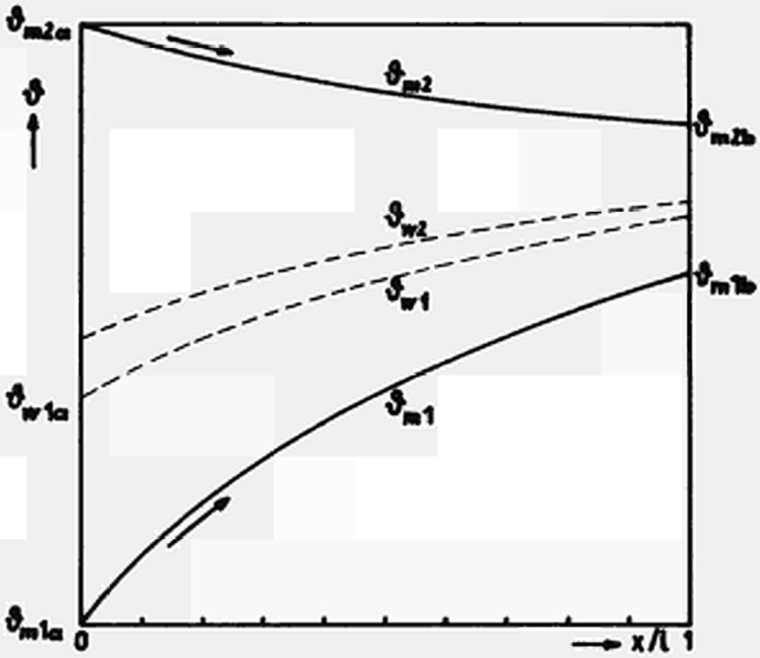
In dem Potenzgesetz (255) stimmen die Exponenten c=0,86 für Re und d=0,4 für Pr genau mit den aus Abb.64 für den Fall der parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch (PS), für $Pr^+=10$ zu entnehmenden Werten überein (der Bereich der Prandtl-Zahlen in /80/ betrug Pr=2,3...18). Der Einfluß des Teilungsverhältnisses p/d auf die Nußelt-Zahl in der Form $Nu/Nu_{PS}=a+b(p/d)$, wie er in Abb.99 zum Ausdruck kommt, wird durch die Meßergebnisse bestätigt (Glg.254 und 255).

Der Aufbau der in Glg.(207) enthaltenen Funktion $f(Pr^+)$ in der Form $f(Pr^+)=B(Pr^+-A)(Pr^+)^n$ hat sich auch bei der Auswertung der experimentell gewonnenen Daten bewährt. Wie der Vergleich der beiden Gleichungen (253) und (256) zeigt, unterscheiden sich dabei lediglich die Koeffizienten A und B, während der Wert des Exponenten n derselbe ist.

ANHANG

A 2.2.5.1. DER PARAMETER F_m BEI WÄRMEAUSTAUSCHERN

Eine anschauliche Herleitung der Gleichung (49) erhält man mit Hilfe folgender Abbildung:



Aus

$$F_m = d\vartheta_w/d\vartheta_m = \text{konst.} = \frac{\vartheta_w-\vartheta_{wa}}{\vartheta_m-\vartheta_{ma}}$$

folgt:

$$\vartheta_{w1} = \vartheta_{m1} + (k_1/\alpha_1)(\vartheta_{m2}-\vartheta_{m1})$$

$$\vartheta_{w1a} = \vartheta_{m1a} + (k_1/\alpha_1)(\vartheta_{m2a}-\vartheta_{m1a})$$

$$\vartheta_{w1}-\vartheta_{w1a} = \vartheta_{m1}-\vartheta_{m1a} - (k_1/\alpha_1)\left[(\vartheta_{m1}-\vartheta_{m1a})+(\vartheta_{m2a}-\vartheta_{m2})\right]$$

$$F_{m1} = 1 - \frac{k_1}{\alpha_1}\left(1 + \frac{\vartheta_{m2a}-\vartheta_{m2}}{\vartheta_{m1}-\vartheta_{m1a}}\right)$$

$$= 1 - \frac{k_1}{\alpha_1}\left(1 + \frac{\dot G_1 c_{p1}}{\dot G_2 c_{p2}}\right)$$

A 2.2.5.2. HERLEITUNG DES AXIALEN TEMPERATURGRADIENTEN $d\Theta_{xo}/d(x/d_h)$

Aus den Gleichungen (25), (26) und (28) erhält man mit $\Theta_o = 1$

$$\Theta_{xo} = \frac{q_w}{q_{wa}} + \Theta_{xw} \tag{A1}$$

$$\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = \frac{d(q_w/q_{wa})}{d(x/d_h)} + \frac{d\Theta_{xw}}{d(x/d_h)} \tag{A2}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Glg. (A2) lautet gem. Glg. (38):

$$\frac{d(q_w/q_{wa})}{d(x/d_h)} = m\,\frac{q_w}{q_{wa}}$$

das zweite Glied ist identisch mit:

$$\frac{d\Theta_{xw}}{d(x/d_h)} = \frac{d\Theta_{xw}}{d\Theta_{xo}}\,\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = F_o\,\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = \frac{m(q_w/q_{wa})}{1-F_o} = \frac{m\cdot e^{m(x/d_h)}}{1-F_o} \tag{A3a}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (26b), (33) und (40) kann Glg. (A3a) noch in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d\Theta_{xo}}{d(x/d_h)} = \frac{4St\;\Theta_m(\Theta_{xw}-\Theta_{xo})}{\Theta_m+(1-\Theta_m)F_oU^+} \tag{A3b}$$

A 3.1.2.2. DIE BERECHNUNG DER NUSSELT-ZAHL Nu_0 FÜR q_w=konst., $Pr \to 0$ UNTER ANWENDUNG DES LOGARITHMISCHEN GESCHWINDIGKEITSGESETZES

Die Gleichung (57) liefert mit dem Geschwindigkeitsverlauf (73b):

$$\frac{q}{q_w} = \frac{\int\limits_0^{y^+} \left(2{,}5\ \ln\left[(1-y^+)\eta_c\right] + 5{,}5\right)\ y^+\ dy^+}{y^+ \int\limits_0^1 \left(2{,}5\ \ln\left[(1-y^+)\eta_c\right] + 5{,}5\right)\ y^+\ dy^+} \tag{A4}$$

Durch die Substitution

$$1 - y^+ = z$$

geht Glg. (A4) über in:

$$\frac{q}{q_w} = \frac{1}{1-z}\left[1 - \frac{\int\limits_1^z (2{,}5\ln(\eta_c z)+5{,}5)(1-z)\ dz}{\int\limits_0^1 (2{,}5\ln(\eta_c z)+5{,}5)(1-z)\ dz}\right] \tag{A5}$$

Die Lösungen der Integrale lauten:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^z (2{,}5\ln(\eta_c z)+5{,}5)(1-z)dz &= 2{,}5\ z\left[\ln(\eta_c z)-1\right]-1{,}25\ z^2\left[\ln(\eta_c z)-0{,}5\right] \\ &\quad +5{,}5\ z(1-0{,}5\ z)\Big|_0^z \\ &= 2{,}5\ z\left[(1-0{,}5z)\ln(\eta_c z)-0{,}85z + 1{,}2\right]\end{aligned} \tag{A6}$$

und

$$\int\limits_0^1 (2{,}5\ln(\eta_c z)+5{,}5)(1-z)dz = 2{,}5(0{,}5\ \ln\eta_c+0{,}35) \tag{A7}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß $\lim\limits_{z\to 0}(z\cdot\ln z)=0$ und $\lim\limits_{z\to 0}(z^2\ln z)=0$ gilt.

Das Integral (A7) ist identisch mit $0{,}5\cdot(2{,}5\ \ln\eta_c+5{,}5)\varphi_m$, wie aus den Gleichungen (22a) und (73b) hervorgeht, und man erhält:

$$\varphi_m = \frac{2{,}5\ \ln\eta_c+1{,}75}{2{,}5\ \ln\eta_c+5{,}5} \tag{A8}$$

Wird die Größe z wieder durch $1-y^+$ ersetzt, so folgt aus den Gleichungen (A5), (A6) und (A7):

$$\frac{q}{q_w} = \frac{1}{y^+}\left[1 - \frac{(1-y^+)\left[0,5(1+y^+)\ln\left(\eta_c(1-y^+)\right)+0,85y^++0,35\right]}{0,5\ln\eta_c+0,35}\right]$$

$$= \frac{(y^+-1/y^+)\ln(1-y^+)+y^+(\ln\eta_c+1,7)-1}{\ln\eta_c+0,70} \qquad \text{(A9)}$$

Für die Nußelt-Zahl Nu_o gilt nach Glg. (76):

$$Nu_o = \frac{2}{\int_0^1 (q/q_w)dy^+} \qquad \text{(A10)}$$

Mit Glg. (A9) ergibt sich:

$$(\ln\eta_c+0,70)\int_0^1 (q/q_w)dy^+$$
$$= \int_0^1 y^+\ln(1-y^+)dy^+ - \int_0^1 \frac{\ln(1-y^+)}{y^+}dy^+ + 0,5\ \ln\eta_c - 0,15 \qquad \text{(A11)}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist bereits in Glg. (A4) enthalten:

$$\int_0^1 y^+\ln(1-y^+)dy^+ = (1-y^+)\left[0,5(1+y^+)\ln(1-y^+)-0,25y^+-0,75\right]\Big|_0^1 = -0,75 \qquad \text{(A12)}$$

Die Lösung des zweiten Integrals lautet:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-y^+)}{y^+}dy^+ = -y^+ - \frac{y^{+2}}{2^2} - \frac{y^{+3}}{3^2} - \frac{y^{+4}}{4^2}\ \cdots\Big|_0^1$$

$$= -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \ldots = -\frac{\pi^2}{6}$$

Durch Einsetzen in Glg. (A11) erhält man:

$$\int_0^1 (q/q_w)dy^+ = \frac{-0,90+\pi^2/6 +0,5 \ln\eta_c}{\ln\eta_c+0,70}$$

und für die Nußelt-Zahl folgt:

$$Nu_o = \frac{\ln\eta_c+0,70}{0,25 \ln\eta_c+\pi^2/12-0,45} \tag{A13}$$

A 3.1.2.3. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR UNVERÄNDERLICHEN WÄRMEFLUSS UND KLEINE PRANDTL-ZAHLEN

Das in Gleichung (85) enthaltene Integral

$$\int \frac{\left[1+c(1-y^+)\right] y^+}{1+Pr^+\eta_c(\varkappa/3)(0,5+y^{+2})(1-y^{+2})} dy^+ \tag{A14}$$

läßt sich durch die Identität

$$1+Pr^+\eta_c(\varkappa/3)(0,5+y^{+2})(1-y^{+2}) = -m_1\left[(0,25-y^{+2})^2-m_2^2\right]$$

wobei

und

$$m_1 = Pr^+\eta_c\varkappa/3$$

$$m_2^2 = 9/16 + 1/m_1$$

bedeuten, umformen in

$$-\frac{1}{m_1}\int \frac{\left[1+c(1-y^+)\right] y^+}{(0,25-y^{+2})^2-m_2^2} dy^+$$

$$= -\frac{1+c}{m_1}\int \frac{y^+}{(0,25-y^{+2})^2-m_2^2}dy^+ + \frac{c}{m_1}\int \frac{y^{+2}}{(0,25-y^{+2})^2-m_2^2}dy^+ \tag{A15}$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung haben zur Lösung:

$$\int \frac{y^+}{(0{,}25-y^{+2})^2-m_2^{\,2}}\,dy^+ = \frac{1}{4m_2}\quad \ln\left|\frac{y^{+2}-0{,}25-m_2}{y^{+2}-0{,}25+m_2}\right|$$

bzw.

$$\int_0^1 \frac{y^+}{(0{,}25-y^{+2})^2-m_2^{\,2}}\,dy^+ = \frac{1}{4m_2}\quad \ln\left|\frac{(0{,}75-m_2)(0{,}25-m_2)}{(0{,}75+m_2)(0{,}25+m_2)}\right|$$

und

$$\int \frac{y^{+2}}{(0{,}25-y^{+2})^2-m_2^{\,2}}\,dy^+ = \left(0{,}5-\frac{1}{8m_2}\right)\int\frac{dy^+}{(m_2-0{,}25)+y^{+2}} - \left(0{,}5+\frac{1}{8m_2}\right)\int\frac{dy^+}{(m_2+0{,}25)-y^{+2}}$$

$$= \frac{0{,}5-\frac{1}{8m_2}}{\sqrt{m_2-0{,}25}}\,\mathrm{arctg}\frac{y^+}{\sqrt{m_2-0{,}25}} - \frac{0{,}5+\frac{1}{8m_2}}{2\sqrt{m_2+0{,}25}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{m_2+0{,}25}+y^+}{\sqrt{m_2+0{,}25}-y^+}\right|$$

bzw.

$$\int_0^1 \cdots\cdots dy^+ = \frac{1}{4m_2}\left(2\sqrt{m_2-0{,}25}\;\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{m_2-0{,}25}} - \sqrt{m_2+0{,}25}\;\ln\left|\frac{\sqrt{m_2+0{,}25}+1}{\sqrt{m_2+0{,}25}-1}\right|\right)$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (A14), (A15) und (85) ergibt sich für Nu_o:

$$\left.\begin{aligned} &Nu_o = 8m_1m_2/N \\ &\text{wobei} \\ &N=(1+c)\ln\left|\frac{(0{,}75+m_2)(0{,}25+m_2)}{(0{,}75-m_2)(0{,}25-m_2)}\right| + 2c\sqrt{m_2-0{,}25}\;\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{m_2-0{,}25}} + c\sqrt{m_2+0{,}25} \\ &\qquad\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{m_2+0{,}25}-1}{\sqrt{m_2+0{,}25}+1}\right| \end{aligned}\right\}\quad (A16)$$

bedeutet. Durch Einführen von $m_3=m_2+0{,}25$ und $m_4=m_2-0{,}25$ läßt sich N zu der in Gleichung (87) angegebenen Form vereinfachen.

A 3.5.2. DIE GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG IM RINGRAUM

Die Gleichung (187)

$$\int_{u_{ci}/u_i^+}^{u_i/u_i^+} d\frac{u_i}{u_i^+} = - \frac{3\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa(1+r_c/r_i)} \int_0^{z_i^+} \frac{z_i^+ + z_i^+/\left[1+(r_i/r_c)z_i^+\right]}{(0,5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})}\, dz_i^+$$

läßt sich mit $b=1-r_i/r_c$ überführen in

$$- \frac{\varkappa(1+r_c/r_i)}{3\eta_{ci}/\eta_{c2}} \left(\frac{u-u_c}{u^+}\right)_i$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{z_i^{+2}} \frac{dz_i^{+2}}{(0,5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})} + \int_0^{z_i^+} \frac{z_i^+}{(1-bz_i^+)(0,5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})}\, dz_i^+ \tag{A17}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung, das dem linearen Anteil der Schubspannungsverteilung entspricht, ergibt:

$$\int_0^{z_i^{+2}} \frac{dz_i^{+2}}{(0,5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})} = - \frac{2}{3} \ln \frac{1-z_i^{+2}}{0,5+z_i^{+2}} \tag{A18}$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man für den Integranten des zweiten Integrals:

$$\frac{z_i^+}{(1-bz_i^+)(0,5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})} = \frac{A_1}{1-bz_i^+} + \frac{A_2 z_i^+ + A_3\sqrt{0,5}}{0,5+z_i^{+2}} + \frac{A_4}{1-z_i^+} + \frac{A_5}{1+z_i^+} \tag{A19}$$

die Koeffizienten A_j lassen sich aus den 5 Gleichungen

$$z_i^{+0}: \quad 0,5\,A_1 + \sqrt{0,5}\,A_3 + 0,5\,A_4 + 0,5\,A_5 = 0$$

$$z_i^{+1}: \quad A_2 - \sqrt{0,5}\,bA_3 + 0,5(1-b)A_4 - 0,5(1+b)A_5 = 1$$

$$z_i^{+2} : 0{,}5\,A_1 - bA_2 - \sqrt{0{,}5}A_3 + (1-0{,}5b)A_4 + (1+0{,}5b)A_5 = 0$$

$$z_i^{+3} : - A_2 + \sqrt{0{,}5}bA_3 + (1-b)A_4 - (1+b)A_5 = 0$$

$$z_i^{+4} : -A_1 + bA_2 - bA_4 + bA_5 = 0$$

bestimmen zu:

$$A_1 = -\frac{2b^3}{(1-b^2)(2+b^2)}$$

$$A_2 = \frac{4}{3(2+b^2)}$$

$$A_3 = -\frac{2\sqrt{2}\,b}{3(2+b^2)}$$

$$A_4 = \frac{1}{3(1-b)}$$

$$A_5 = -\frac{1}{3(1+b)}$$

und somit wird

$$\int_0^{z_i^+} \frac{z_i^+}{(1-bz_i^+)(0{,}5+z_i^{+2})(1-z_i^{+2})}\,dz_i^+ = -\frac{A_1}{b}\ln(1-bz_i^+) + \frac{A_2}{2}\ln(0{,}5+z_i^{+2})$$

$$+ A_3\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}z_i^+) - A_4\ln(1-z_i^+) + A_5\ln(1+z_i^+)$$

Nach Einsetzen in Glg. (A17) folgt:

$$\left(\frac{u-u_c}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\varkappa(1+r_c/r_i)}\Big[(1+3A_4)\ln(1-z_i^+) + (1-3A_5)\ln(1+z_i^+)$$

$$-(1+1{,}5A_2)\ln(0{,}5+z_i^{+2}) + \frac{3A_1}{b}\ln(1-bz_i^+) - 3A_3\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}z_i^+)\Big]$$

Durch Umgruppierung ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{u-u_c}{u^+}\right)_i = \frac{\eta_{ci}/\eta_{c2}}{\kappa}\left[\ln(1-z_i^+) + \ln\frac{1+z_i^+}{1+2z_i^{+2}} + a_{1i}\ln(1+z_i^+) + a_{2i}\ln(1+2z_i^{+2}) + a_{3i}\ln\left(1-\left(1-\frac{r_i}{r_c}\right)z_i^+\right) + a_{4i}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,z_i^+)\right]$$

mit den in Glg.(188) aufgeführten Koeffizienten.

A 3.6.1.2. DIE MISCHUNGSTEMPERATUR Θ_m FÜR q_w=konst. BEI LAMINARER STRÖMUNG LÄNGS ROHRBÜNDELN

Durch Einsetzen der Gleichungen (153), (154a) und (200) in Glg.(201a) erhält man:

$$\Theta_m = \frac{Z}{N}$$

mit

$$Z = \left[\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-1\right]\int_{(r_c/r_1)^2}^{1}\left[\ln y^{+2}-\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2(y^{+2}-1)\right]\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-2-y^{+2}\left[\ln y^{+2}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2y^{+2}+\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-2\right]-\ln y^{+2}\left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left(\ln\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2+\frac{3}{2}\right)-1\right]\right\}dy^{+2}$$

$$N = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2+\frac{3}{2}\right]-2\right\}\left[\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-1\right]\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-3+\frac{9}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+1\right]\right\} \qquad \text{(A20)}$$

Das Integral im Zähler Z, hier mit I bezeichnet, läßt sich unterteilen in:

$$I = \left[\frac{7}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2+\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2-\frac{7}{2}\right]\int\ln y^{+2}dy^{+2}-\int y^{+2}(\ln y^{+2})^2dy^{+2}+\frac{5}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2\int y^{+4}\ln y^{+2}dy^{+2}$$
$$-\left[\frac{7}{2}-3\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]\int y^{+2}\ln y^{+2}dy^{+2}+\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2+\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]$$
$$\cdot\int(\ln y^{+2})^2dy^{+2}+\left[4\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2-\frac{7}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4\right]\int y^{+2}dy^{+2} - \cdots$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 \int y^{+6}\,dy^{+2} + \left[\frac{5}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - 2\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2\right] \int y^{+4}\,dy^{+2}$$

$$+\left[\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - 2\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2\right] \int dy^{+2}$$

Nach Lösung der Einzelintegrale und Einsetzen der Grenzen folgt:

$$I = \left[\frac{7}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 + \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{7}{2}\right]\left[\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - 1\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 \left(\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 - \frac{1}{4}\right] + \frac{5}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 \left[\frac{1}{9}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^6 - \frac{1}{3}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^6 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

$$+ \left[\frac{7}{2} - 3\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right.$$

$$\left. \cdot \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]\left[2 - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right)^2 + 2\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 \ln\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]$$

$$+ \left[4\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2 - \frac{7}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4\right]\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^4\right] - \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^8\right]$$

$$+ \left[\frac{5}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - 2\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2\right]\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{r_c}{r_1}\right)^6\right] + \left[\frac{3}{4}\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^4 - 2\left(\frac{r_1}{r_c}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{r_c}{r_1}\right)^2\right]$$

Durch Umformung und Einsetzen in Glg. (A20) ergibt sich das Endergebnis Glg. (201b).

LITERATURVERZEICHNIS

/1/ W.B.Hall and P.H.Price, The effect of a longitudionally varying wall heat flux on the heat transfer coefficient for turbulent flow, Int.Developments in Heat Transfer, ASME, 72, 607-613, 1961.

/2/ D.B.Spalding, Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a stepwise discontinuity in wall temperature, Int.Developments in Heat Transfer, ASME, 439-446,1961.

/3/ A.G.Smith and V.L.Shah, The calculation of wall and fluid temperatures for the incompressible turbulent boundary layer with arbitrary distribution of wall heat flux, Int.J. Heat Mass Transfer, 5, 1179-1189,1962.

/4/ E.M.Sparrow and S.H.Lin, Boundary layers with prescribed heat flux,application to simultaneous convection and radiation, Int.J.Heat Mass Transfer, 8, 437-448,1965.

/5/ W.Tolle, Grenzschichttheoretische Untersuchungen zum Problem des Wärmeaustausches bei Gleichstrom und Gegenstrom, Dissertation an der Technischen Hochschule Karlsruhe,1964.

/6/ H.Reichardt, Die Grundlagen des turbulenten Wärmeübergangs, Archiv für die gesamte Wärmetechnik, 2, 129-142,1951.

/7/ H.Reichardt, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren, Z.Angew.Math.Mech. 31,208-219,1951.

/8/ R.R.Rotfus, J.E.Walker and G.A.Whan,Correlation of local velocities in tubes, annuli and parallel plates, A.I.Ch.E. Journal,vol.4,No 2,240-244,1958.

/9/ R.V.Bailey, Heat transfer to liquid metals in concentric annuli, U.S.Atomic Energy Commission Report,ORNL-521,1950.

/10/ R.N.Lyon, Liquid metal heat transfer coefficients, Chemical Engeneering Process, 47, 75-79, 1951.

/11/ R.Jenkins, Variation of the eddy conductivity with Prandtl modulus and its use in prediction of turbulent heat transfer coefficients, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, Stanford Calif., 147 - 158, 1951

/13/ U.Grigull und H.Tratz, Thermischer Einlauf in ausgebildeter laminarer Rohrströmung, Int.J. Heat Mass Transfer, 8, 669-678, 1965.

/14/ U.Grigull, Persönliche Mitteilung an den Verfasser.

/15/ H.Schlichting, Grenzschichttheorie, Verlag G.Braun, Karlsruhe, 3.Auflage, 152, 1958.

/16/ E.Eckert, Wärme- und Stoffaustausch, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 2.Auflage, 98, 1959.

/17/ E.Pohlhausen, Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und Wärmeleitung, Z. Angew. Math. Mech., 1, 115-121, 1921.

/18/ S.S.Kutadelatze, Fundamentals of heat transfer, 2.Edition, Edward Arnold Ltd., London, 232, 1963.

/19/ A.Fortier, Convection de chaleur, Cours professé à l'I.N.S.T.N. Saclay, 1961.

/20/ S.Sugawara, T.Sato, Heat transfer on the surface of a flat plate in the forced flow, Memorial of the Faculty of Engineering, Kyoto University, 14, 21-37, 1952.

/21/ H.Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. Phys., 56, 4-13, 1908.

/22/ O.E.Dwyer, On the transfer of heat to fluids flowing through pipes, annuli and parallel plates, Nucl. Sc. Eng.,336-344, 1963.

/23/ O.E.Dwyer, Equations for bilateral heat transfer to a fluid flowing in a concentric annulus, Nucl. Sc. Eng., 15, 52-57, 1963.

/24/ O.E.Dwyer, Bilateral heat transfer in annuli for slug and laminar flows, Nucl. Sc. Eng., 19, 48-57, 1964.

/25/ J.A.Brighton and J.B.Jones, Fully developed turbulent flow in annuli, J. Bas. Eng.,86, 835-844, 1964.

/26/ H.Schlichting, Der Wärmeübergang an einer längsangeströmten ebenen Platte mit veränderlicher Wandtemperatur, Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, 17, 1-8, 1951.

/27/ V.I.Subbotin, P.A.Ushakov, P.L.Kirillov, M.K.Ibragimov, M.N. Ivanovsky, E.V.Nomophilov, D.M.Ovechkin, D.N.Sorokin, V.P.Sorokin, Heat removal from the reactor fuel elements cooled by liquid metals, Third United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, A/CONF.28/P/328, 1964.

/28/ R.E.Johnk and T.J.Hanratty, Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe, Chem. Engng. Sci., 867-892, 1962.

/29/ T.Mizushina, T.Sasano, The ratio of the eddy diffusivities for heat and momentum and its effect on liquid metal heat transfer coefficients, Int. Developments in Heat Transfer, ASME, 78 , 662-668, 1961.

/30/ S.E.Isakoff and T.B.Drew, Heat and momentum transfer in turbulent flow of mercury, General Discussion on Heat Transfer, London Conference, London, 405-409, 1951.

/31/ R.G.Deissler and C.S.Eian, Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties, NACA TN 2629, 1952.

/32/ R.G.Deissler, Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, TR 1210, 1955, and J.P.Hartnett, Recent advances in heat and mass transfer, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., New York, Toronto, London, 1961.

/33/ L.Duchatelle, L. de Nucheze, Détermination des coefficients de convection d'un alliage sodium-potassium circulant à contre courant dans un échangeur monotubulaire, Revue Entropie, 17, 51-58, 1967.

/34/ E.Skupinski, J.Tortel, L.Vautrey, Détermination des coefficients de convection d'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire, Int. J. Heat Mass Transfer, 8, 937-951, 1965.

/35/ N.I.Buleev, Theoretical model of the mechanism of turbulent echange in fluid flow, Heat Transfer, SSSR Academy of Sciences, 1962.

/36/ P.L.Kirllov, V.I.Subbotin, M.Ya.Suvorov, M.F.Troyanov, The investigation of heat transfer to a sodium - potassium alloy in a tube, Soviet Journal of Atomic Energy, 6, 253-260, 1959.

/37/ V.I.Subbotin, M.K.Ibragimov, M.N.Ivanovski, M.N.Arnol'Dov, E.V.Nomofilov, Heat transfer from a turbulent flow of liquid metals in tubes, Atomnaya Energiya II, 133-139, 1961.

/38/ E.M.Khabakhpasheva, Yu.M.Il'In, Heat transfer to a melt of sodium and potassium in annular clearances, Atomnaya Energiya, 9, 494-496, 1960.

/39/ V.I.Subbotin, M.K.Ibragimov, E.V.Nomofilov, Emission de chaleur par une section thermiquement stable d'un tube parcouru par un courant de métaux liquides en régime turbulent, Atomnaya Energiya, 13, 155-162, 1962.

/40/ V.I.Subbotin, A.K.Papvianz, P.L.Kirillov, N.K.Ivanovski, Etude de transfert de chaleur au sodium liquide dans des tubes, Atomnaya Energiya, 13, 380-382, 1962.

/41/ M.A.Mikheev, V.A.Baum, K.D.Voskressensky, O.S.Fedynsky, Le dégagement de chaleur par les métaux en fusion, Actes de la Conférence Internationale sur l'Utilisation de l'Energie Atomique à des Fins Pacifiques, Genève, vol.IX, 327-332, 1956.

/42/ O.E.Dwyer, Eddy transport in liquid metal heat transfer, A.I.Ch.E. Journal, 9, 261-268, 1962.

/43/ R.N.Lyon, Forced convection heat transfer theory and experiments with liquid metals, AECU 419, ORNL 361, 1949.

/44/ V.I.Subbotin, P.A.Ushakov, B.N.Gabrianovich, V.D.Talonov, I.P.Sviridenko, Heat transfer in a flow of liquid metals in circular tubes, Inzh. Fiz. Zh., 6, 16-21, 1963.

/45/ H.E.Brown, B.H.Amstead, B.E.Short, The transfer of heat and momentum in a turbulent stream of mercury, ASME Diamond Jubilee Annual Meeting,, Chicago, III., Paper no.55-A-106, 1955.

/46/ B.S.Petukhov and V.N.Popov, Theoretical calculation of heat echange and frictional resistance in turbulent flow in tubes of an incompressible fluid with variable physical properties, Transl. High Temperature, 69-83, 1963.

/47/ W.L.Friend and A.B.Metzner, Turbulent heat transfer inside tubes and the analogy among heat, mass and momentum transfer. A.I.Ch.E. Journal, 4, 393-402, 1958.

/48/ M.A.Mikheev, Heat transfer in turbulent flow of a fluid in tubes, Izvest. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, 10, p. 1448, 1952.

/49/ A.P.Colburn, A method of correlating forced convection heat transfer data and comparision with fluid friction, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs, 29, 174-210, 1933.

/50/ E.N.Sieder and G.E.Tate, Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, Ind. Chem. Engng., 28, 1429-1436, 1936.

/51/ W.Hufschmidt, E.Burck, W.Riebold, Die Bestimmung örtlicher und mittlerer Wärmeübergangszahlen in Rohren bei hohen Wärmestromdichten, Int. J. Heat Mass Transfer, 9, 539-565, 1966.

/52/ S.Levy, Heat-conduction methods in forced-convection flow, Trans. ASME, 78, p.1627, 1956.

/53/ V.J.Berry, Non-uniform heat transfer to fluids flowing in conduits, Applied Scientific Research, Section A, vol.4, 61-75, 1953.

/54/ J.P.Hartnett, Experimental determination of the thermal entrance length for the flow of water and oil in circular pipes, Trans. ASME, 77, 1211-1220, 1955.

/55/ H.Latzko, Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom, Z. Angew. Math. Mech., 1, no.4, 1921.

/56/ R.G.Deissler, Analysis of turbulent heat transfer and flow in the entrance regions of smooth passages, NACA TN 3016, 1953.

/57/ L.M.K.Boelter, D.Young, H.W.Iversen, An investigation of aircraft heaters - XXVII. Distribution of heat transfer rate in the entrance section of a circular tube, NACA TN 1451, 1948.

/58/ J.L.Novotny, S.T.McComas, E.M.Sparrow, E.R.G.Eckert, Heat transfer in rectangular ducts with two heated and two unheated walls, Minnesota University, Minneapolis, Heat Transfer Lab., Contract AT (11-1)-659, 1963.

/59/ E.Brundrett and P.R.Burroughs, The temperature inner-law and heat transfer for turbulent air flow in a vertical square duct, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 1133-1142, 1967.

/60/ O.E.Dwyer and P.S.Tu, Unilateral heat transfer to liquid metals flowing in annuli, Nucl. Sc. Eng., 15, 58-68, 1962.

/61/ W.B.Harrison and J.R.Menke, Heat transfer to liquid metals flowing in asymmetrically heated channels, Trans. ASME, 71, 797-803, 1949.

/62/ L.Duchatelle, L.Vautrey, Détermination des coefficients de convection d'un alliage NaK en écoulement turbulent entre plaques planes paralleles, Int. J. Heat Mass Transfer, 9, 1017-1031, 1964.

/63/ L.M.Treffethen, L.McGregor, Heat transfer properties of liquid metals, NP 1788, Tech. Info. Service, United States Atomic Energy Comm., 1950.

/64/ E.M.Sparrow, J.R.Lloyd, C.W.Hixon, Experiments on heat transfer in an asymmetrically heated rectangular duct, Trans. ASME, 88, 170-174, 1966.

/65/ A.Roberts, A comment on the turbulent flow velocity profile in a concentric annulus, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 709-712, 1967.

/66/ R.R.Rothfus, C.C.Monrad, V.E.Senecal, Velocity distribution and fluid friction in smooth concentric annuli, Ind. Engng. Chem., 42, 2511-2520, 1950.

/67/ W.M.Kays and E.Y.Leung, Heat transfer in annular passages - hydrodynamically developed turbulent flow with arbitrarily prescribed heat flow, Int. J. Heat Mass Transfer, 6, 537-557, 1963.

/68/ F.R.Lorenz, Über turbulente Strömung durch Rohre mit kreisringförmigem Querschnitt, Mitt. Inst. Strömungsmaschinen T.H. Karlsruhe, 1932.

/69/ K.H.Presser, G.Pietrala, R.Harth, Wärmeübergang und Druckverlust an innenbeheizten Ringspalten bei Hochdruck-Gaskühlung, Chemie-Ing.-Techn., 38, 180-181, 1966.

/70/ V.I.Petrovichev, Heat transfer in mercury through annular channels, Atomnaya Energya, 7, 366-369, 1959.

/71/ R.C.Werner, E.C.King, R.A.Tidball, Heat transfer with sodium-potassium liquid alloys, Meeting of A.I.Ch.E., Pittsburgh, 1949.

/72/ R.N.Lyon, Forced convection heat transfer theory and experiment with liquid metals, ORNL-361, 1949.

/73/ R.A.Baker, A.Sesonske, Heat transfer in sodium-potassium alloy, Nucl. Sci. Eng., 13, 283-288, 1962.

/74/ B.Lubarsky, S.J.Kaufman, Review of experimental investigations of liquid metal heat transfer, NACA TN 3336, 1955.

/75/ C.C.Monrad, J.F.Pelton, Heat transfer by convection in annular spaces, Trans. A.I.Ch.E., 38, 593-611, 1942.

/76/ E.D.Davis, Heat transfer and pressure drop in annuli, Trans. ASME, 65, 755-759, 1943.

/77/ O.Walger, Wärmeübergang in ringförmigen Strömungsquerschnitten, Chem. Ing. Techn., 25, 474-476, 1953.

/78/ F.J.Quirrenbach, Wärmeübergang bei turbulenter Strömung in Ringspalten, Allg. Wärmetechnik, 9, 271-276, 1960.

/79/ R.L.Judd, J.H.T.Wade, Forced convection heat transfer in eccentric annular passages, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 272-288, 1963.

/80/ M.Rieger, Etude expérimentale du transfer de chaleur dans des faisceaux tubulaires en écoulement parallèle pour une densité de flux thermique constante dans le domaine des nombres de Prandtl moyens, Thèse de Docteur-Ingénieur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1968.

/81/ W.Eifler, R.Nijsing, Experimental inverstigation of velocity distribution and flow resistance in a triangular array of parallel rods, Nuclear Eng. Design, 5, 1967, to be published.

/82/ R.G.Deissler, M.F.Taylor, Analysis of axial turbulent flow and heat transfer through banks of rods or tubes, Reactor Heat Transfer Conference 1956: Colected Papers and Reports, John E. Viscardi (comp.), TID-7529 (Pt.1), Book 2, p. 416, 1957.

/83/ B.W.Le Torneau, R.E.Grimble, Z.E.Zerbe, Pressure drop for parallel flow through rod bundles, Trans. ASME, 79, 1751-1758, 1957.

/84/ V.I.Subbotin, P.A.Ushakov, B.N.Gabrianovich, Hydraulic resistance to the flow of a liquid along a bundle of rods, Atomnaya Energya, 9, 308-310, 1960.

/85/ E.V.Firsova, Study of heat transfer and flow resistance of water flowing parallel to a bundle of rods, Inzh. Fiz. Zhurn., 4, 17-22, 1963.

/86/ P.Miller, J.J.Byrnes, D.M.Benforado, Heat transfer to water flowing parallel to a rod bundle, A.I.Ch.E. Journal, 226-234, 1956.

/87/ V.S.Osmachkin, Some problems of heat transfer in liquid-cooled reactors, Third United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, A/CONF.28/P/326, 1964.

/88/ O.E.Dwyer, P.S.Tu, Analytical study of heat transfer rates for parallel flow of liquid metals through tube bundles, Chem. Eng. Progr., 56, 183-193, 1960.

/89/ A.J.Friedland, O.E.Dwyer, C.F.Bonilla, Heat transfer to mercury in parallel flow through bundles of circular rods, Int. Developments in Heat Transfer, ASME, 62, 526-534, 1961.

/90/ D.A.Dingee, W.B.Bell, J.W.Chastain, S.L.Fawcett, Heat transfer from parallel rods in axial flow, Batelle Memorial Institute Report BMI-1026, 1955.

/91/ J.Weisman, Heat transfer to water flowing parallel to tube bundles, Nucl. Sci. Eng., 6, 78-79, 1959.

Strömungs- Form	Querschnitt	Parameter	Zahlenwerte								
Laminar	T, PS, PAS, A1, A2, B	r_1/r_2	0,7	0,4	0,2	0,1	0,05	0,01	-	-	-
		$(r_1/r_2)_B$	0,7	0,4	0,2	0,1	0,05	0,01	-	-	-
		p/d	1,15	1,61	2,60	4,42	7,77	31,38	-	-	-
		F_o	8	4	2	1	0,5	0	F_m^+: -1	-3	-5
Turbulent	T, B	$Re(F_o=0; F_o=1)$	4.10^3	10^4	3.10^4	10^5	3.10^5	10^6	3.10^6	-	-
		η_c	141,3	310,7	812,8	2371	6378	19080	52290	-	-
		$Re(F_o \neq 0; F_o \neq 1)$	4.10^3	-	3.10^4	-	3.10^5	-	3.10^6	-	-
		Pr^+	F_o						F_m^+		
		0	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,01	8	4	2	1	0,5	0	-1	-3	-5
		0,03	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,10	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,72	8	-	-	1	-	0	-	-	-7
		1	8	4	2	1	0,5	0	-1	-3	-7
		3	8	-	-	1	-	0	-	-	-7
		10	8	-	-	1	-	0	-	-	-7
		100	-	-	-	1	-	0	-	-	-
		1000	-	-	-	1	-	0	-	-	-
	PS, PAS, A1, A2	r_1/r_2	0,7	0,4	0,2	0,1	-	-	-	-	-
		p/d	1,25	1,60	1,95	3,50	-	-	-	-	-
		$Re_T(F_o=1)$	4.10^3	10^4	3.10^4	10^5	3.10^5	10^6	3.10^6	-	-
		$Re_T(F_o \neq 1)$	4.10^3	-	3.10^4	-	3.10^5	-	3.10^6	-	-
		Pr^+	F_o						F_m^+		
		0	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,01	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,03	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		0,1	8	-	-	1	-	0	-	-3	-
		1,0	8	-	-	1	-	0	-	-	-7
		10	8	-	-	1	-	0	-	-	-7
		100	-	-	-	1	-	0	-	-	-
		1000	-	-	-	1	-	0	-	-	-

Tabelle 1. Zusammenstellung der Zahlenwerte der Parameter für die numerische Berechnung (Beim Rohrbündel wird anstelle von $Pr^+ = 0{,}72$ $Pr^+ = 14$ berechnet)

Re	4.10^3	10^4	3.10^4	10^5	3.10^5	10^6	3.10^6
n	6,0	6,3	6,6	7,0	7,6	8,6	10,0
c) φ_m	0,737	0,778	0,811	0,836	0,852	0,866	0,877
b) φ_m	0,716	0,775	0,813	0,838	0,854	0,867	0,877
a) φ_m	0,791	0,800	0,806	0,817	0,829	0,847	0,865
c) Nu_o	3,30	3,42	3,52	3,60	3,65	3,68	3,71
b) Nu_o	3,41	3,47	3,53	3,59	3,63	3,66	3,69
a) Nu_o	3,54	3,56	3,58	3,59	3,62	3,66	3,70

Tabelle 2. Nußelt-Zahl Nu_o und mittlere Geschwindigkeit φ_m bei der turbulenten Rohrströmung für q_w=konst. und $Pr \to 0$ unter Zugrundelegung verschiedener Geschwindigkeitsgesetze: -a) $\varphi = (1-y^+)^{1/n}$ -b) $\varphi = (2{,}5 \ln\eta + 5{,}5)/(2{,}5 \ln\eta_c + 5{,}5)$ -c) φ entsprechend Gleichung (62)

	Pr^+	Re	4.10^3	10^4	3.10^4	10^5	3.10^5	10^6	3.10^6
q_w= konst.	0,01	Nu_o	3,54	4,00	5,05	7,84	14,1	31,1	69,8
		Nu_o^+	3,86	4,27	5,32	8,17	14,6	32,0	71,7
	0,03	Nu_o	4,00	5,05	7,72	14,8	30,7	74,1	174
		Nu_o^+	4,41	5,46	8,20	15,6	32,0	77,0	180
	0,10	Nu_o	5,40	8,19	15,4	34,7	78,0	199	481
		Nu_o^+	6,23	9,21	16,9	37,6	83,8	222	510
ϑ_w= konst.	0,01	Nu_o	2,52	2,81	3,60	5,88	11,3	26,5	62,0
		Nu_o^+	2,76	3,08	3,95	6,42	12,2	28,5	66,0
	0,03	Nu_o	2,92	3,72	5,90	12,1	26,3	66,3	160
		Nu_o^+	3,25	4,12	6,51	13,2	28,5	71,1	170
	0,10	Nu_o	4,23	6,56	12,9	30,4	70,7	185	455
		Nu_o^+	4,90	7,54	14,6	33,9	77,9	201	490

Tabelle 3. Vergleich der mit dem Näherungsverfahren Glg.(86a) (Nu_o^+) und dem genauen numerischen Verfahren (Nu_o) gewonnenen Nußelt-Zahlen bei der turbulenten Rohrströmung

Re	$9{,}05 \cdot 10^3$	$2{,}21 \cdot 10^4$	$6{,}50 \cdot 10^4$	$2{,}14 \cdot 10^5$	$6{,}37 \cdot 10^5$	$2{,}11 \cdot 10^6$	$6{,}30 \cdot 10^6$
n	6,0	6,3	6,6	7,0	7,6	8,6	10,0
c) φ_m	0,833	0,856	0,879	0,894	0,905	0,914	0,920
b) φ_m	0,840	0,875	0,888	0,899	0,909	0,918	0,923
a) φ_m	0,852	0,863	0,868	0,874	0,883	0,897	0,910
c) Nu_o	7,18	7,32	7,42	7,51	7,56	7,60	7,63
b) Nu_o	7,39	7,46	7,52	7,57	7,62	7,66	7,57
a) Nu_o	7,43	7,45	7,47	7,50	7,53	7,59	7,63

Tabelle 4. Nußelt-Zahl $\dot{N}u_o$ und mittlere Geschwindigkeit φ_m bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten für q_w=konst. und $Pr \to 0$ unter Zugrundelegung verschiedener Geschwindigkeitsgesetze: -a) $\varphi = (1-y^+)^{1/n}$ -b) $\varphi = (2{,}5 \ln\eta + 5{,}5)/(2{,}5 \ln\eta_c + 5{,}5)$ -c) φ entsprechend Gleichung (62)

	Pr^+	Re	$9{,}05 \cdot 10^3$	$2{,}21 \cdot 10^4$	$6{,}50 \cdot 10^4$	$2{,}14 \cdot 10^5$	$6{,}37 \cdot 10^5$	$2{,}11 \cdot 10^6$	$6{,}30 \cdot 10^6$
q_w= konst.	0,01	Nu_o	7,69	8,51	10,6	16,3	29,0	63,8	143
		Nu_o^+	8,10	8,86	10,9	16,6	29,5	64,6	144
	0,03	Nu_o	8,67	10,7	16,2	30,8	63,0	151	354
		Nu_o^+	9,25	11,3	16,8	31,6	64,5	155	361
	0,10	Nu_o	11,7	17,3	32,0	71,3	160	405	975
		Nu_o^+	13,0	19,0	34,5	75,8	168	425	1020
ϑ_w= konst.	0,01	Nu_o	6,54	-	9,00	-	26,0	-	134
		Nu_o^+	7,00	-	9,55	-	27,1	-	138
	0,03	Nu_o	7,47	-	14,2	-	58,3	-	339
		Nu_o^+	8,10	-	15,1	-	61,0	-	351
	0,10	Nu_o	10,4	-	29,4	-	152	-	947
		Nu_o^+	11,7	-	32,1	-	162	-	1000

Tabelle 5. Vergleich der mit dem Näherungsverfahren (Glg.86a, dividiert durch zwei: Nu_o^+) und dem genauen numerischen Verfahren (Nu_o) gewonnenen Nußelt-Zahlen bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch

Pr	0,003	0,005	0,01	0,1	0,7	1,0	7,0	15,0	50,0	100,0	500	1000
a) $\frac{Nu_x}{Re_x^{1/2}\,Pr^{1/3}}$	0,193	0,225	0,241	0,287	0,329	0,332	0,337	0,339	0,339	0,338	0,335	0,327
b) $\frac{Nu_x}{Re_x^{1/2}\,Pr^{1/3}}$	0,193	0,208	0,228	0,291	0,321	0,323	0,329	0,330	0,331	0,331	0,331	0,331

Tabelle 7. Vergleich der für die ebene Platte bei laminarer Strömung und konstanter Wandtemperatur berechneten Nußelt-Zahlen Nu_x: -a) Exakte Werte nach Pohlhausen/Sparrow -b) Nach Glg.(134a) mit δ/δ_t aus Glg.(138a) bzw. (138b)

Re_T	r_1/r_2	0,70	0,40	0,20	0,10	0,05	0,03
4.10^3	Re_{12}	$8,66.10^3$	$8,05.10^3$	$7,30.10^3$	$6,58.10^3$	$5,93.10^3$	$5,51.10^3$
	r_e/r_2	0,8433	0,6648	0,5139	0,4047	0,3170	0,2609
	η_s	30,1	31,5	33,1	34,7	35,8	36,0
10^4	Re_{12}	$2,11.10^4$	$1,96.10^4$	$1,78.10^4$	$1,62.10^4$	$1,47.10^4$	$1,38.10^4$
	r_e/r_2	0,8432	0,6642	0,5128	0,4045	0,3197	0,2670
	η_s	44,9	49,3	54,9	60,3	64,8	67,0
3.10^4	Re_{12}	$6,22.10^4$	$5,77.10^4$	$5,24.10^4$	$4,75.10^4$	$4,33.10^4$	$4,09.10^4$
	r_e/r_2	0,8430	0,6631	0,5101	0,4001	0,3154	0,2642
	η_s	76,2	92,5	115	135	151	158
10^5	Re_{12}	$2,04.10^5$	$1,89.10^5$	$1,72.10^5$	$1,55.10^5$	$1,42.10^5$	$1,34.10^5$
	r_e/r_2	0,8428	0,6619	0,5067	0,3942	0,3077	0,2563
	η_s	147	212	300	376	426	446
3.10^5	Re_{12}	$6,08.10^5$	$5,62.10^5$	$5,08.10^5$	$4,59.10^5$	$4,19.10^5$	$3,95.10^5$
	r_e/r_2	0,8427	0,6609	0,5036	0,3889	0,3007	0,2487
	η_s	293	518	800	1022	1153	1196
10^6	Re_{12}	$2,01.10^6$	$1,86.10^6$	$1,67.10^6$	$1,51.10^6$	$1,38.10^6$	$1,30.10^6$
	r_e/r_2	0,8425	0,6597	0,5004	0,3835	0,2939	0,2413
	η_s	715	1527	2462	3138	3493	3581
3.10^6	Re_{12}	$6,00.10^6$	$5,53.10^6$	$4,97.10^6$	$4,48.10^6$	$4,09.10^6$	$3,86.10^6$
	r_e/r_2	0,8424	0,6587	0,4976	0,3791	0,2855	0,2356
	η_s	1817	4301	6985	8804	9665	9811

Tabelle 8. Reynolds-Zahl Re_{12}, neutraler Radius r_c/r_2 und Wandabstand η_s am Schnittpunkt des Wand- und Mittengesetzes für $\varepsilon_m/(\nu\eta_c)$ in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynolds-Zahl Re_T und vom Radienverhältnis r_1/r_2 bei turbulenter Strömung im Ringspalt

Re_T	p/d	1,25	1,60	1,95	3,50
4.10^3	Re_B	$9{,}45.10^3$	$1{,}00.10^4$	$1{,}06.10^4$	$1{,}26.10^4$
	φ_{mB}	0,8549	0,8742	0,8888	0,9258
	r_1/r_2	0,5996	0,3928	0,2852	0,1152
10^4	Re_B	$2{,}29.10^4$	$2{,}41.10^4$	$2{,}54.10^4$	$3{,}01.10^4$
	φ_{mB}	0,8784	0,8958	0,9089	0,9418
	r_1/r_2	0,5992	0,3922	0,2845	0,1149
3.10^4	Re_B	$6{,}70.10^4$	$7{,}02.10^4$	$7{,}36.10^4$	$8{,}59.10^4$
	φ_{mB}	0,8973	0,9130	0,9247	0,9537
	r_1/r_2	0,5986	0,3911	0,2831	0,1135
10^5	Re_B	$2{,}19.10^5$	$2{,}28.10^5$	$2{,}38.10^5$	$2{,}72.10^5$
	φ_{mB}	0,9112	0,9257	0,9364	0,9623
	r_1/r_2	0,5981	0,3899	0,2814	0,1114
3.10^5	Re_B	$6{,}50.10^5$	$6{,}72.10^5$	$6{,}95.10^5$	$7{,}80.10^5$
	φ_{mB}	0,9205	0,9341	0,9441	0,9678
	r_1/r_2	0,5977	0,3888	0,2798	0,1084
10^6	Re_B	$2{,}14.10^6$	$2{,}20.10^6$	$2{,}26.10^6$	$2{,}49.10^6$
	φ_{mB}	0,9285	0,9412	0,9507	0,9723
	r_1/r_2	0,5972	0,3876	0,2780	0,1073
3.10^6	Re_B	$6{,}37.10^6$	$6{,}51.10^6$	$6{,}65.10^6$	$7{,}18.10^6$
	φ_{mB}	0,9344	0,9466	0,9555	0,9754
	r_1/r_2	0,5968	0,3865	0,2764	0,1054

Tabelle 9. Reynolds-Zahl Re_B, mittlere Geschwindigkeit φ_{mB} und Radienverhältnis r_1/r_2 des zugeordneten Ringspalts in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynoldszahl Re_T bei turbulenter Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

Re	Pr^+	F_0	Nu/Nu_q	θ_m	Pr^+	F_0	Nu/Nu_q	θ_m
$4\cdot10^3$	0	8,00	1,330	0,661	0,01	0	0,801	0,502
10^4			1,357	0,647			0,793	0,496
$3\cdot10^4$			1,378	0,637			0,800	0,506
10^5			1,391	0,630			0,830	0,542
$3\cdot10^5$			1,398	0,626			0,866	0,592
10^6			1,403	0,623			0,904	0,651
$3\cdot10^6$			1,406	0,622			0,931	0,700
$4\cdot10^3$		0	0,790	0,493		− 0,30	0,639	0,453
10^4			0,774	0,478		− 0,30	0,624	0,447
$3\cdot10^4$			0,762	0,467		− 0,30	0,644	0,459
10^5			0,754	0,461		− 0,35	0,673	0,490
$3\cdot10^5$			0,749	0,457		− 0,40	0,735	0,542
10^6			0,746	0,454		− 0,45	0,809	0,609
$3\cdot10^6$			0,744	0,452		− 0,50	0,861	0,665
$4\cdot10^3$		− 0,35	0,559	0,425		− 0,35	0,586	0,438
10^4		− 0,30	0,583	0,426		− 0,35	0,569	0,431
$3\cdot10^4$		− 0,35	0,487	0,397		− 0,35	0,594	0,445
10^5		− 0,35	0,467	0,390		− 0,35	0,673	0,490
$3\cdot10^5$		− 0,35	0,455	0,385		− 0,50	0,662	0,516
10^6		− 0,35	0,445	0,382		− 0,60	0,741	0,580
$3\cdot10^6$		− 0,35	0,438	0,379		− 0,75	0,778	0,624
$4\cdot10^3$	0,01	8,00	1,318	0,669		− 0,40	0,510	0,417
10^4			1,333	0,662		− 0,40	0,489	0,410
$3\cdot10^4$			1,329	0,669		− 0,40	0,526	0,427
10^5			1,295	0,694		− 0,45	0,564	0,457
$3\cdot10^5$			1,248	0,729		− 0,50	0,662	0,516
10^6			1,193	0,769		− 0,65	0,698	0,562
$3\cdot10^6$			1,153	0,801		− 0,75	0,778	0,624
$4\cdot10^3$		4,00	1,202	0,633	0,03	8,00	1,297	0,683
10^4			1,211	0,626			1,297	0,686
$3\cdot10^4$			1,207	0,633			1,275	0,705
10^5			1,186	0,660			1,230	0,739
$3\cdot10^5$			1,155	0,698			1,185	0,773
10^6			1,119	0,741			1,143	0,806
$3\cdot10^6$			1,092	0,775			1,116	0,830
$4\cdot10^3$		2,00	1,094	0,597		0	0,817	0,521
10^4			1,098	0,591			0,820	0,526
$3\cdot10^4$			1,096	0,598			0,841	0,554
10^5			1,085	0,627			0,877	0,605
$3\cdot10^5$			1,070	0,667			0,908	0,657
10^6			1,053	0,714			0,935	0,708
$3\cdot10^6$			1,041	0,752			0,952	0,747
$4\cdot10^3$		0,50	0,926	0,542		− 0,35	0,633	0,461
10^4			0,923	0,536		− 0,40	0,586	0,451
$3\cdot10^4$			0,925	0,545		− 0,35	0,699	0,504
10^5			0,935	0,577		− 0,50	0,698	0,535
$3\cdot10^5$			0,948	0,622		− 0,65	0,717	0,572
10^6			0,961	0,675		− 0,80	0,772	0,625
$3\cdot10^6$			0,971	0,719		− 1,00	0,776	0,647

Tabelle 10. Auf die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmefluß Nu_q bezogene Nußelt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmestromdichteverteilung F_o, von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Rohrströmung

Re	Pr^+	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	Pr^+	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
$4 \cdot IO^3$	0,I	8,00	I,247	0,7I9	1	0	0,957	0,773
IO^4			I,229	0,733			0,967	0,793
$3 \cdot IO^4$			I,I97	0,759			0,975	0,8I3
IO^5			I,I59	0,79I			0,980	0,832
$3 \cdot IO^5$			I,I27	0,8I7			0,984	0,847
IO^6			I,I02	0,840			0,987	0,860
$3 \cdot IO^6$			I,083	0,856			0,989	0,872
$4 \cdot IO^3$		0	0,858	0,57I		−0,60	0,9I6	0,749
IO^4			0,872	0,592		−0,65	0,934	0,770
$3 \cdot IO^4$			0,897	0,632		−0,65	0,950	0,795
IO^5			0,924	0,682		−0,70	0,960	0,8I6
$3 \cdot IO^5$			0,942	0,725		−0,70	0,968	0,834
IO^6			0,958	0,763		−0,75	0,973	0,849
$3 \cdot IO^6$			0,969	0,790		−0,75	0,978	0,863
$4 \cdot IO^3$		−0,45	0,657	0,496		−I,I5	0,807	0,688
IO^4		−0,50	0,662	0,509		−I,25	0,843	0,7I2
$3 \cdot IO^4$		−0,60	0,683	0,540		−I,40	0,867	0,736
IO^5		−0,70	0,76I	0,602		−I,60	0,880	0,755
$3 \cdot IO^5$		−0,85	0,795	0,643		−I,80	0,862	0,749
IO^6		−I,05	0,820	0,679		−2,00	0,877	0,769
$3 \cdot IO^6$		−I,20	0,85I	0,7I3		−2,20	0,9I2	0,806
$4 \cdot IO^3$	1	8,00	I,II0	0,843	IO	8,00	I,033	0,944
IO^4			I,085	0,857			I,0I8	0,950
$3 \cdot IO^4$			I,067	0,870			I,0II	0,953
IO^5			I,055	0,882			I,009	0,955
$3 \cdot IO^5$			I,047	0,89I			I,008	0,956
IO^6			I,040	0,899			I,007	0,958
$3 \cdot IO^6$			I,034	0,906			I,005	0,963
$4 \cdot IO^3$		4,00	I,064	0,824		0	0,993	0,933
IO^4			I,050	0,839			0,996	0,940
$3 \cdot IO^4$			I,039	0,854			0,997	0,944
IO^5			I,032	0,867			0,998	0,946
$3 \cdot IO^5$			I,027	0,877			0,998	0,948
IO^6			I,023	0,887			0,998	0,950
$3 \cdot IO^6$			I,0I9	0,895			0,999	0,957
$4 \cdot IO^3$		2,00	I,027	0,807		−4,40	0,930	0,908
IO^4			I,02I	0,823		−4,60	0,960	0,9I9
$3 \cdot IO^4$			I,0I6	0,840		−4,70	0,974	0,925
IO^5			I,0I3	0,854		−4,80	0,98I	0,929
$3 \cdot IO^5$			I,0II	0,866		−4,85	0,983	0,932
IO^6			I,009	0,877		−4,90	0,985	0,935
$3 \cdot IO^6$			I,008	0,887		−5,I0	0,990	0,947

Tabelle 10 - Fortsetzung

		PS			PAS		
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	8,00	I,3I0	0,782	8,00	I,326	0,765
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		I,358	0,764		I,360	0,754
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		I,378	0,755		I,377	0,749
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		I,388	0,751		I,385	0,746
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	0	0,874	0,696	0	0,863	0,672
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		0,855	0,675		0,849	0,660
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		0,846	0,665		0,843	0,654
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		0,842	0,660		0,839	0,65I
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	-I,05	0,48I	0,6I5	-0,90	0,52I	0,599
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$	-I,00	0,437	0,597	-0,80	0,562	0,603
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$	-0,95	0,450	0,593	-0,90	0,445	0,578
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$	-0,90	0,479	0,595	-0,80	0,530	0,593
0,0I	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	8,00	I,298	0,787	8,00	I,3I6	0,769
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		I,307	0,785		I,320	0,768
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		I,224	0,824		I,246	0,798
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		I,I34	0,869		I,I60	0,838
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	0	0,880	0,703	0	0,867	0,676
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		0,878	0,702		0,866	0,675
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		0,9I7	0,755		0,898	0,7I2
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		0,956	0,820		0,937	0,767
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	-I,I0	0,452	0,6I3	-0,95	0,48I	0,592
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$	-I,05	0,5I6	0,626	-0,95	0,479	0,593
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$	-I,30	0,569	0,669	-0,90	0,670	0,653
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$	-I,75	0,675	0,734	-I,20	0,706	0,69I
0,03	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	8,00	I,276	0,796	8,00	I,298	0,776
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		I,253	0,808		I,275	0,786
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		I,I67	0,852		I,I95	0,822
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		I,I00	0,888		I,I27	0,856
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	0	0,890	0,7I5	0	0,874	0,684
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		0,902	0,733		0,885	0,696
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		0,942	0,796		0,922	0,745
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		0,968	0,849		0,952	0,794
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	-I,I0	0,529	0,635	-0,95	0,520	0,604
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$	-I,I5	0,582	0,658	-I,00	0,5I7	0,608
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$	-I,50	0,679	0,72I	-I,I5	0,620	0,654
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$	-2,05	0,733	0,768	-I,40	0,7I2	0,705
I	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	8,00	I,087	0,902	8,00	I,I05	0,869
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		I,057	0,9I6		I,08I	0,885
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		I,04I	0,929		I,062	0,899
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		I,030	0,939		I,048	0,9II
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	0	0,975	0,870	0	0,962	0,8I5
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$		0,984	0,890		0,972	0,838
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$		0,988	0,909		0,980	0,86I
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$		0,992	0,923		0,985	0,880
	$8,66 \cdot \mathrm{I}0^{3}$	-2,40	0,779	0,803	-I,55	0,759	0,732
	$6,2\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}0^{4}$	-2,75	0,840	0,832	-I,75	0,805	0,763
	$6,08 \cdot \mathrm{I}0^{5}$	-3,30	0,872	0,857	-2,05	0,832	0,788
	$6,00 \cdot \mathrm{I}0^{6}$	-3,95	0,892	0,876	-2,35	0,872	0,8I9

Tabelle 11. Auf die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmefluß Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmestromdichteverteilung F_o, von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer (PS) bzw. asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS)

		$r_1/r_2=0,7$ (q_{w1})			$r_1/r_2=0,7$ (q_{w2})		
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	$8,05 \cdot IO^3$	8,00	I,30I	0,789	8,00	I,344	0,743
	$5,77 \cdot IO^4$		I,332	0,779		I,38I	0,730
	$5,62 \cdot IO^5$		I,347	0,775		I,398	0,723
	$5,53 \cdot IO^6$		I,355	0,773		I,407	0,720
	$8,05 \cdot IO^3$	0	0,882	0,709	0	0,844	0,636
	$5,77 \cdot IO^4$		0,87I	0,699		0,828	0,622
	$5,62 \cdot IO^5$		0,866	0,694		0,82I	0,6I5
	$5,53 \cdot IO^6$		0,863	0,69I		0,8I6	0,6II
	$8,05 \cdot IO^3$	-I,I0	0,506	0,63I	-0,75	0,524	0,566
	$5,77 \cdot IO^4$	-I,00	0,553	0,638	-0,75	0,468	0,549
	$5,62 \cdot IO^5$	-I,I0	0,435	0,6I4	-0,80	0,362	0,525
	$5,53 \cdot IO^6$	-I,I0	0,423	0,6I2	-0,75	0,424	0,535
0,0I	$8,05 \cdot IO^3$	8,00	I,29I	0,792	8,00	I,333	0,747
	$5,77 \cdot IO^4$		I,295	0,792		I,338	0,745
	$5,62 \cdot IO^5$		I,230	0,8I9		I,259	0,778
	$5,53 \cdot IO^6$		I,I46	0,856		I,I7I	0,822
	$8,05 \cdot IO^3$	0	0,886	0,7I3	0	0,849	0,64I
	$5,77 \cdot IO^4$		0,885	0,7I4		0,847	0,639
	$5,62 \cdot IO^5$		0,9I3	0,748		0,884	0,678
	$5,53 \cdot IO^6$		0,947	0,798		0,928	0,739
	$8,05 \cdot IO^3$	-I,I5	0,462	0,623	-0,65	0,6I9	0,588
	$5,77 \cdot IO^4$	-I,I0	0,535	0,640	-0,70	0,578	0,578
	$5,62 \cdot IO^5$	-I,20	0,6I8	0,675	-0,85	0,582	0,596
	$5,53 \cdot IO^6$	-I,50	0,68I	0,7I6	-I,00	0,7I7	0,664
0,03	$8,05 \cdot IO^3$	8,00	I,274	0,799	8,00	I,3I4	0,754
	$5,77 \cdot IO^4$		I,252	0,808		I,289	0,765
	$5,62 \cdot IO^5$		I,I75	0,842		I,205	0,805
	$5,53 \cdot IO^6$		I,II4	0,873		I,I32	0,842
	$8,05 \cdot IO^3$	0	0,892	0,720	0	0,857	0,649
	$5,77 \cdot IO^4$		0,902	0,733		0,869	0,66I
	$5,62 \cdot IO^5$		0,935	0,778		0,9I2	0,7I4
	$5,53 \cdot IO^6$		0,960	0,822		0,946	0,769
	$8,05 \cdot IO^3$	-I,I5	0,508	0,635	-0,80	0,5I8	0,569
	$5,77 \cdot IO^4$	-I,20	0,528	0,646	-0,80	0,564	0,584
	$5,62 \cdot IO^5$	-I,35	0,67I	0,703	-0,95	0,647	0,630
	$5,53 \cdot IO^6$	-I,70	0,7I7	0,739	-I,I5	0,752	0,69I
1	$8,05 \cdot IO^3$	8,00	I,094	0,885	8,00	I,III	0,857
	$5,77 \cdot IO^4$		I,07I	0,899		I,084	0,874
	$5,62 \cdot IO^5$		I,054	0,9I2		I,064	0,890
	$5,53 \cdot IO^6$		I,042	0,923		I,050	0,903
	$8,05 \cdot IO^3$	0	0,969	0,84I	0	0,957	0,793
	$5,77 \cdot IO^4$		0,977	0,862		0,968	0,8I9
	$5,62 \cdot IO^5$		0,984	0,882		0,977	0,844
	$5,53 \cdot IO^6$		0,988	0,899		0,983	0,865
	$8,05 \cdot IO^3$	-I,90	0,759	0,76I	-I,30	0,780	0,7I5
	$5,77 \cdot IO^4$	-2,I5	0,805	0,79I	-I,50	0,807	0,739
	$5,62 \cdot IO^5$	-2,55	0,827	0,8I2	-I,75	0,844	0,77I
	$5,53 \cdot IO^6$	-2,95	0,855	0,835	-2,I0	0,847	0,785

belle 12. Auf die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmefluß Nu_q bezogene Nus-lt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der rmestromdichteverteilung F_o, von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Rey-lds-Zahl Re bei turbulenter Strömung in Ringspalten, Wärmeaustausch am neren (q_{w1}) bzw. äußeren Zylinder (q_{w2})

		$r_1/r_2=0,4\ (q_{w1})$			$r_1/r_2=0,4\ (q_{w2})$		
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	$7,30\cdot IO^3$	8,00	I,25I	0,825	8,00	I,358	0,7I3
	$5,24\cdot IO^4$		I,277	0,8I9		I,397	0,697
	$5,08\cdot IO^5$		I,289	0,8I6		I,4I5	0,689
	$4,97\cdot IO^6$		I,295	0,8I4		I,424	0,685
	$7,30\cdot IO^3$	0	0,9I2	0,764	0	0,820	0,587
	$5,24\cdot IO^4$		0,904	0,757		0,80I	0,570
	$5,08\cdot IO^5$		0,900	0,754		0,792	0,56I
	$4,97\cdot IO^6$		0,899	0,752		0,787	0,556
	$7,30\cdot IO^3$	-I,45	0,530	0,686	-0,65	0,434	0,498
	$5,24\cdot IO^4$	-I,30	0,6I2	0,702	-0,45	0,597	0,525
	$5,08\cdot IO^5$	-I,40	0,529	0,687	-0,60	0,4I4	0,483
	$4,97\cdot IO^6$	-I,40	0,522	0,686	-0,60	0,394	0,476
0,0I	$7,30\cdot IO^3$	8,00	I,246	0,828	8,00	I,347	0,7I8
	$5,24\cdot IO^4$		I,248	0,830		I,35I	0,7I5
	$5,08\cdot IO^5$		I,I86	0,854		I,266	0,753
	$4,97\cdot IO^6$		I,II5	0,886		I,I75	0,804
	$7,30\cdot IO^3$	0	0,9I5	0,768	0	0,826	0,592
	$5,24\cdot IO^4$		0,9I5	0,77I		0,823	0,589
	$5,08\cdot IO^5$		0,938	0,802		0,868	0,634
	$4,97\cdot IO^6$		0,964	0,847		0,920	0,704
	$7,30\cdot IO^3$	-I,40	0,600	0,702	-0,65	0,454	0,504
	$5,24\cdot IO^4$	-I,40	0,6I8	0,7I0	-0,65	0,436	0,497
	$5,08\cdot IO^5$	-I,60	0,674	0,740	-0,70	0,548	0,539
	$4,97\cdot IO^6$	-2,I0	0,704	0,772	-0,85	0,683	0,6I0
0,03	$7,30\cdot IO^3$	8,00	I,230	0,834	8,00	I,326	0,726
	$5,24\cdot IO^4$		I,209	0,844		I,299	0,737
	$5,08\cdot IO^5$		I,I40	0,873		I,206	0,784
	$4,97\cdot IO^6$		I,088	0,90I		I,I33	0,826
	$7,30\cdot IO^3$	0	0,920	0,775	0	0,836	0,60I
	$5,24\cdot IO^4$		0,929	0,788		0,849	0,6I4
	$5,08\cdot IO^5$		0,955	0,828		0,90I	0,675
	$4,97\cdot IO^6$		0,973	0,868		0,940	0,738
	$7,30\cdot IO^3$	-I,50	0,554	0,696	-0,65	0,49I	0,5I5
	$5,24\cdot IO^4$	-I,55	0,6I4	0,7I8	-0,60	0,596	0,545
	$5,08\cdot IO^5$	-I,90	0,665	0,75I	-0,75	0,662	0,590
	$4,97\cdot IO^6$	-2,40	0,745	0,795	-0,95	0,753	0,652
1	$7,30\cdot IO^3$	8,00	I,073	0,909	8,00	I,II4	0,84I
	$5,24\cdot IO^4$		I,053	0,922		I,085	0,86I
	$5,08\cdot IO^5$		I,039	0,933		I,064	0,879
	$4,97\cdot IO^6$		I,029	0,943		I,050	0,893
	$7,30\cdot IO^3$	0	0,979	0,880	0	0,952	0,765
	$5,24\cdot IO^4$		0,985	0,899		0,965	0,795
	$5,08\cdot IO^5$		0,989	0,9I6		0,976	0,824
	$4,97\cdot IO^6$		0,993	0,928		0,982	0,849
	$7,30\cdot IO^3$	-2,60	0,7I7	0,789	-I,05	0,799	0,688
	$5,24\cdot IO^4$	-3,05	0,835	0,843	-I,25	0,8I8	0,7I0
	$5,08\cdot IO^5$	-3,60	0,874	0,869	-I,50	0,853	0,746
	$4,97\cdot IO^6$	-4,30	0,894	0,887	-I,75	0,877	0,775

Tabelle 12 - Fortsetzung

		$r_1/r_2=0,2\ (q_{w1})$			$r_1/r_2=0,2\ (q_{w2})$		
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	$6,58\cdot 10^{3}$	8,00	I,188	0,864	8,00	I,360	0,687
	$4,75\cdot 10^{4}$		I,206	0,86I		I,399	0,669
	$4,59\cdot 10^{5}$		I,2I4	0,859		I,4I6	0,660
	$4,48\cdot 10^{6}$		I,2I7	0,858		I,425	0,655
	$6,58\cdot 10^{3}$	0	0,942	0,82I	0	0,80I	0,543
	$4,75\cdot 10^{4}$		0,937	0,8I8		0,779	0,523
	$4,59\cdot 10^{5}$		0,935	0,8I6		0,769	0,5I3
	$4,48\cdot 10^{6}$		0,935	0,8I6		0,764	0,508
	$6,58\cdot 10^{3}$	-I,95	0,607	0,753	-0,50	0,489	0,466
	$4,75\cdot 10^{4}$	-I,90	0,628	0,759	-0,50	0,4I4	0,440
	$4,59\cdot 10^{5}$	-2,05	0,429	0,723	-0,45	0,463	0,445
	$4,48\cdot 10^{6}$	-2,05	0,449	0,728	-0,50	0,350	0,4I9
0,0I	$6,58\cdot 10^{3}$	8,00	I,I8I	0,867	8,00	I,347	0,692
	$4,75\cdot 10^{4}$		I,I79	0,870		I,350	0,690
	$4,59\cdot 10^{5}$		I,I26	0,892		I,263	0,733
	$4,48\cdot 10^{6}$		I,072	0,920		I,I66	0,79I
	$6,58\cdot 10^{3}$	0	0,945	0,824	0	0,807	0,549
	$4,75\cdot 10^{4}$		0,946	0,830		0,806	0,545
	$4,59\cdot 10^{5}$		0,964	0,859		0,858	0,597
	$4,48\cdot 10^{6}$		0,98I	0,899		0,9I7	0,679
	$6,58\cdot 10^{3}$	-I,95	0,640	0,76I	-0,50	0,507	0,472
	$4,75\cdot 10^{4}$	-2,05	0,629	0,766	-0,45	0,558	0,48I
	$4,59\cdot 10^{5}$	-2,45	0,667	0,79I	-0,50	0,657	0,530
	$4,48\cdot 10^{6}$	-3,25	0,775	0,842	-0,70	0,73I	0,594
0,03	$6,58\cdot 10^{3}$	8,00	I,I67	0,872	8,00	I,326	0,702
	$4,75\cdot 10^{4}$		I,I47	0,883		I,297	0,7I5
	$4,59\cdot 10^{5}$		I,092	0,909		I,202	0,768
	$4,48\cdot 10^{6}$		I,053	0,932		I,I3I	0,8I6
	$6,58\cdot 10^{3}$	0	0,949	0,83I	0	0,8I9	0,559
	$4,75\cdot 10^{4}$		0,956	0,846		0,836	0,574
	$4,59\cdot 10^{5}$		0,975	0,882		0,896	0,645
	$4,48\cdot 10^{6}$		0,987	0,9I5		0,940	0,7I8
	$6,58\cdot 10^{3}$	-2,05	0,625	0,76I	-0,45	0,597	0,498
	$4,75\cdot 10^{4}$	-2,25	0,466	0,737	-0,50	0,589	0,500
	$4,59\cdot 10^{5}$	-2,75	0,780	0,832	-0,60	0,705	0,568
	$4,48\cdot 10^{6}$	-3,85	0,8I0	0,863	-0,80	0,79I	0,639
1	$6,58\cdot 10^{3}$	8,00	I,047	0,935	8,00	I,II5	0,830
	$4,75\cdot 10^{4}$		I,03I	0,947		I,082	0,853
	$4,59\cdot 10^{5}$		I,022	0,956		I,060	0,873
	$4,48\cdot 10^{6}$		I,0I5	0,963		I,047	0,888
	$6,58\cdot 10^{3}$	0	0,988	0,920	0	0,950	0,745
	$4,75\cdot 10^{4}$		0,992	0,936		0,965	0,779
	$4,59\cdot 10^{5}$		0,995	0,948		0,976	0,8I3
	$4,48\cdot 10^{6}$		0,997	0,957		0,982	0,840
	$6,58\cdot 10^{3}$	-4,05	0,8II	0,863	-0,95	0,794	0,656
	$4,75\cdot 10^{4}$	-4,50	0,9I9	0,9I2	-I,I5	0,788	0,665
	$4,59\cdot 10^{5}$	-4,85	0,953	0,934	-I,30	0,885	0,745
	$4,48\cdot 10^{6}$	-5,I5	0,970	0,948	-I,65	0,885	0,760

Tabelle 12 - Fortsetzung

		$r_1/r_2=0,1$ (q_{w1})			$r_1/r_2=0,1$ (q_{w2})		
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	$9,05\cdot IO^3$	8,00	I,I32	0,894	8,00	I,354	0,672
	$6,50\cdot IO^4$		I,I43	0,892		I,393	0,653
	$6,37\cdot IO^5$		I,I47	0,892		I,4II	0,643
	$6,30\cdot IO^6$		I,I49	0,892		I,4I9	0,638
	$9,05\cdot IO^3$	0	0,963	0,863	0	0,792	0,5I7
	$6,50\cdot IO^4$		0,960	0,862		0,768	0,496
	$6,37\cdot IO^5$		0,959	0,862		0,758	0,486
	$6,30\cdot IO^6$		0,959	0,862		0,752	0,480
	$9,06\cdot IO^3$	-2,60	0,6I9	0,790	-0,45	0,475	0,435
	$6,50\cdot IO^4$	-2,55	0,675	0,806	-0,30	0,598	0,453
	$6,37\cdot IO^5$	-2,60	0,647	0,802	-0,40	0,455	0,4I5
	$6,30\cdot IO^6$	-2,65	0,6I2	0,796	-0,40	0,436	0,408
0,0I	$9,05\cdot IO^3$	8,00	I,I26	0,897	8,00	I,34I	0,678
	$6,50\cdot IO^4$		I,I2I	0,90I		I,344	0,676
	$6,37\cdot IO^5$		I,079	0,922		I,256	0,724
	$6,30\cdot IO^6$		I,039	0,947		I,I59	0,787
	$9,05\cdot IO^3$	0	0,965	0,867	0	0,799	0,524
	$6,50\cdot IO^4$		0,967	0,874		0,798	0,52I
	$6,37\cdot IO^5$		0,980	0,902		0,856	0,580
	$6,30\cdot IO^6$		0,99I	0,936		0,9I9	0,67I
	$9,05\cdot IO^3$	-2,65	0,633	0,795	-0,40	0,565	0,459
	$6,50\cdot IO^4$	-2,70	0,726	0,824	-0,45	0,484	0,436
	$6,37\cdot IO^5$	-3,50	0,669	0,828	-0,50	0,6I4	0,495
	$6,30\cdot IO^6$	-4,50	0,909	0,9I5	-0,70	0,704	0,565
0,03	$9,05\cdot IO^3$	8,00	I,II6	0,90I	8,00	I,3I9	0,689
	$6,50\cdot IO^4$		I,096	0,9I2		I,289	0,704
	$6,37\cdot IO^5$		I,053	0,937		I,I95	0,762
	$6,30\cdot IO^6$		I,027	0,956		I,I25	0,8I4
	$9,05\cdot IO^3$	0	0,968	0,873	0	0,8I2	0,535
	$6,50\cdot IO^4$		0,975	0,889		0,832	0,553
	$6,37\cdot IO^5$		0,987	0,922		0,896	0,633
	$6,30\cdot IO^6$		0,994	0,948		0,942	0,7I4
	$9,05\cdot IO^3$	-2,70	0,708	0,8I5	-0,30	0,680	0,495
	$6,50\cdot IO^4$	-3,00	0,765	0,84I	-0,50	0,507	0,452
	$6,37\cdot IO^5$	-4,I5	0,849	0,887	-0,60	0,673	0,537
	$6,30\cdot IO^6$	-4,85	0,945	0,935	-0,75	0,8I7	0,64I
1	$9,05\cdot IO^3$	8,00	I,027	0,955	8,00	I,II2	0,826
	$6,50\cdot IO^4$		I,0I6	0,966		I,077	0,85I
	$6,37\cdot IO^5$		I,0I0	0,973		I,056	0,873
	$6,30\cdot IO^6$		I,007	0,978		I,043	0,889
	$9,05\cdot IO^3$	0	0,994	0,947	0	0,950	0,737
	$6,50\cdot IO^4$		0,997	0,96I		0,967	0,776
	$6,37\cdot IO^5$		0,998	0,970		0,978	0,8I3
	$6,30\cdot IO^6$		0,999	0,976		0,984	0,84I
	$9,05\cdot IO^3$	-4,80	0,946	0,934	-0,85	0,833	0,664
	$6,50\cdot IO^4$	-5,25	0,972	0,953	-I,05	0,860	0,698
	$6,37\cdot IO^5$	-5,60	0,984	0,966	-I,35	0,88I	0,734
	$6,30\cdot IO^6$	-5,85	0,990	0,974	-I,65	0,900	0,765

Tabelle 12 - Fortsetzung

	p/d = I,25				p/d = I,60			
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	9,45·IO^3	8,00	I,287	0,80I	I,00·IO^4	8,00	I,266	0,8I8
	6,70·IO^4		I,334	0,784	7,02·IO^4		I,309	0,802
	6,50·IO^5		I,355	0,776	6,72·IO^5		I,329	0,795
	6,37·IO^6		I,364	0,772	6,5I·IO^6		I,338	0,79I
	9,45·IO^3	0	0,890	0,726	I,00·IO^4	0	0,905	0,752
	6,70·IO^4		0,872	0,707	7,02·IO^4		0,888	0,734
	6,50·IO^5		0,864	0,697	6,72·IO^5		0,880	0,725
	6,37·IO^6		0,860	0,692	6,5I·IO^6		0,877	0,720
	9,45·IO^3	-I,I5	0,554	0,658	I,00·IO^4	-I,40	0,475	0,666
	6,70·IO^4	-I,I5	0,453	0,629	7,02·IO^4	-I,25	0,523	0,667
	6,50·IO^5	-I,I0	0,460	0,625	6,72·IO^5	-I,30	0,420	0,644
	6,37·IO^6	-I,I0	0,434	0,6I8	6,5I·IO^6	-I,25	0,452	0,647
0,0I	9,45·IO^3	8,00	I,276	0,806	I,00·IO^4	8,00	I,252	0,823
	6,70·IO^4		I,287	0,804	7,02·IO^4		I,263	0,822
	6,50·IO^5		I,207	0,84I	6,72·IO^5		I,I87	0,857
	6,37·IO^6		I,I2I	0,884	6,5I·IO^6		I,I05	0,899
	9,45·IO^3	0	0,896	0,733	I,00·IO^4	0	0,9I0	0,759
	6,70·IO^4		0,894	0,732	7,02·IO^4		0,908	0,759
	6,50·IO^5		0,928	0,783	6,72·IO^5		0,939	0,808
	6,37·IO^6		0,963	0,845	6,5I·IO^6		0,970	0,868
	9,45·IO^3	-I,20	0,549	0,66I	I,00·IO^4	-I,40	0,530	0,68I
	6,70·IO^4	-I,20	0,549	0,662	7,02·IO^4	-I,40	0,542	0,686
	6,50·IO^5	-I,45	0,644	0,7I5	6,72·IO^5	-I,70	0,655	0,743
	6,37·IO^6	-2,I0	0,648	0,753	6,5I·IO^6	-2,45	0,747	0,807
0,03	9,45·IO^3	8,00	I,258	0,8I5	I,00·IO^4	8,00	I,234	0,832
	6,70·IO^4		I,236	0,827	7,02·IO^4		I,2I4	0,843
	6,50·IO^5		I,I49	0,868	6,72·IO^5		I,I33	0,883
	6,37·IO^6		I,088	0,902	6,5I·IO^6		I,075	0,9I6
	9,45·IO^3	0	0,905	0,745	I,00·IO^4	0	0,9I8	0,77I
	6,70·IO^4		0,9I6	0,763	7,02·IO^4		0,928	0,789
	6,50·IO^5		0,95I	0,82I	6,72·IO^5		0,960	0,845
	6,37·IO^6		0,974	0,87I	6,5I·IO^6		0,980	0,892
	9,45·IO^3	-I,25	0,569	0,672	I,00·IO^4	-I,50	0,504	0,682
	6,70·IO^4	-I,20	0,684	0,7I0	7,02·IO^4	-I,60	0,573	0,7I0
	6,50·IO^5	-I,80	0,675	0,747	6,72·IO^5	-2,I5	0,670	0,77I
	6,37·IO^6	-2,40	0,799	0,8I5	6,5I·IO^6	-3,00	0,726	0,8I6
1	9,45·IO^3	8,00	I,078	0,9I4	I,00·IO^4	8,00	I,069	0,925
	6,70·IO^4		I,049	0,928	7,02·IO^4		I,042	0,938
	6,50·IO^5		I,034	0,940	6,72·IO^5		I,028	0,949
	6,37·IO^6		I,025	0,948	6,5I·IO^6		I,020	0,957
	9,45·IO^3	0	0,979	0,889	I,00·IO^4	0	0,982	0,906
	6,70·IO^4		0,986	0,909	7,02·IO^4		0,989	0,924
	6,50·IO^5		0,99I	0,925	6,72·IO^5		0,993	0,938
	6,37·IO^6		0,994	0,937	6,5I·IO^6		0,996	0,949
	9,45·IO^3	-2,95	0,759	0,822	I,00·IO^4	-3,50	0,784	0,850
	6,70·IO^4	-3,40	0,845	0,856	7,02·IO^4	-4,I5	0,852	0,877
	6,50·IO^5	-4,I5	0,856	0,870	6,72·IO^5	-4,55	0,930	0,9I6
	6,37·IO^6	-4,50	0,935	0,9I2	6,5I·IO^6	-4,85	0,957	0,935

Tabelle 13. Auf die Nußelt-Zahl bei konstantem Wärmefluß Nu_q bezogene Nusselt-Zahl Nu sowie Mischungstemperatur θ_m in Abhängigkeit vom Parameter der Wärmestromdichteverteilung F_o, von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re bei turbulenter Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

	p/d = 1,95				p/d = 3,50			
Pr^+	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m	Re	F_o	Nu/Nu_q	θ_m
0	I,06·IO^4	8,00	I,246	0,83I	I,26·IO^4	8,00	I,I82	0,866
	7,36·IO^4		I,287	0,8I7	8,59·IO^4		I,223	0,854
	6,95·IO^5		I,307	0,8I0	7,80·IO^5		I,239	0,849
	6,65·IO^6		I,3I5	0,806	7,I8·IO^6		I,246	0,847
	I,06·IO^4	0	0,9I5	0,772	I,26·IO^4	0	0,943	0,823
	7,36·IO^4		0,900	0,754	8,59·IO^4		0,93I	0,809
	6,95·IO^5		0,893	0,747	7,80·IO^5		0,926	0,803
	6,65·IO^6		0,890	0,742	7,I8·IO^6		0,924	0,800
	I,06·IO^4	-I,55	0,476	0,684	I,26·IO^4	-I,95	0,6I9	0,757
	7,36·IO^4	-I,40	0,526	0,687	8,59·IO^4	-I,90	0,546	0,739
	6,95·IO^5	-I,45	0,4I6	0,664	7,80·IO^5	-I,80	0,580	0,743
	6,65·IO^6	-I,35	0,500	0,676	7,I8·IO^6	-I,90	0,457	0,720
0,0I	I,06·IO^4	8,00	I,232	0,836	I,26·IO^4	8,00	I,I74	0,87I
	7,36·IO^4		I,242	0,835	8,59·IO^4		I,I8I	0,872
	6,95·IO^5		I,I70	0,870	7,80·IO^5		I,I2I	0,906
	6,65·IO^6		I,093	0,9I0	7,I8·IO^6		I,063	0,940
	I,06·IO^4	0	0,920	0,778	I,26·IO^4	0	0,946	0,830
	7,36·IO^4		0,9I8	0,780	8,59·IO^4		0,946	0,834
	6,95·IO^5		0,948	0,828	7,80·IO^5		0,968	0,88I
	6,65·IO^6		0,975	0,885	7,I8·IO^6		0,986	0,929
	I,06·IO^4	-I,55	0,545	0,702	I,26·IO^4	-2,05	0,609	0,760
	7,36·IO^4	-I,60	0,5I4	0,700	8,59·IO^4	-2,I0	0,635	0,774
	6,95·IO^5	-2,05	0,522	0,733	7,80·IO^5	-3,00	0,679	0,824
	6,65·IO^6	-2,90	0,754	0,829	7,I8·IO^6	-4,I5	0,876	0,909
0,03	I,06·IO^4	8,00	I,2I5	0,845	I,26·IO^4	8,00	I,I58	0,879
	7,36·IO^4		I,I95	0,857	8,59·IO^4		I,I4I	0,892
	6,95·IO^5		I,II9	0,895	7,80·IO^5		I,082	0,927
	6,65·IO^6		I,066	0,926	7,I8·IO^6		I,043	0,953
	I,06·IO^4	0	0,928	0,790	I,26·IO^4	0	0,953	0,84I
	7,36·IO^4		0,938	0,808	8,59·IO^4		0,96I	0,86I
	6,95·IO^5		0,966	0,863	7,80·IO^5		0,980	0,9II
	6,65·IO^6		0,983	0,907	7,I8·IO^6		0,99I	0,944
	I,06·IO^4	-I,55	0,630	0,727	I,26·IO^4	-2,20	0,620	0,770
	7,36·IO^4	-I,75	0,629	0,742	8,59·IO^4	-2,50	0,682	0,804
	6,95·IO^5	-2,45	0,7I3	0,802	7,80·IO^5	-3,90	0,769	0,868
	6,65·IO^6	-3,55	0,794	0,855	7,I8·IO^6	-4,75	0,9I9	0,93I
1	I,06·IO^4	8,00	I,063	0,932	I,26·IO^4	8,00	I,045	0,953
	7,36·IO^4		I,037	0,946	8,59·IO^4		I, 30	0,965
	6,95·IO^5		I,024	0,956	7,80·IO^5		I,0I3	0,973
	6,65·IO^6		I,0I7	0,963	7,I8·IO^6		I,009	0,979
	I,06·IO^4	0	0,985	0,9I7	I,26·IO^4	0	0,99I	0,945
	7,36·IO^4		0,99I	0,935	8,59·IO^4		0,995	0,960
	6,95·IO^5		0,995	0,948	7,80·IO^5		0,997	0,970
	6,65·IO^6		0,997	0,957	7,I8·IO^6		0,998	0,977
	I,06·IO^4	-4,05	0,8I2	0,874	I,26·IO^4	-4,75	0,9I8	0,933
	7,36·IO^4	-4,45	0,9II	0,9I0	8,59·IO^4	-5,25	0,96I	0,953
	6,95·IO^5	-4,85	0,950	0,934	7,80·IO^5	-5,60	0,979	0,967
	6,65·IO^6	-5,I5	0,968	0,948	7,I8·IO^6	-5,85	0,987	0,974

Tabelle 13 – Fortsetzung

$(r_1/r_2)_1$	Re	Pr^+						
		0	0,0I	0,03	0,I	1	IO	IOO
0,7	8,05·IO^{3}	0,732	0,736	0,743	0,762	0,852	0,95I	0,989
	I,96·IO^{4}	0,727	0,733	0,744	0,770	0,86I	0,953	0,990
	5,77·IO^{4}	0,722	0,736	0,754	0,786	0,87I	0,954	0,990
	I,89·IO^{5}	0,720	0,749	0,774	0,807	0,88I	0,956	0,990
	5,62·IO^{5}	0,7I8	0,768	0,795	0,826	0,889	0,957	0,990
	I,86·IO^{6}	0,7I6	0,792	0,8I8	0,844	0,897	0,958	0,99I
	5,53·IO^{6}	0,7I5	0,8I4	0,836	0,858	0,904	0,959	0,990
0,4	7,30·IO^{3}	0,78I	0,784	0,790	0,808	0,887	0,964	0,993
	I,78·IO^{4}	0,777	0,783	0,793	0,8I6	0,895	0,966	0,993
	5,24·IO^{4}	0,774	0,787	0,803	0,83I	0,904	0,968	0,993
	I,72·IO^{5}	0,772	0,798	0,82I	0,850	0,9I2	0,969	0,993
	5,08·IO^{5}	0,77I	0,8I6	0,840	0,866	0,9I9	0,970	0,993
	I,67·IO^{6}	0,770	0,837	0,860	0,882	0,925	0,97I	0,993
	4,97·IO^{6}	0,769	0,856	0,876	0,894	0,93I	0,972	0,993
0,2	6,58·IO^{3}	0,832	0,835	0,84I	0,857	0,923	0,978	0,995
	I,62·IO^{4}	0,830	0,835	0,845	0,866	0,930	0,980	0,996
	4,75·IO^{4}	0,828	0,840	0,855	0,880	0,938	0,98I	0,996
	I,55·IO^{5}	0,827	0,85I	0,87I	0,896	0,945	0,982	0,996
	4,59·IO^{5}	0,827	0,867	0,888	0,9I0	0,950	0,982	0,996
	I,5I·IO^{6}	0,827	0,887	0,905	0,923	0,954	0,983	0,996
	4,48·IO^{6}	0,826	0,903	0,9I9	0,933	0,958	0,984	0,996
0,I	9,05·IO^{3}	0,870	0,873	0,879	0,894	0,949	0,987	0,997
	2,20·IO^{4}	0,869	0,875	0,884	0,903	0,955	0,988	0,998
	6,50·IO^{4}	0,869	0,880	0,894	0,9I6	0,962	0,989	0,998
	2,I4·IO^{5}	0,869	0,89I	0,9I0	0,93I	0,967	0,990	0,998
	6,37·IO^{5}	0,869	0,906	0,925	0,943	0,97I	0,99I	0,998
	2,II·IO^{6}	0,869	0,924	0,939	0,953	0,974	0,99I	0,998
	6,30·IO^{6}	0,869	0,938	0,950	0,960	0,977	0,992	0,998
$(r_1/r_2)_2$								
0,7	8,05·IO^{3}	0,67I	0,675	0,683	0,705	0,8II	0,934	0,986
	5,77·IO^{4}	0,657	0,673	0,694	0,73I	0,834	0,939	0,987
	5,62·IO^{5}	0,650	0,7I0	0,742	0,778	0,856	0,942	0,987
	5,53·IO^{6}	0,646	0,764	0,790	0,8I7	0,874	0,945	0,987
0,4	7,30·IO^{3}	0,630	0,635	0,644	0,669	0,788	0,926	0,984
	5,24·IO^{4}	0,6I3	0,632	0,656	0,698	0,8I4	0,932	0,985
	5,08·IO^{5}	0,605	0,674	0,7II	0,752	0,839	0,936	0,985
	4,97·IO^{6}	0,60I	0,736	0,766	0,796	0,860	0,940	0,986
0,2	6,58·IO^{3}	0,595	0,600	0,6I0	0,638	0,77I	0,92I	0,983
	4,75·IO^{4}	0,576	0,597	0,625	0,673	0,80I	0,928	0,984
	4,59·IO^{5}	0,567	0,646	0,688	0,734	0,830	0,933	0,985
	4,48·IO^{6}	0,562	0,7I7	0,750	0,783	0,853	0,937	0,986
0,I	9,05·IO^{3}	0,575	0,58I	0,592	0,623	0,765	0,920	0,982
	6,50·IO^{4}	0,554	0,579	0,609	0,66I	0,799	0,929	0,985
	6,37·IO^{5}	0,545	0,633	0,679	0,728	0,830	0,934	0,985
	6,30·IO^{6}	0,540	0,7II	0,746	0,78I	0,853	0,938	0,987

Tabelle 14. Mischungstemperatur Θ_m für turbulente Strömung in Ringspalten bei konstantem Wärmefluß in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr^+, von der Reynolds-Zahl Re und vom Radienverhältnis r_1/r_2 für Wärmeaustausch am inneren ($(r_1/r_2)_1$) bzw. äußeren Zylinder ($(r_1/r_2)_2$)

p/d	Re	Pr^+ 0	0,0I	0,03	0,I	1	IO	IOO
I,25	9,45 IO^3	0,748	0,754	0,765	0,793	0,895	0,969	0,993
	2,29 IO^4	0,737	0,748	0,766	0,803	0,903	0,972	0,994
	6,70 IO^4	0,729	0,753	0,780	0,823	0,9I2	0,973	0,995
	2,I9 IO^5	0,723	0,772	0,807	0,848	0,92I	0,974	0,995
	6,50 IO^5	0,720	0,798	0,833	0,868	0,927	0,975	0,995
	2,I4 IO^6	0,7I7	0,829	0,859	0,886	0,934	0,976	0,995
	6,37 IO^6	0,7I5	0,854	0,878	0,900	0,939	0,977	0,995
I,60	I,00 IO^4	0,770	0,776	0,787	0,8I5	0,909	0,974	0,994
	2,4I IO^4	0,760	0,77I	0,789	0,825	0,9I8	0,977	0,995
	7,02 IO^4	0,753	0,776	0,803	0,845	0,926	0,978	0,996
	2,28 IO^5	0,748	0,795	0,829	0,868	0,934	0,979	0,996
	6,72 IO^5	0,745	0,82I	0,854	0,887	0,940	0,980	0,996
	2,20 IO^6	0,742	0,85I	0,879	0,904	0,946	0,98I	0,996
	6,5I IO^6	0,740	0,875	0,897	0,9I6	0,950	0,982	0,996
I,95	I,06 IO^4	0,788	0,794	0,805	0,832	0,920	0,977	0,995
	2,54 IO^4	0,778	0,789	0,806	0,842	0,928	0,980	0,996
	7,36 IO^4	0,77I	0,794	0,82I	0,86I	0,936	0,982	0,996
	2,38 IO^5	0,766	0,8I3	0,846	0,883	0,944	0,983	0,996
	6,95 IO^5	0,764	0,839	0,87I	0,90I	0,949	0,984	0,997
	2,26 IO^6	0,76I	0,868	0,894	0,9I7	0,954	0,984	0,997
	6,65 IO^6	0,760	0,89I	0,9II	0,929	0,958	0,985	0,997
3,50	I,26 IO^4	0,834	0,840	0,850	0,875	0,946	0,986	0,997
	3,0I IO^4	0,826	0,837	0,853	0,886	0,954	0,988	0,997
	8,59 IO^4	0,820	0,843	0,868	0,903	0,96I	0,990	0,998
	2,72 IO^5	0,8I7	0,862	0,892	0,923	0,967	0,99I	0,998
	7,80 IO^5	0,8I4	0,886	0,9I4	0,938	0,97I	0,99I	0,998
	2,49 IO^6	0,8I3	0,9I2	0,933	0,950	0,974	0,992	0,998
	7,I8 IO^6	0,8I2	0,93I	0,946	0,958	0,977	0,992	0,999
PS	8,66 IO^3	0,722	0,728	0,739	0,768	0,877	0,963	0,992
	2,II IO^4	0,7I0	0,722	0,740	0,778	0,886	0,966	0,993
	6,2I IO^4	0,702	0,726	0,755	0,799	0,896	0,967	0,993
	2,04 IO^5	0,696	0,746	0,783	0,826	0,905	0,968	0,993
	6,08 IO^5	0,693	0,774	0,8II	0,847	0,9I3	0,969	0,993
	2,0I IO^6	0,690	0,807	0,838	0,867	0,920	0,970	0,994
	6,00 IO^6	0,688	0,833	0,858	0,882	0,926	0,971	0,994
PAS	8,66 IO^3	0,70I	0,705	0,7I2	0,732	0,829	0,94I	0,987
	2,II IO^4	0,694	0,70I	0,7I3	0,740	0,839	0,944	0,988
	6,2I IO^4	0,689	0,704	0,723	0,757	0,850	0,945	0,988
	2,04 IO^5	0,685	0,7I8	0,745	0,780	0,86I	0,947	0,988
	6,08 IO^5	0,683	0,738	0,767	0,800	0,870	0,948	0,988
	2,0I IO^6	0,68I	0,764	0,792	0,820	0,879	0,949	0,989
	6,00 IO^6	0,680	0,787	0,8II	0,835	0,887	0,950	0,989
T	4,00 IO^3	0,557	0,567	0,583	0,626	0,794	0,935	0,985
	1,00 IO^4	0,543	0,560	0,587	0,644	0,811	0,942	0,987
	3,00 IO^4	0,533	0,568	0,610	0,677	0,829	0,945	0,989
	1,00 IO^5	0,527	0,599	0,653	0,719	0,845	0,948	0,989
	3,00 IO^5	0,523	0,642	0,697	0,754	0,858	0,950	0,989
	1,00 IO^6	0,520	0,692	0,740	0,786	0,870	0,951	0,990
	3,00 IO^6	0,518	0,733	0,773	0,809	0,881	0,951	0,990

Tabelle 15. Mischungstemperatur Θ_m für turbulente Strömung in Rohren (T), zwischen parallelen Platten bei symmetrischem (PS) bzw. asymmetrischem Wärmeaustausch (PAS) und längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung, p/d=1,25 - 1,60 - 1,95 - 3,50) bei konstantem Wärmefluß in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl Pr^+ und von der Reynolds-Zahl Re

Re_T		r_1/r_2 0,7	0,4	0,2	0,1	p/d 1,25	1,60	1,95	3,50
$4 \cdot 10^3$	a_r	,35(2,18)	1,65(1,61)	0,97(1,03)	0,43(0,51)	2,25	1,76	1,52	0,71
	c_r	6,59(7,66)	8,27(8,74)	9,46(9,50)	10,2(10,2)	7,07	8,96	9,74	12,4
	e_r	8,0 (9,7)	3,3 (6,8)	3,5 (2,0)	9,8 (4,2)	6,6	4,4	2,5	2,8
10^4	a_r	2,76(2,66)	2,13(2,18)	1,45(1,63)	0,87(1,10)	2,66	2,25	1,97	1,16
	c_r	3,86(4,51)	5,72(5,60)	7,39(6,65)	8,67(7,69)	4,40	6,18	7,31	10,4
	e_r	4,3 (5,1)	1,0 (3,2)	4,2 (1,3)	9,2 (5,6)	2,8	1,1	0,9	5,0
$3 \cdot 10^4$	a_r	2,67(2,65)	2,16(2,29)	1,51(1,78)	1,00(1,32)	2,59	2,28	2,00	1,29
	c_r	3,70(3,87)	5,31(4,61)	7,41(5,9^0)	8,76(6,99)	4,27	5,74	7,11	10,3
	e_r	2,0 (2,4)	0,7 (1,1)	3,9 (1,9)	7,2 (5,0)	1,1	0,7	1,7	4,9
10^5	a_r	2,55(2,57)	2,14(2,29)	1,66(1,91)	1,23(1,52)	2,50	2,26	2,06	1,52
	c_r	4,07(3,91)	5,41(4,41)	6,97(5,26)	8,27(6,34)	4,58	5,83	6,89	9,61
	e_r	1,0 (1,2)	0,8 (0,6)	2,6 (1,4)	4,6 (3,2)	0,7	0,8	1,4	3,4
$3 \cdot 10^5$	a_r	2,48(2,51)	2,14(2,27)	1,76(1,96)	1,38(1,64)	2,45	2,27	2,12	1,71
	c_r	4,33(4,08)	5,44(4,44)	6,69(5,09)	8,00(6,09)	4,81	5,86	6,75	8,96
	e_r	1,0 (1,2)	0,7 (0,8)	1,9 (0,8)	3,5 (2,0)	0,7	0,7	1,1	2,6
10^6	a_r	2,43(2,45)	2,16(2,26)	1,86(2,01)	1,58(1,75)	2,43	2,29	2,18	1,88
	c_r	4,55(4,38)	5,41(4,52)	6,39(4,98)	7,32(5,75)	4,96	5,80	6,48	8,25
	e_r	1,1 (1,4)	0,6 (0,8)	2,3 (0,7)	4,5 (2,6)	0,6	0,7	1,2	3,0
$3 \cdot 10^6$	a_r	2,41(2,42)	2,18(2,25)	1,94(2,04)	1,72(1,83)	2,41	2,31	2,24	2,01
	c_r	4,68(4,49)	5,36(4,59)	6,07(4,92)	6,69(5,48)	5,04	5,74	6,27	7,69
	e_r	1,1 (1,6)	0,9 (0,7)	3,2 (1,3)	5,8 (3,9)	0,5	0,9	1,7	3,9
10^4...	a	2,39(2,39)	2,17(2,22)	1,94(2,02)	1,78(1,86)	2,40	2,29	2,21	1,99
	c	5,03(4,98)	5,38(4,86)	5,53(4,78)	5,33(4,62)	5,23	5,79	6,21	7,08
$3 \cdot 10^6$	e	1,7 (2,1)	0,8 (1,2)	2,9 (1,2)	5,6 (3,6)	1,1	0,8	1,4	3,7

Tabelle 16. Koeffizienten a und c des bei turbulenter Strömung für $\eta \geq 30$ näherungsweise gültigen logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes $u/u^+ = a \ln \eta + c$, angewandt auf die innere Hälfte von Ringspalten ($r_1 \leq r \leq r_c$, $r_1/r_2 = 0{,}7 - 0{,}4 - 0{,}2 - 0{,}1$) und auf Rohrbündel (Dreieckanordnung, $p/d = 1{,}25 - 1{,}60 - 1{,}95 - 3{,}50$): a_r und c_r in Abhängigkeit von der äquivalenten Rohr-Reynoldszahl Re_T, a und c dagegen Mittelwerte für den Bereich $Re_T = 10^4 \ldots\ldots 3 \cdot 10^6$. Die Werte e geben in % die mittleren quadratischen Abweichungen gegenüber den mit Hilfe der Gleichungen (186a,b,c) einerseits bzw. (192) andrerseits (Werte in Klammern) für die verschiedenen Teilabszissen berechneten Geschwindigkeiten an: $e_r(Re_T)$ sowie e unter Zugrundelegung der Koeffizienten a und c

Pr^+	Re_T		T	PS	PAS	$(r_1/r_2)_1$				p/d			
						0,7	0,4	0,2	0,1	1,25	1,60	1,95	3,50
1.0	4.10^3	a_{rp}	3,52	3,18	5,45	4,86	3,77	2,38	1,28	2,73	2,33	1,97	1,18
		d_{rp}	1,69	2,37	-6,53	-4,27	-0,42	4,19	7,03	3,70	4,76	5,73	6,98
		e_{pr}	4,3	1,3	12,9	9,2	3,4	9,4	26,0	3,5	7,2	10,5	24,7
	10^4	a_{rp}	3,41	3,18	5,00	4,76	3,82	2,64	1,60	2,80	2,46	2,19	1,34
		c_{rp}	1,87	2,41	-5,49	-4,69	-0,95	3,47	6,89	3,68	4,77	5,53	7,90
		e_{pr}	3,9	2,0	11,2	8,9	4,6	4,4	14,5	1,2	3,2	5,3	13,5
	3.10^4	a_{rp}	3,21	3,07	4,33	4,04	3,46	2,53	1,67	2,77	2,49	2,29	1,67
		c_{rp}	2,44	2,85	-2,98	-1,59	0,71	4,53	7,78	3,94	4,96	5,64	7,50
		e_{pr}	2,8	1,8	8,2	6,7	4,1	2,0	6,7	0,9	1,2	2,3	6,4
	10^5	a_{rp}	3,05	2,96	3,79	3,59	3,14	2,44	1,73	2,71	2,50	2,36	1,85
		c_{rp}	2,97	3,27	-0,82	0,29	2,20	5,29	8,44	4,27	5,05	5,59	7,44
		e_{pr}	1,7	1,3	5,7	4,7	3,0	0,9	2,8	0,6	0,9	1,5	3,4
	3.10^5	a_{rp}	2,93	2,87	3,39	3,28	2,94	2,42	1,84	2,68	2,51	2,39	2,00
		c_{rp}	3,40	3,61	1,02	1,72	3,20	5,56	8,32	4,39	5,05	5,56	7,12
		e_{pr}	1,4	1,0	4,6	3,9	2,3	0,8	2,9	0,7	1,1	1,6	3,6
	10^6	a_{rp}	2,83	2,79	3,16	3,08	2,81	2,42	2,00	2,63	2,50	2,41	2,15
		c_{rp}	3,78	3,94	1,90	2,57	3,78	5,60	7,66	4,66	5,21	5,53	6,60
		e_{pr}	1,8	1,3	5,1	4,2	2,5	1,0	4,2	0,7	1,2	2,0	4,4
	10^4 ...	a_p	2,87	2,83	3,29	3,18	2,88	2,46	2,05	2,66	2,52	2,43	2,18
		c_p	3,82	3,88	1,69	2,34	3,62	5,29	6,62	4,54	4,99	5,26	5,84
	10^6	e_p	1,8	1,3	5,6	4,6	2,6	1,7	5,6	0,8	1,4	2,2	5,3
10	4.10^3	a_{rp}	3,82	3,46	5,91	5,26	4,07	2,56	1,39	2,96	2,52	2,12	1,27
		c_{rp}	54,8	54,6	44,7	47,2	50,8	54,4	54,9	55,6	56,3	56,8	55,5
		e_{pr}	2,4	0,4	4,6	2,6	0,7	4,3	10,6	1,0	2,4	3,7	9,5
	10^4	a_{rp}	3,59	3,36	5,31	4,99	3,98	2,72	1,65	2,93	2,56	2,28	1,38
		c_{rp}	54,9	54,9	46,0	47,5	51,2	55,3	57,5	56,2	57,2	57,6	58,8
		e_{pr}	1,5	0,7	3,4	2,4	1,1	1,5	4,4	0,3	0,8	1,5	4,1
	3.10^4	a_{rp}	3,32	3,17	4,55	4,22	3,57	2,58	1,69	2,85	2,55	2,33	1,70
		c_{rp}	55,3	55,6	48,5	50,7	53,2	57,1	59,9	56,8	57,8	58,3	59,8
		e_{pr}	0,7	0,5	2,0	1,5	1,0	0,3	1,0	0,3	0,2	0,4	1,1
	10^5	a_{rp}	3,13	3,03	3,98	3,75	3,23	2,48	1,73	2,75	2,53	2,37	1,85
		c_{rp}	55,8	56,1	50,4	52,5	54,7	58,1	61,2	57,2	58,0	58,5	60,3
		e_{pr}	0,5	0,3	1,5	1,2	0,7	0,5	1,4	0,2	0,3	0,5	1,4

Tabelle 17. Koeffizienten a und $c(Pr^+)$ des bei turbulenter Strömung für $\eta > 25$ näherungsweise gültigen Temperaturgesetzes $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = a \ln\eta + c(Pr^+)$, angewandt auf die verschiedenen Strömungsquerschnitte bei q_w=konst.: $a_{rp}(Pr^+,Re_T)$ und $c_{rp}(Pr^+,Re_T)$, $a_p(Pr^+)$ und $c_p(Pr^+)$, a als Bestwert für $c(Pr^+) \neq f(Re_T)$. Die Werte e geben in Prozent die mittleren quadratischen Abweichungen gegenüber den genauen Ergebnissen an: $e_{pr}(Pr^+,Re_T)$ und $e_p(Pr^+)$ unter Zugrundelegung von a_p und $c_p(Pr^+)$, $e(Pr^+)$ und e_m unter Zugrundelegung von a und $c(Pr^+)$

Pr^+	Re_T		T	PS	PAS	$(r_1/r_2)_1$				p/d			
						0,7	0,4	0,2	0,1	1,25	1,60	1,95	3,50
10	3.10^5	a_{rp}	2,99	2,93	3,58	3,43	3,02	2,44	1,83	2,71	2,53	2,39	1,98
		c_{rp}	56,3	56,4	52,2	53,9	55,8	58,4	61,4	57,3	58,1	58,7	60,2
		e_{pr}	0,8	0,5	2,2	1,7	0,9	0,6	2,2	0,2	0,4	0,7	2,1
	10^6	a_{rp}	2,88	2,84	3,33	3,21	2,88	2,43	1,97	2,64	2,50	2,40	2,12
		c_{rp}	56,4	56,6	52,8	54,8	56,0	58,4	60,5	57,6	58,3	58,7	59,9
		e_{pr}	1,5	1,1	3,4	2,5	1,9	0,5	2,4	0,5	0,5	0,9	2,5
	$10^4 \ldots$	a_p	3,00	2,97	3,73	3,56	3,12	2,56	2,16	2,75	2,58	2,47	2,27
		c_p	56,7	56,4	52,5	53,9	55,6	57,0	57,6	57,2	57,6	57,8	57,3
	10^6	e_p	0,6	0,3	1,6	1,2	0,6	0,5	1,7	0,2	0,3	0,6	1,6
100	4.10^3	a_{rp}	3,86	3,47	5,96	5,29	4,09	2,58	1,41	2,98	2,54	2,15	1,30
		c_{rp}	361	358	347	350	352	350	343	358	357	355	345
		e_{pr}	1,5	0,3	1,9	0,6	0,3	2,1	5,2	0,3	0,9	1,6	4,7
	10^4	a_{rp}	3,62	3,37	5,36	5,03	4,00	2,73	1,65	2,94	2,57	2,28	1,39
		c_{rp}	360	358	347	350	354	356	354	359	359	358	355
		e_{pr}	0,8	0,3	1,3	0,6	0,3	0,6	1,8	0,1	0,2	0,5	1,7
	3.10^4	a_{rp}	3,34	3,19	4,60	4,27	3,60	2,59	1,70	2,86	2,56	2,34	1,70
		c_{rp}	359	358	347	352	355	358	360	359	360	360	360
		e_{pr}	0,2	0,1	0,5	0,3	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1	0,3
	10^5	a_{rp}	3,14	3,05	4,05	3,80	3,26	2,49	1,73	2,76	2,53	2,37	1,85
		c_{rp}	359	358	348	354	356	359	362	359	360	361	361
		e_{pr}	0,2	0,1	0,4	0,3	0,1	0,2	0,6	0,0	0,1	0,1	0,5
	3.10^5	a_{rp}	3,00	2,94	3,63	3,48	3,04	2,44	1,82	2,71	2,52	2,38	1,97
		c_{rp}	359	358	349	356	357	359	362	359	360	361	362
		e_{pr}	0,3	0,2	0,7	0,4	0,3	0,1	0,7	0,1	0,1	0,2	0,7
	$10^4 \ldots$	a_p	2,82	2,89	3,55	3,52	3,07	2,63	2,56	2,70	3,45	2,54	2,72
		c_p	361	359	352	357	358	358	355	359	363	360	356
	3.10^5	e_p	0,3	0,1	0,5	0,3	0,2	0,2	0,7	0,1	0,1	0,2	0,6

Tabelle 17 - Fortsetzung

Pr^+	Re_T		T	PS	PAS	$(r_1/r_2)_1$ 0,7	0,4	0,2	0,1	p/d 1,25	1,60	1,95	3,50
1000	$4\cdot10^3$	a_{rp}	3,95	3,48	6,01	5,40	3,97	2,59	1,41	3,01	2,73	2,41	1,34
		c_{rp}	2230	2210	2190	2200	2200	2180	2130	2200	2200	2180	2140
		e_{pr}	1,0	0,3	1,4	0,2	0,0	1,0	2,7	0,0	0,3	0,7	2,5
	10^4	a_{rp}	3,63	3,39	5,43	5,05	3,96	2,79	1,59	2,92	2,58	2,18	1,31
		c_{rp}	2220	2200	2180	2200	2200	2190	2170	2200	2210	2210	2180
		e_{pr}	0,5	0,2	0,8	0,2	0,3	0,1	0,8	0,1	0,0	0,1	0,8
	$3\cdot10^4$	a_{rp}	3,33	3,14	4,61	4,27	3,64	2,59	1,69	2,84	2,57	2,31	1,71
		c_{rp}	2200	2200	2170	2200	2200	2200	2190	2200	2210	2210	2200
		e_{pr}	0,1	0,00	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,1
	10^5	a_{rp}	3,12	3,04	4,03	3,80	3,25	2,47	1,73	2,76	2,54	2,36	1,84
		c_{rp}	2200	2200	2170	2200	2200	2200	2190	2200	2210	2210	2200
		e_{pr}	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0	0,0	0,2
	$3\cdot10^5$	a_{rp}	3,03	2,94	3,64	3,48	3,05	2,44	1,82	2,72	2,51	2,38	1,95
		c_{rp}	2200	2200	2170	2200	2200	2200	2190	2210	2210	2210	2200
		e_{pr}	0,1	0,0	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,3
	10^4... $3\cdot10^5$	a_p	2,16	2,62	2,58	3,56	2,47	2,52	3,51	2,67	2,63	2,71	4,17
		c_p	2210	2210	2180	2200	2200	2200	2190	2210	2210	2210	2190
		e_p	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	0,0	0,0	0,1	0,3
1.....1000	$\geq10^4$	a	2,87	2,83	3,30	3,19	2,88	2,45	2,04	2,65	2,51	2,42	2,16
		e_m	1,7	1,1	5,1	4,1	2,4	1,5	4,9	0,7	1,2	2,0	4,8
1		c	3,83	3,90	1,63	2,34	3,61	5,33	6,68	4,56	5,04	5,29	5,91
		e	2,0	1,4	6,3	5,1	2,9	1,9	6,3	0,9	1,6	2,5	6,0
10		c	57,4	57,2	55,1	56,1	57,0	57,9	58,3	57,7	58,0	58,1	57,9
		e	0,9	0,5	2,4	1,8	1,1	0,8	2,4	0,3	0,5	0,8	2,3
100		c	360	360	355	359	359	359	358	360	360	360	359
		e	0,4	0,2	0,7	0,4	0,3	0,3	0,9	0,1	0,1	0,2	0,9
1000		c	2210	2210	2170	2200	2200	2200	2190	2210	2210	2210	2200
		e	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,0	0,1	0,4

Tabelle 17 - Fortsetzung

Funktion	Fall (Abschnitt) T (4.2.1) Abb.	T (4.2.1) Abs.	PS (4.2.2) Abb.	PAS (4.2.3) Abb.	A (4.2.4) Abb.	B (4.2.5) Abb.
$\Theta(y^+, Re=c, Pr^+=c)$	38	a1	60	67	81	94
$\Theta(y^+, Pr^+=c, F_o=c)$	39	a6	61	68	82	95
$Nu(Re, Pr=0)$	48	d1	48	48	48	48
$Nu(Re, Pr^+=c)$	49	d2	62	69	-	-
$Nu(Pr^+, Re=c)$	50	d3	63	70	-	-
$Nu=a+bRe^c Pr^{+d}$	51	d4	64	71	-	-
$Nu=a+b(RePr^+)^c$	52	d5	52	52	91	91
$f(Pr^+)$ - Glg.(207,215)	53	d6	53	53	(53)	(53)
$Nu/Nu_q(F_o, Re=c, Pr^+=c)$	54	d7	-	-	-	100
$Nu(Pe)$ - Exp.	55/56	d8	-	72	92	101
$Nu(Re, Pr=c)$ - Exp.	57/58	d9	65	-	-	102
$x_e/d(Re, Pr^+=c)$	59	e	66	73	-	-
	Tab.	Abs.	Tab.	Tab.	Tab.	Tab.
$\left.\begin{matrix} Nu/Nu_q \\ \Theta_m \end{matrix}\right\}(F_o, Re=c, Pr^+=c)$	10	d7/c	11	11	12	13
$\Theta_m(Re=c, Pr^+=c)$	15	c	15	15	14	15
$(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = a \ln\eta + c(Pr^+)$	17	a5	17	17	17	17

Tabelle 18. Verzeichnis gleichwertiger Darstellungen in Abbildungen und Tabellen

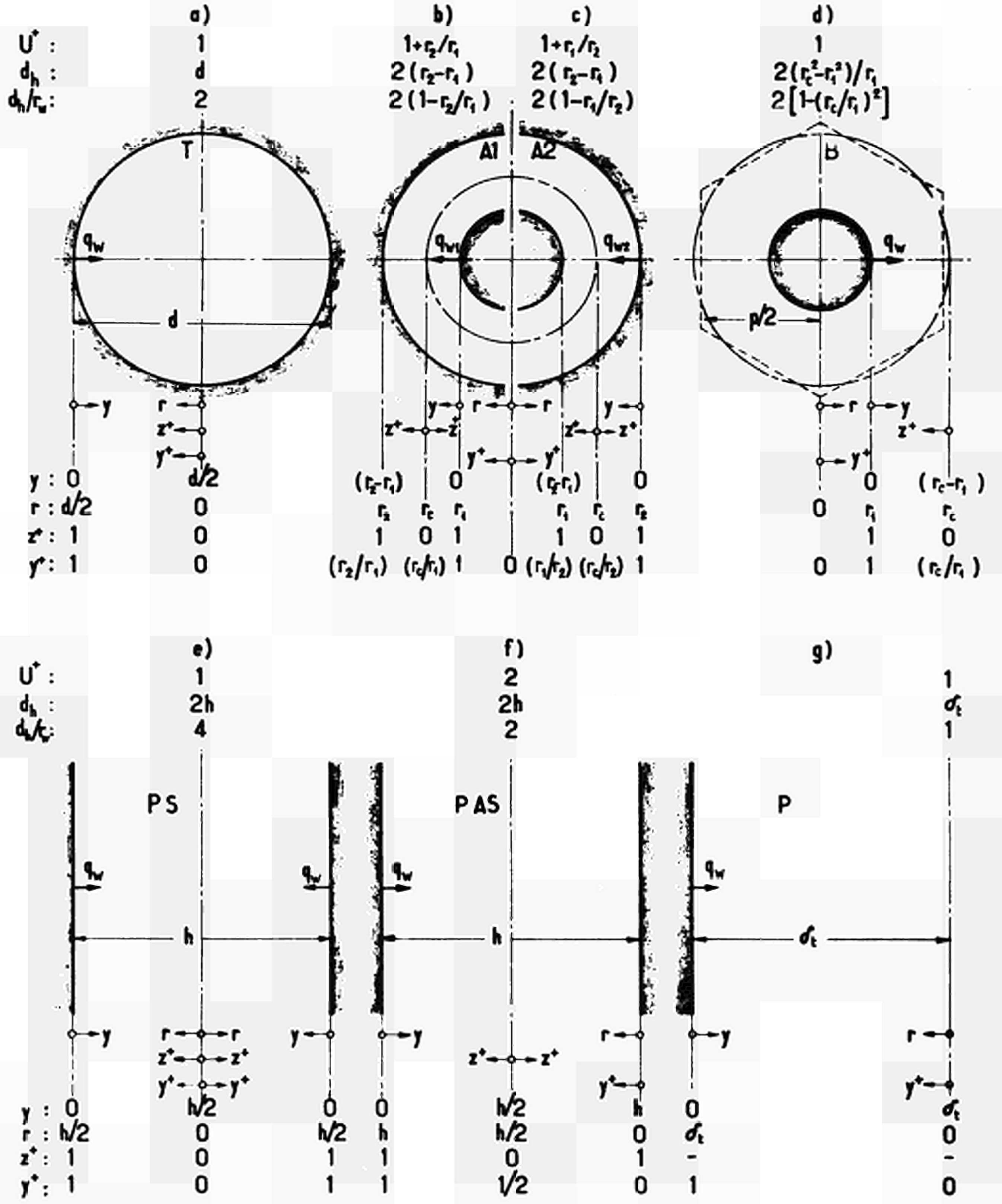


ABB.1. Zusammenstellung der geometrischen Daten und der Bezeichnungen für die verschiedenen Strömungsquerschnitte. -a)Rohr (T) -b)Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder (A1) -c)Ringspalt, Wärmeaustausch am äußeren Zylinder (A2) - d)Rohrbündel (B) -e)Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch (PS) -f)Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch (PAS) -g)Ebene Platte

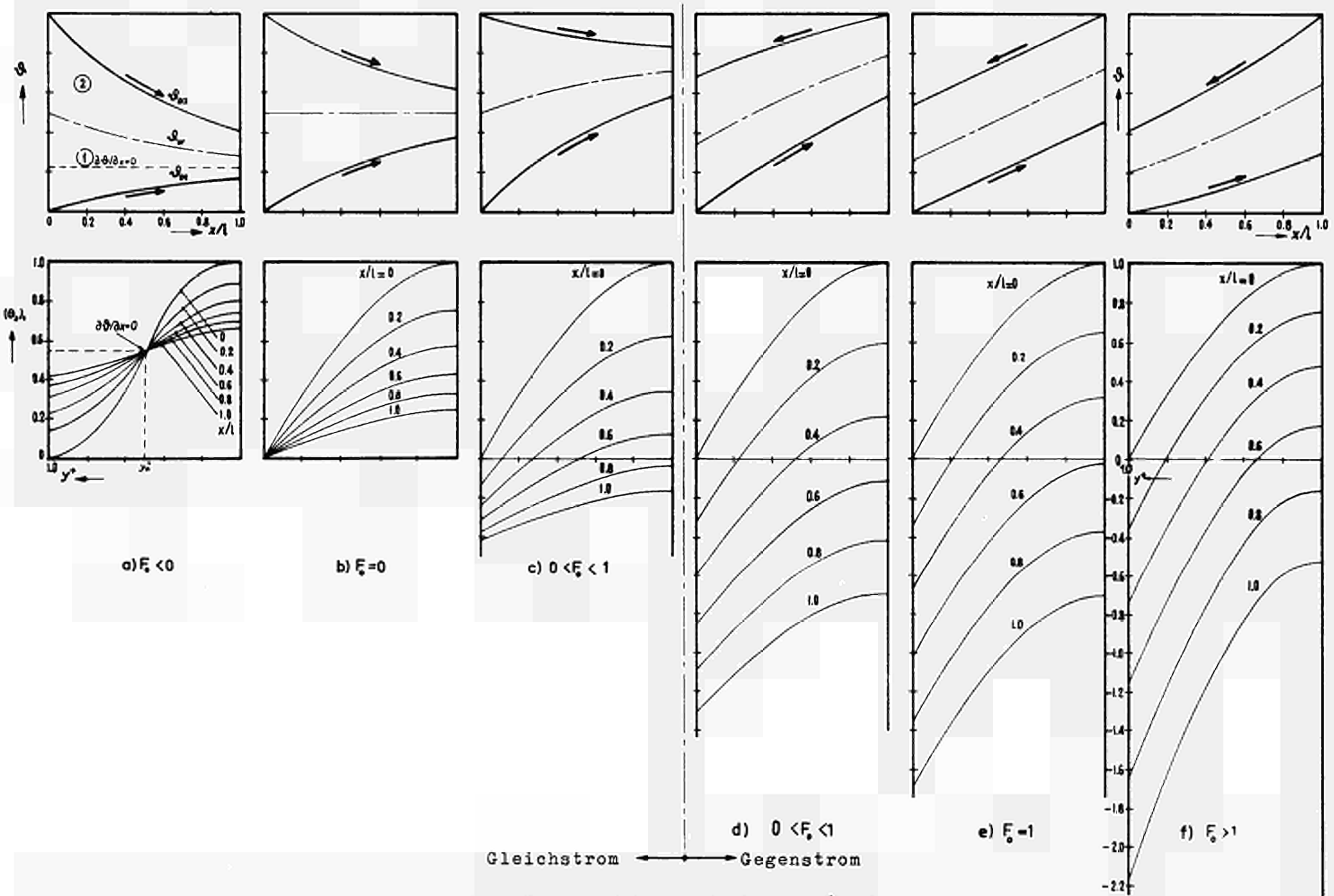


ABB.2. Temperaturverteilungen $\vartheta_o = f_1(x/l)$, $\vartheta_w = f_2(x/l)$ und $(\Theta_x)_1 = f_3(y^+, x/l)$ für verschiedene Bereiche bzw. Werte des Parameters der Wärmeflussverteilung F_o im Strömungsquerschnitt 1 eines Wärmeaustauschers

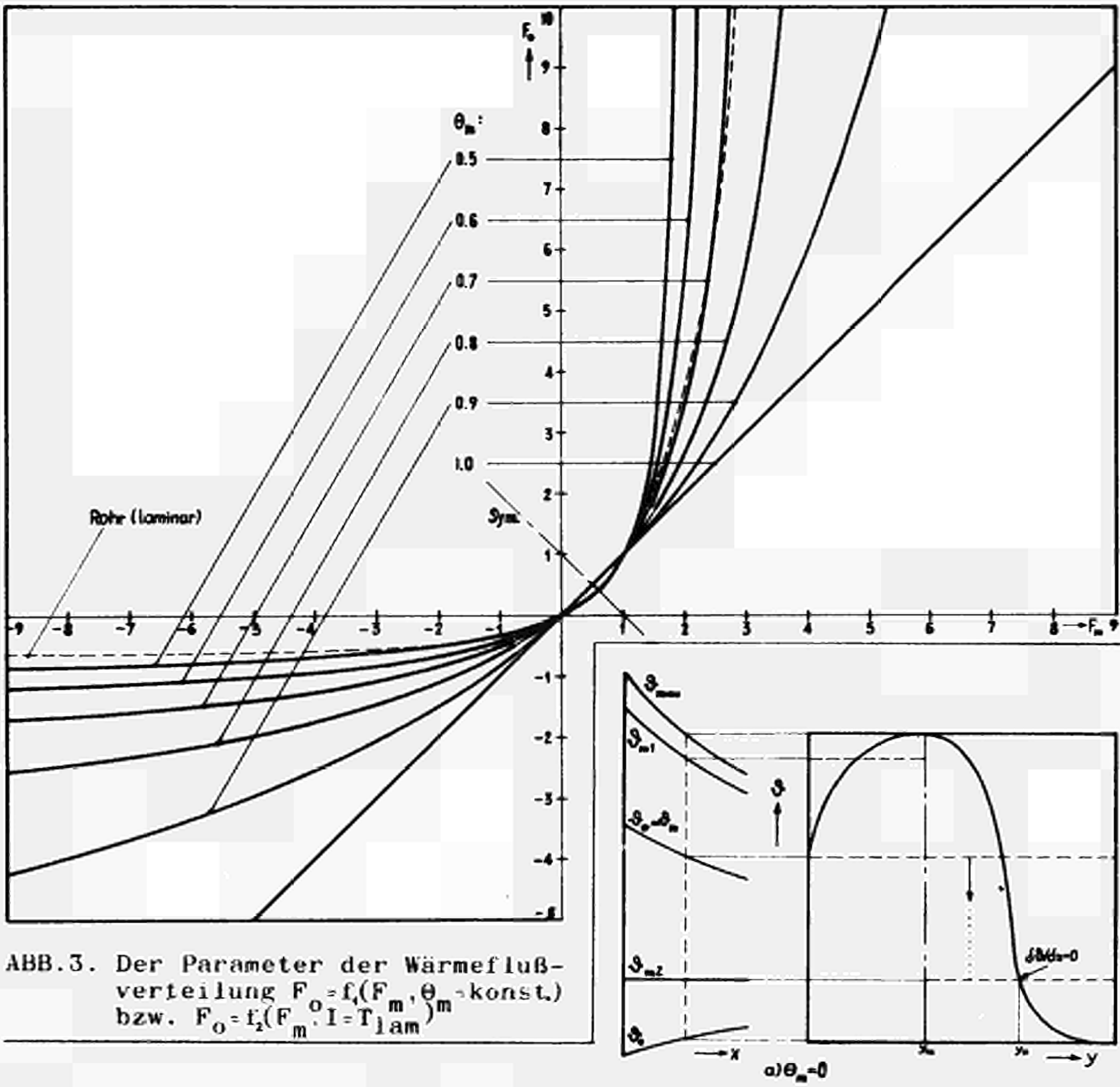


ABB.3. Der Parameter der Wärmefluß-verteilung $F_o = f_1(F_m, \Theta_m = \text{konst.})$ bzw. $F_o = f_2(F_m, I = T_{lam})$

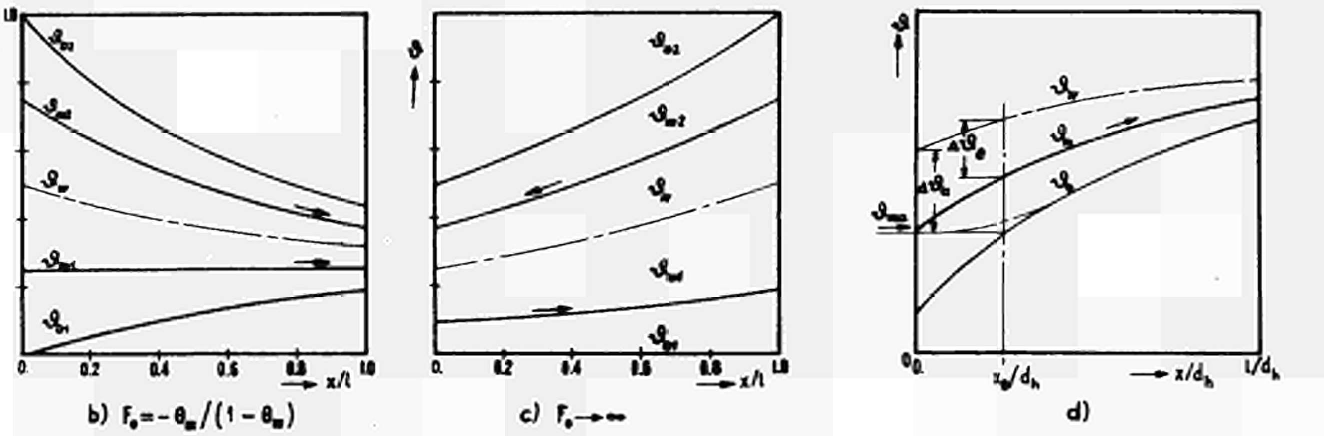


ABB.4. - a,b,c) Darstellung der Grenzfälle $\vartheta_w = \vartheta_m$ $(\Theta_m = 0)$, $F_o = -\Theta_m/(1-\Theta_m)$ und $F_o \to \infty$ für den Strömungsquerschnitt 1 eines Wärmeaustauschers.
d) Schema zur Herleitung des Mindestwertes x_e der thermischen Einlauflänge

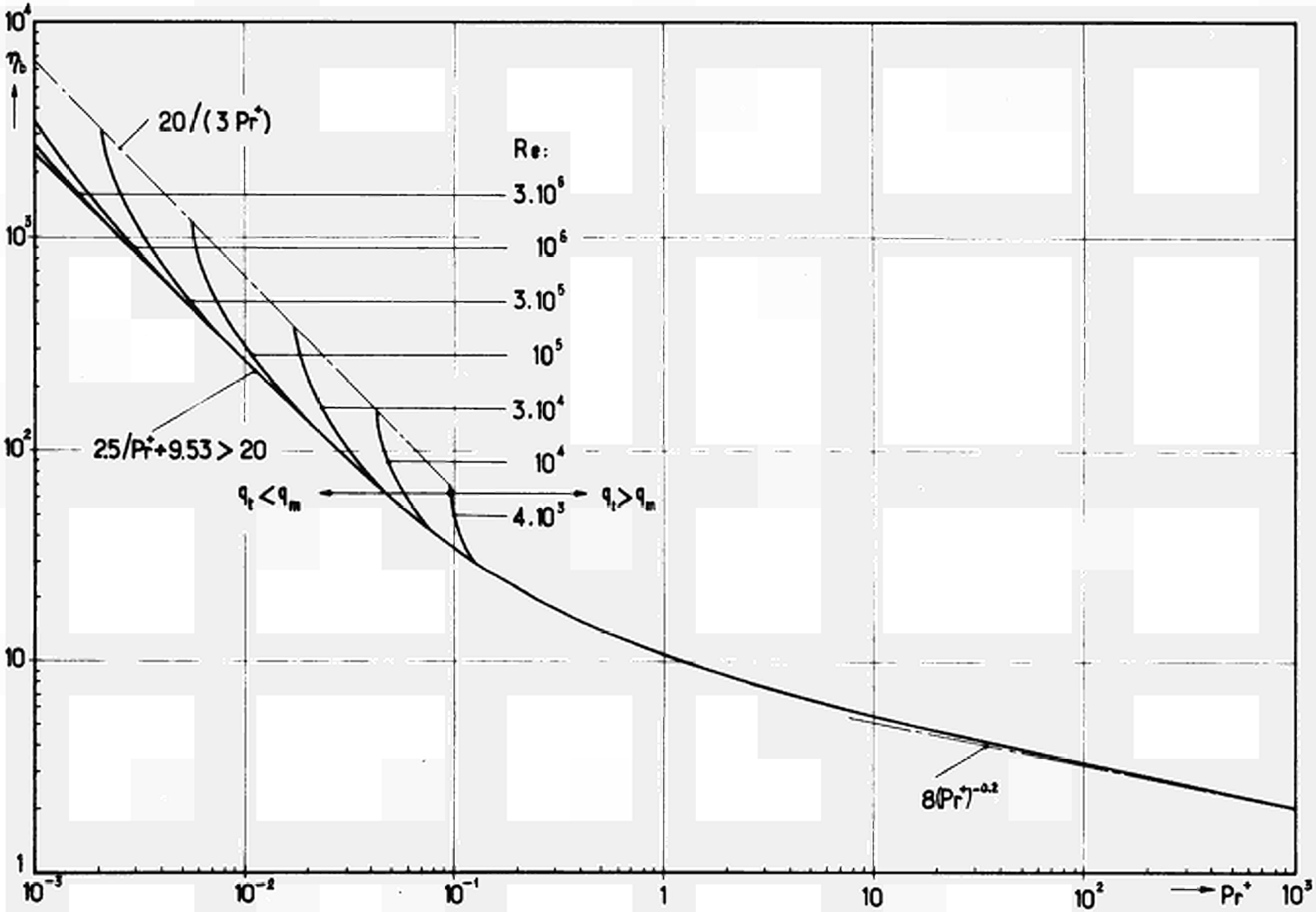


ABB.5. Dimensionsloser Wandabstand $\eta_b = f(Pr^+, Re)$ für q_w=konst.

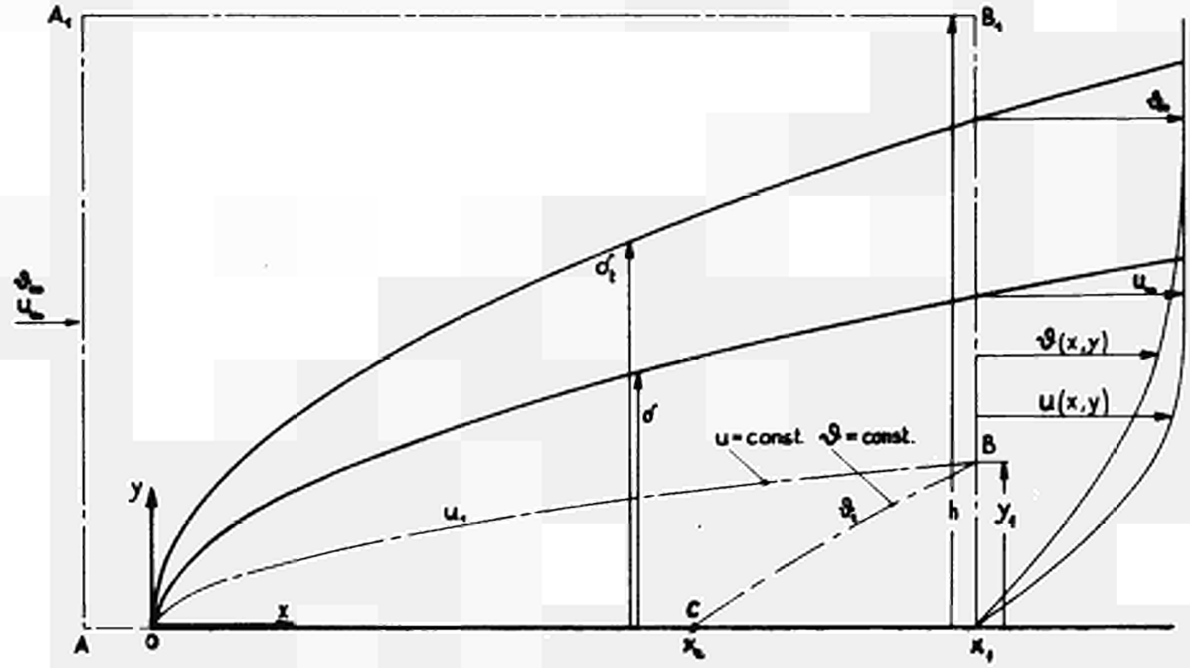


ABB.6. Schema zur Herleitung des wandnormalen Schubspannungs- und Wärmestromdichteverlaufs $\tau/\tau_w = f_1(y/\delta)$ bzw. $q/q_w = f_2(y/\delta_t)$ bei der längsangeströmten ebenen Platte

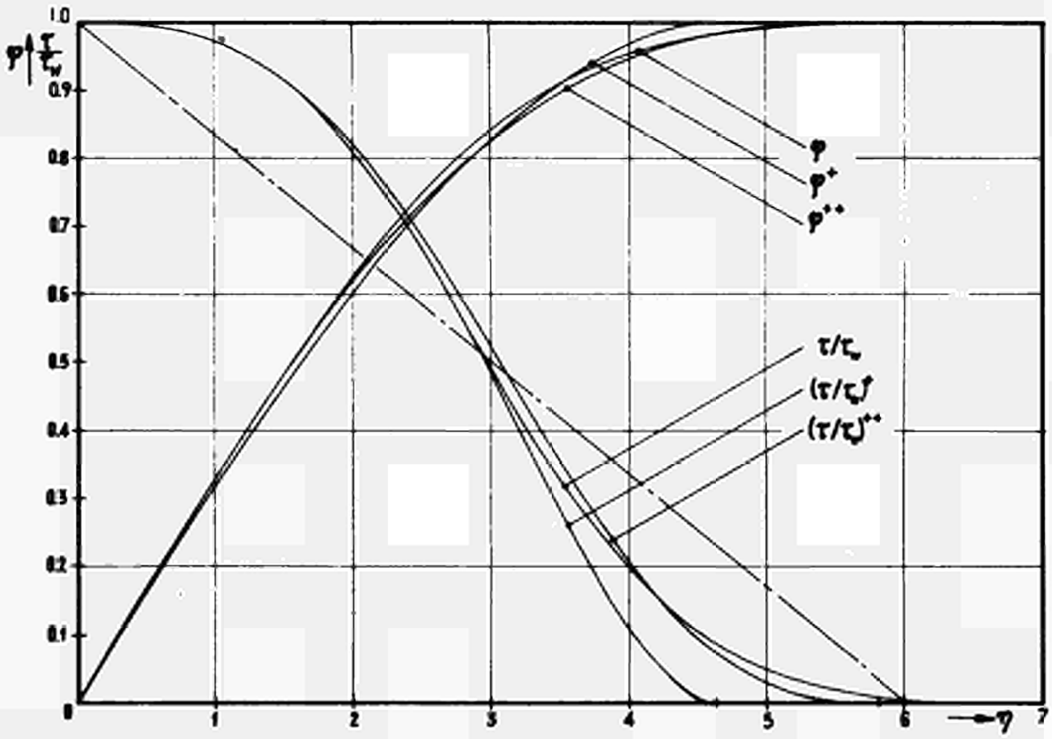


ABB.7. Geschwindigkeits- und Schubspannungsverlauf $\varphi = f_1(\eta)$ bzw. $\tau/\tau_w = f_2(\eta)$ der laminaren Plattenströmung, einschließlich ihrer Näherungslösungen $\varphi^+ = f_3(y/\delta)$, $\varphi^{++} = f_4(y/\delta)$ bzw. $(\tau/\tau_w)^+ = f_5(y/\delta)$ und $(\tau/\tau_w)^{++} = f_6(y/\delta)$

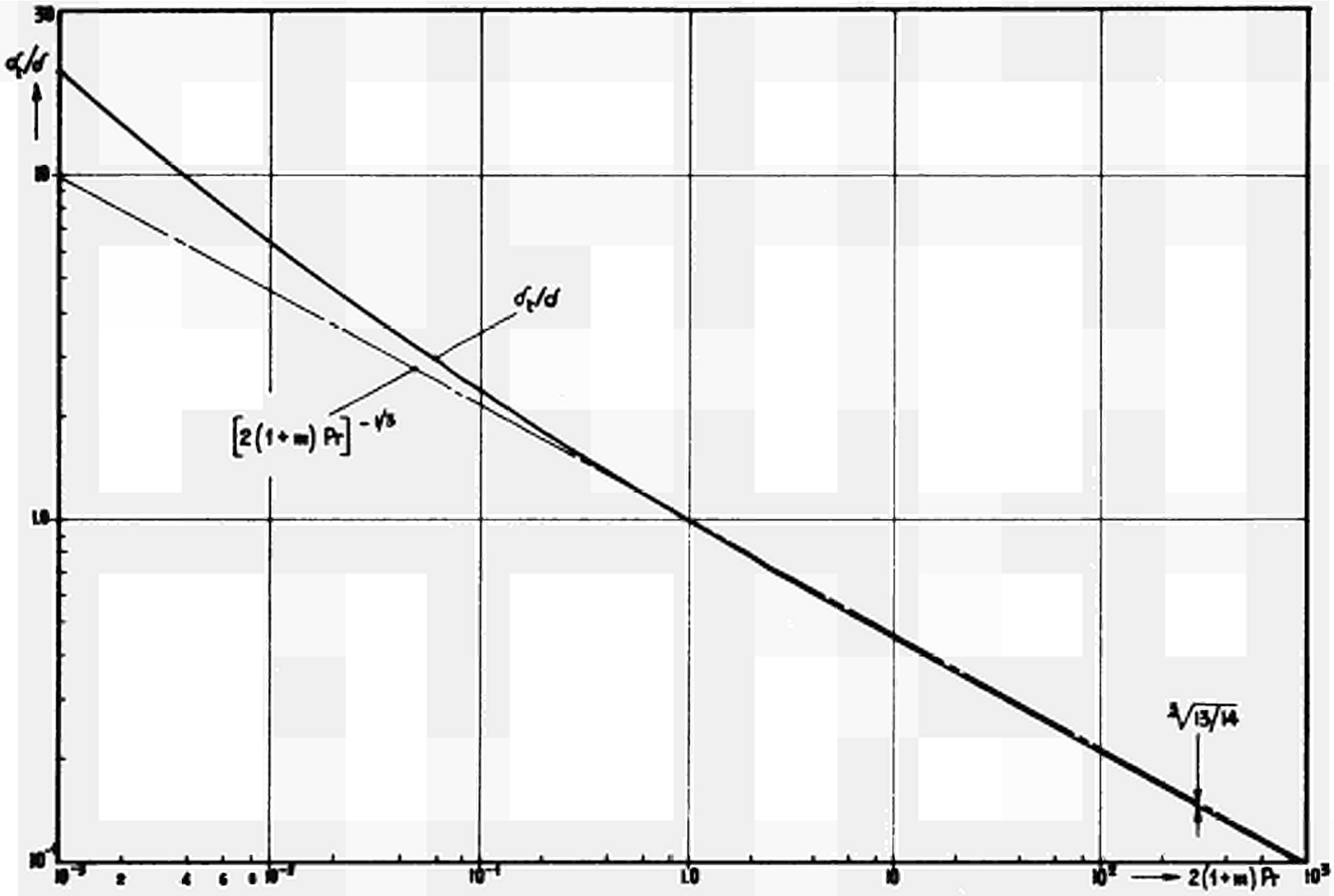


ABB.8. Verhältnis der thermischen zur hydrodynamischen Grenzschichtdicke $\delta_t/\delta = f(2(1+m)Pr)$ für die laminare Plattenströmung

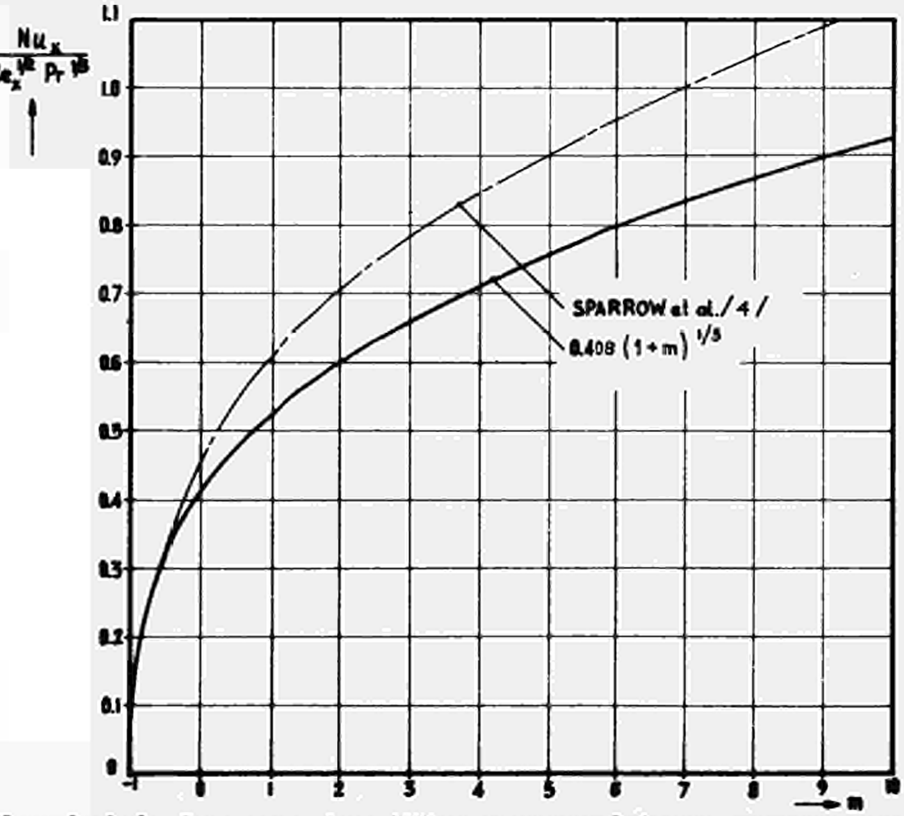


ABB. 9. Vergleich der aus dem Näherungsverfahren gewonnenen Beziehung $Nu_x/(Re_x^{1/2}Pr^{1/3}) = f(m)$ mit den exakten Ergebnissen von Sparrow et al./4/ für die laminare Plattenströmung

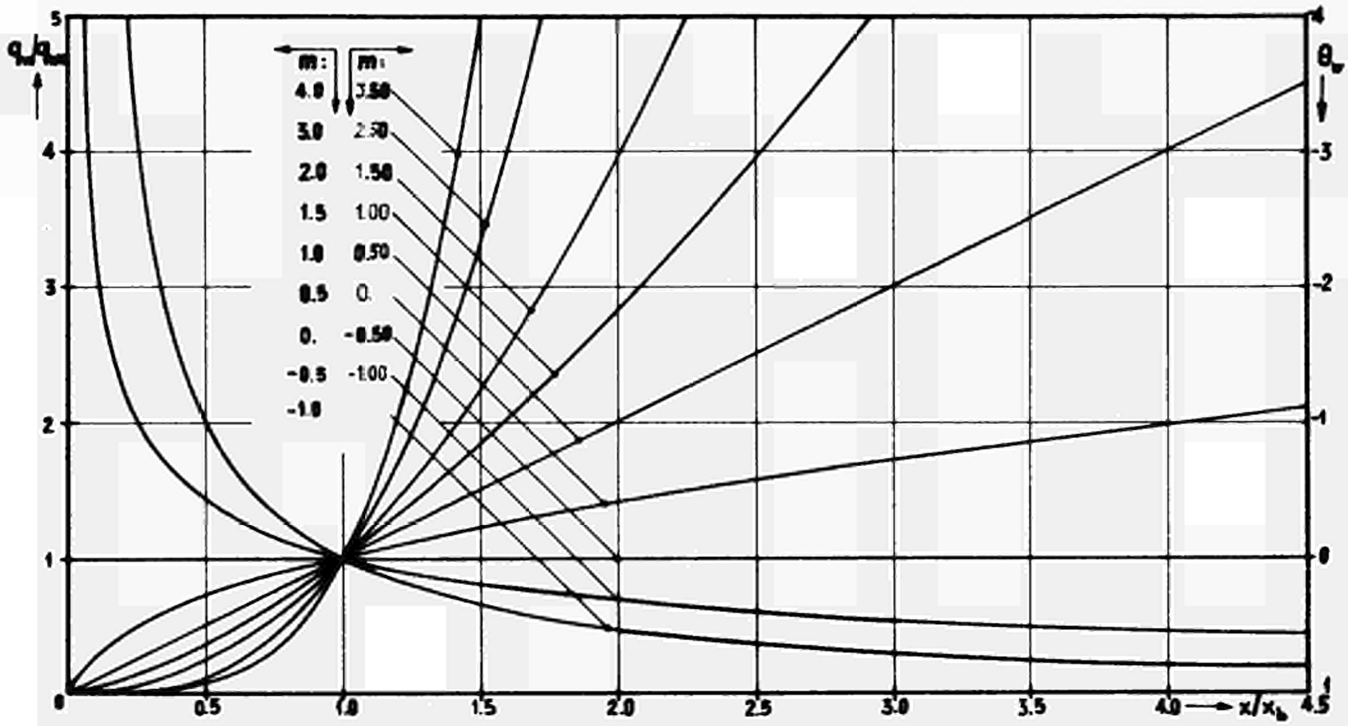


ABB.10. Beispiele für Längsverteilungen der Wärmestromdichte $q_w/q_{wa}=f(m)$ und der Wandtemperatur $\Theta_w=f(m)$ bei der laminaren Plattenströmung

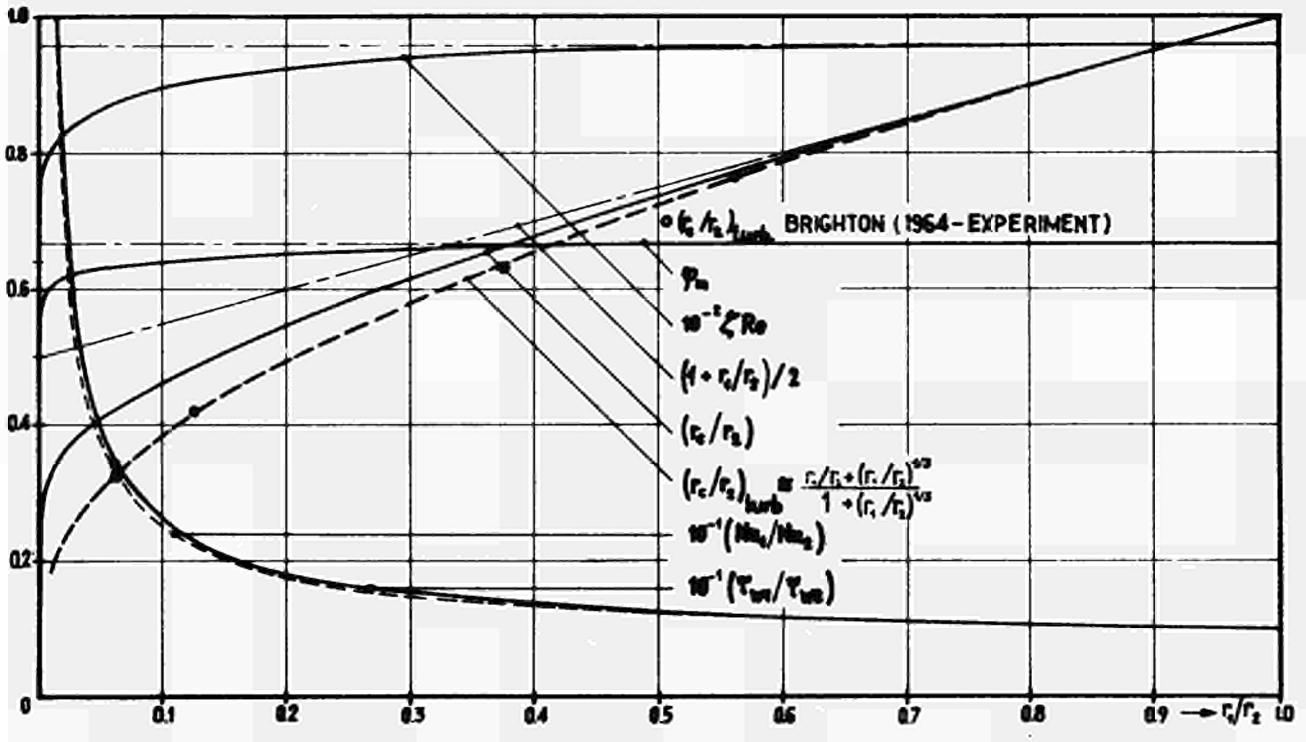


ABB.11. Konstante $c=\zeta Re$, Halbmesserfunktionen $(1+r_1/r_2)/2$ und r_c/r_2, mittlere Geschwindigkeit φ_m, Verhältnis der Nußelt-Zahlen Nu_1/Nu_2 (q_w=konst.) und der Wandschubspannungen τ_{w1}/τ_{w2} für die laminare sowie r_c/r_2 für die turbulente Strömung im Ringspalt

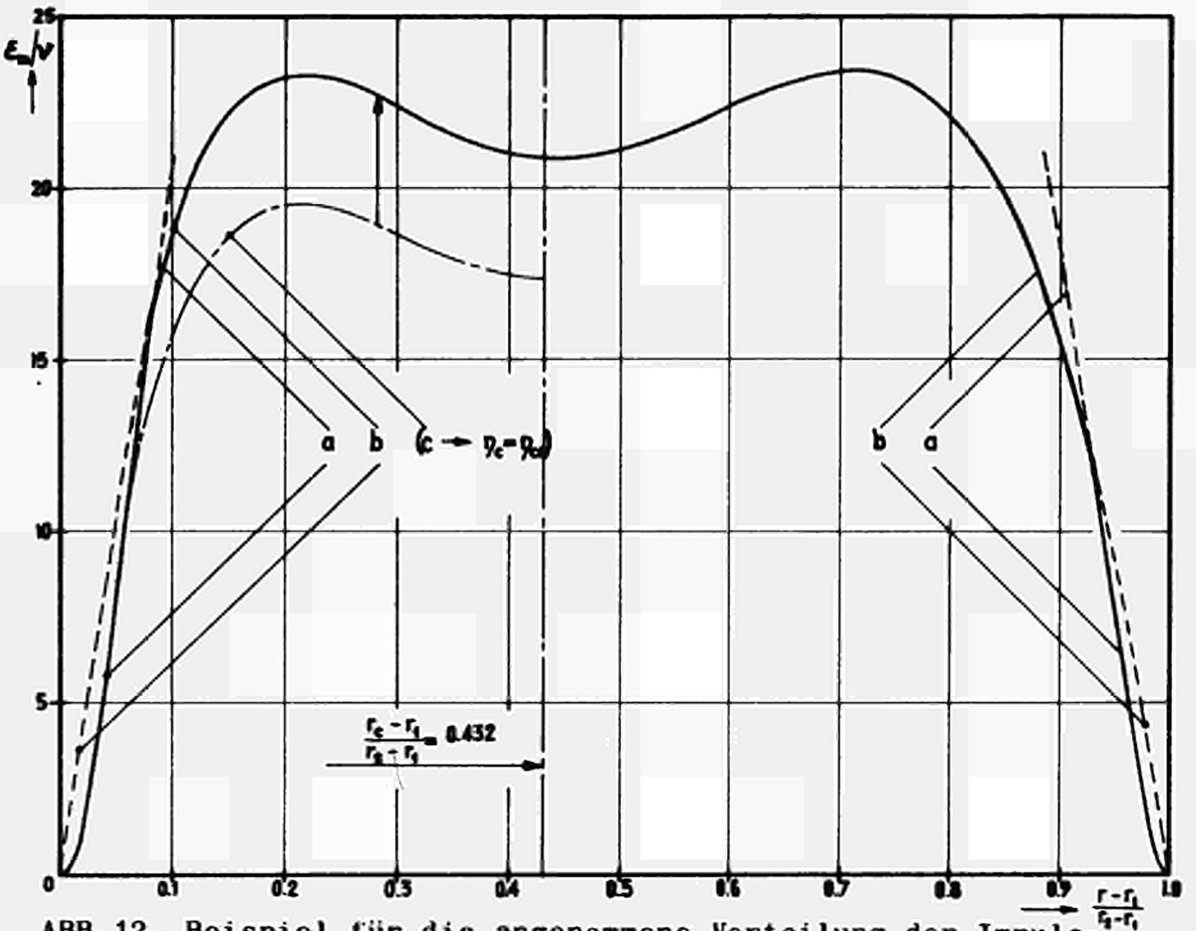


ABB.12. Beispiel für die angenommene Verteilung der Impuls-Austauschgröße ε_m/ν beim Ringspalt (r_1/r_2=0,4 - Re=1,96·10^4) -a: Glg.(1) -b: Glg.(173) -c: Glg.(2) für η_c=η_{c1}

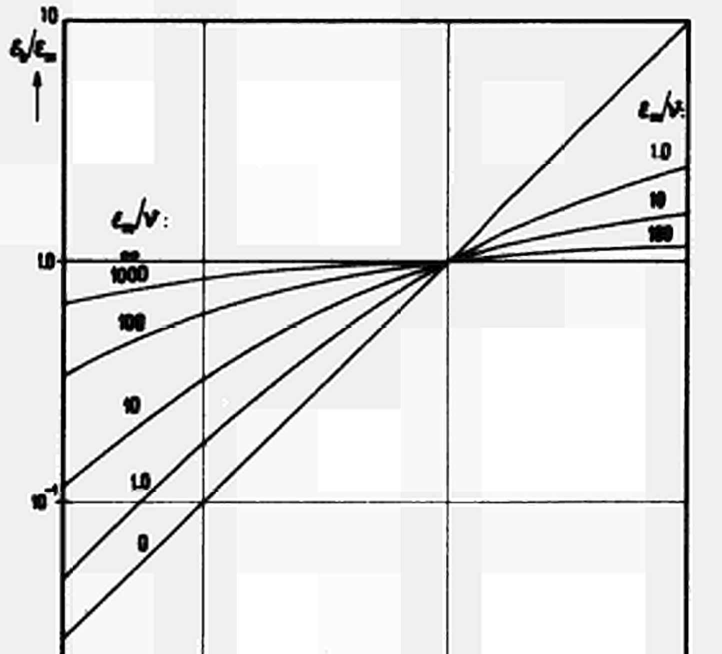


ABB.13. Verhältnis der Austauschgrößen für Wärme und Impuls $\varepsilon_h/\varepsilon_m$=f(Pr , ε_m/ν) nach Jenkins /11/

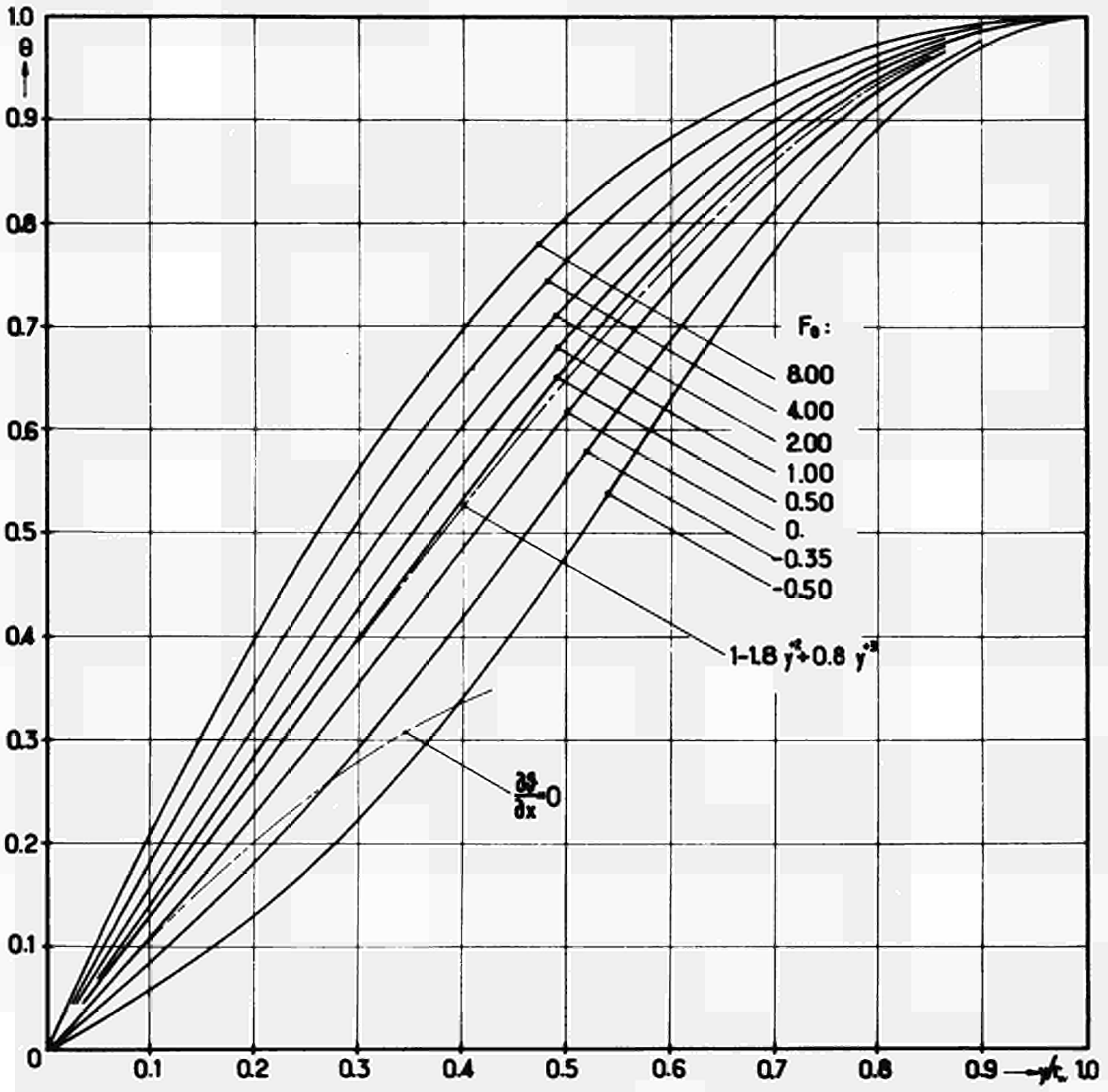


ABB. 14. Temperaturverlauf $\Theta = f(y/r_w, F_o)$ bei der laminaren Rohrströmung

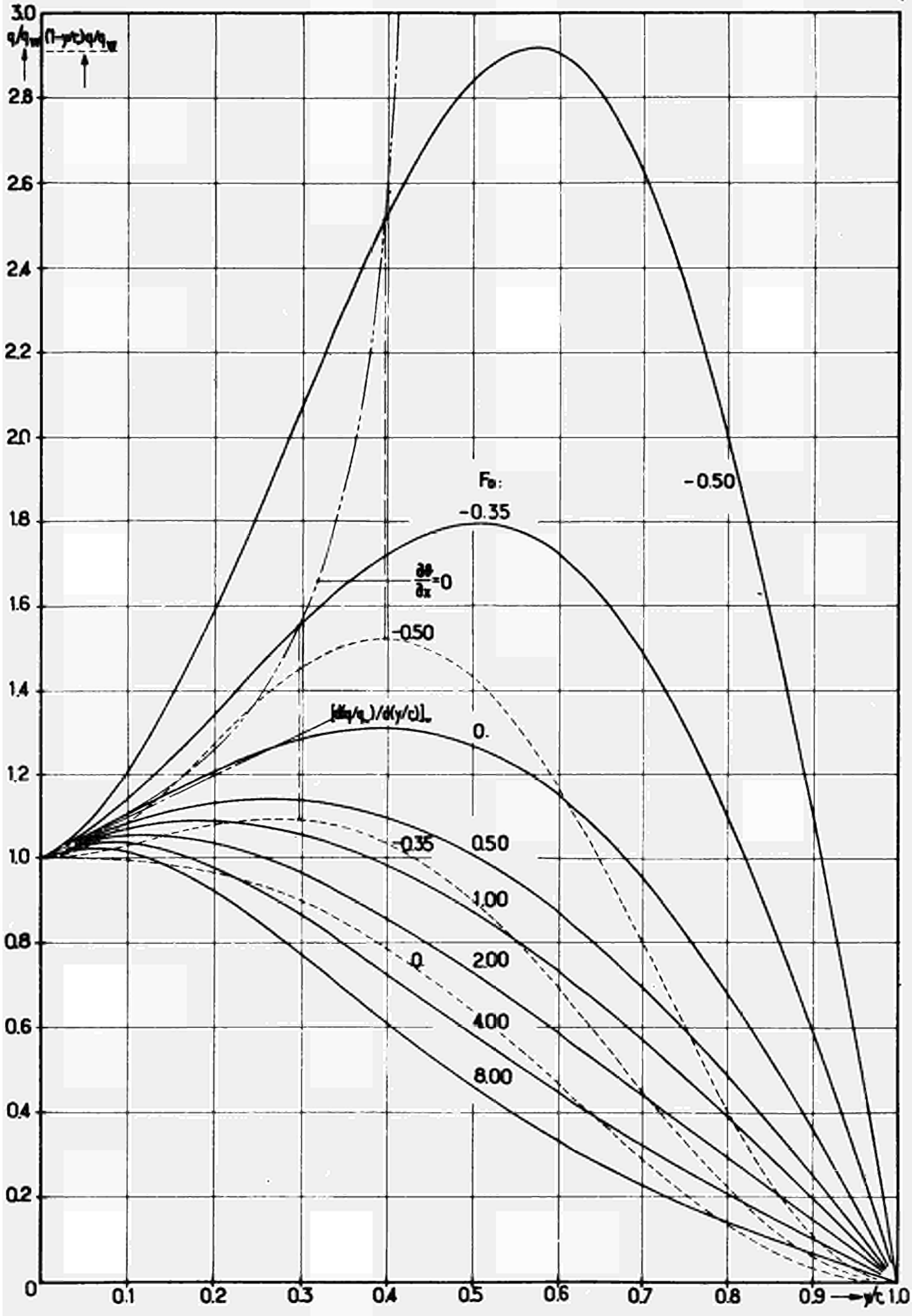


ABB. 15. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_W=f_1(y/r_w,F_o)$ bzw. $(1-y/r_w)q/q_W=f_2(y/r_w,F_o)$ bei der laminaren Rohrströmung

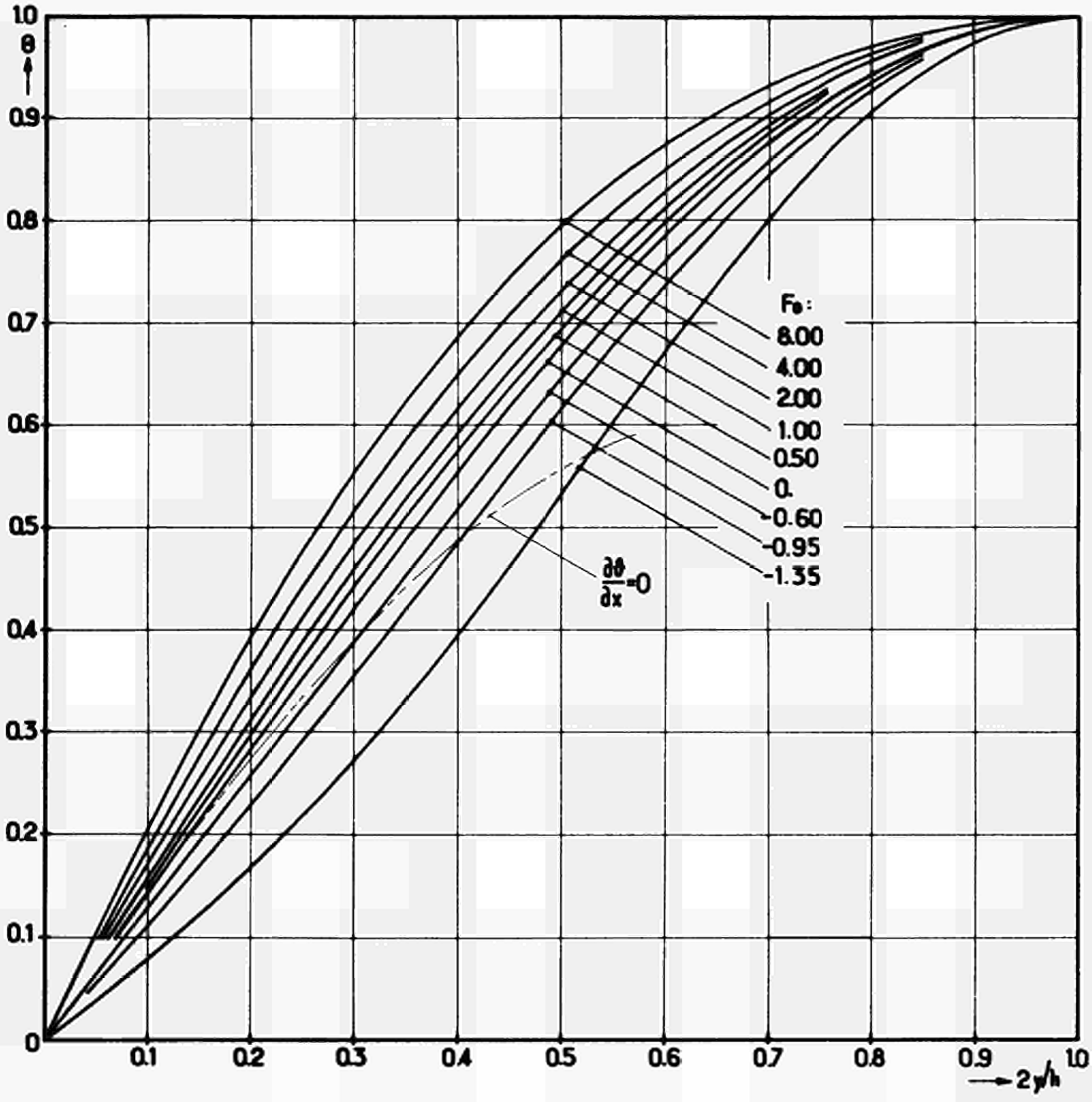


ABB. 16. Temperaturverlauf $\Theta=f(2y/h,F_o)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch

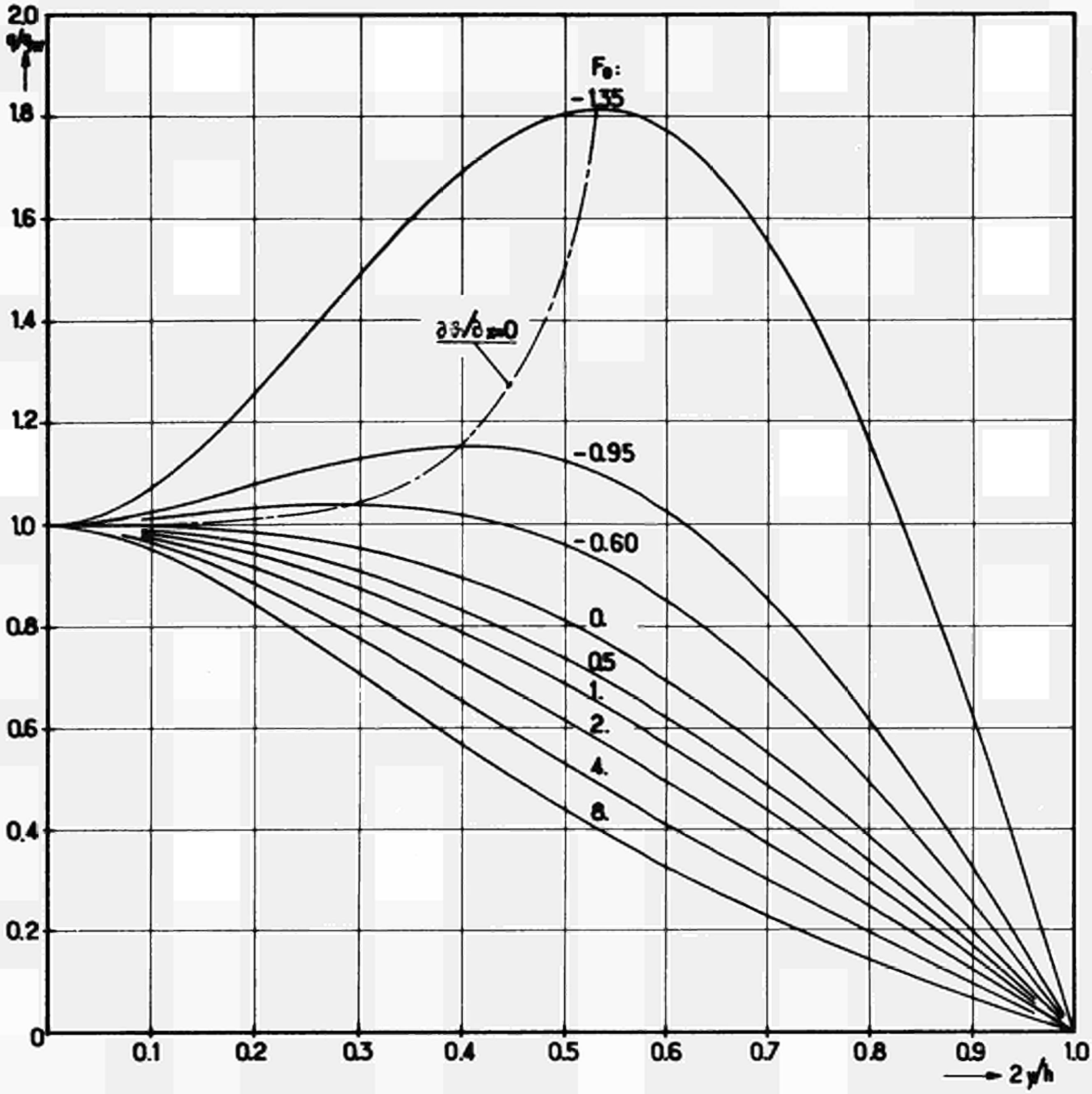


ABB. 17. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w=f(2y/h,F_o)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch

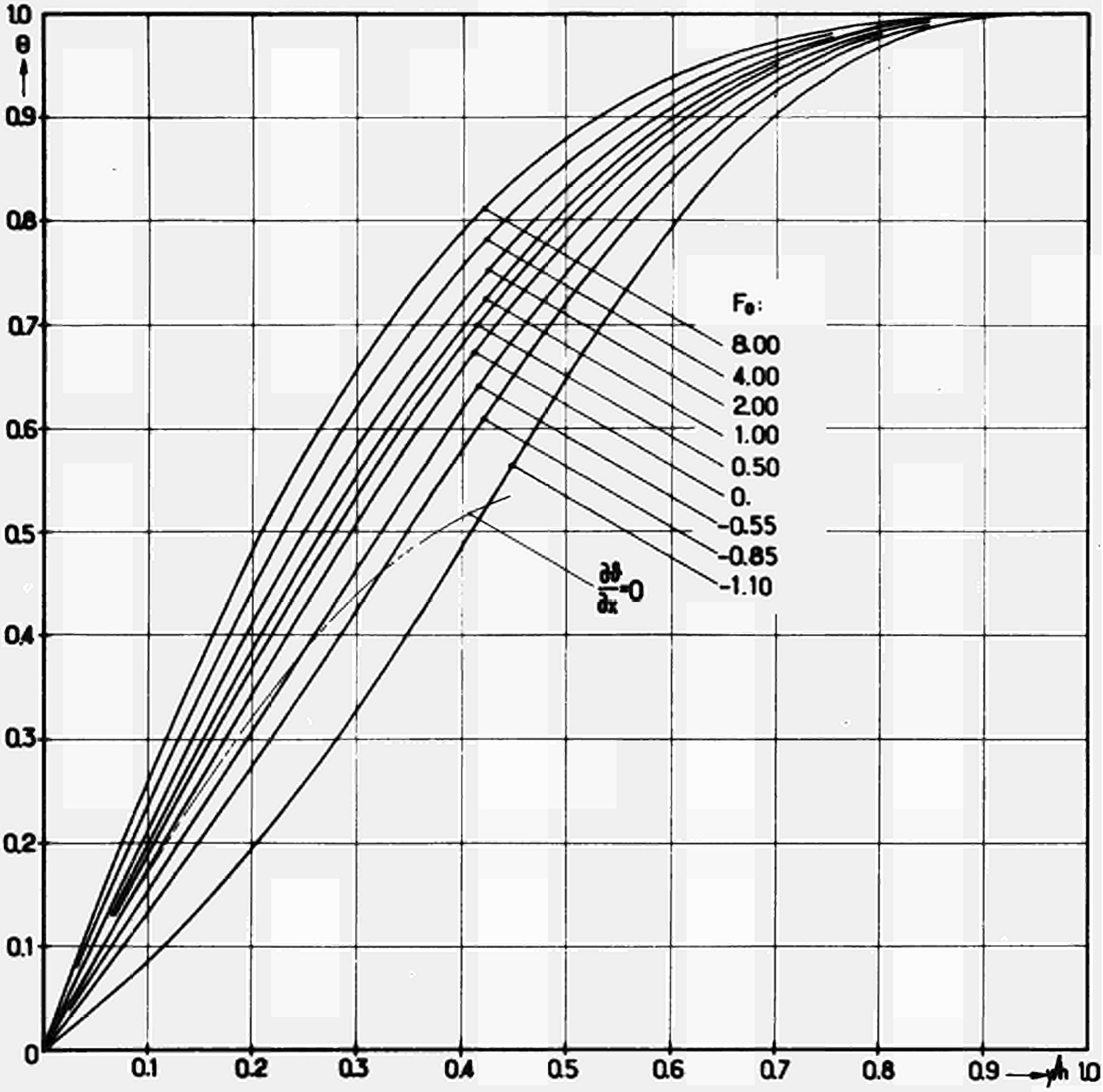


ABB. 18. Temperaturverlauf $\theta = f(y/h, F_0)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch

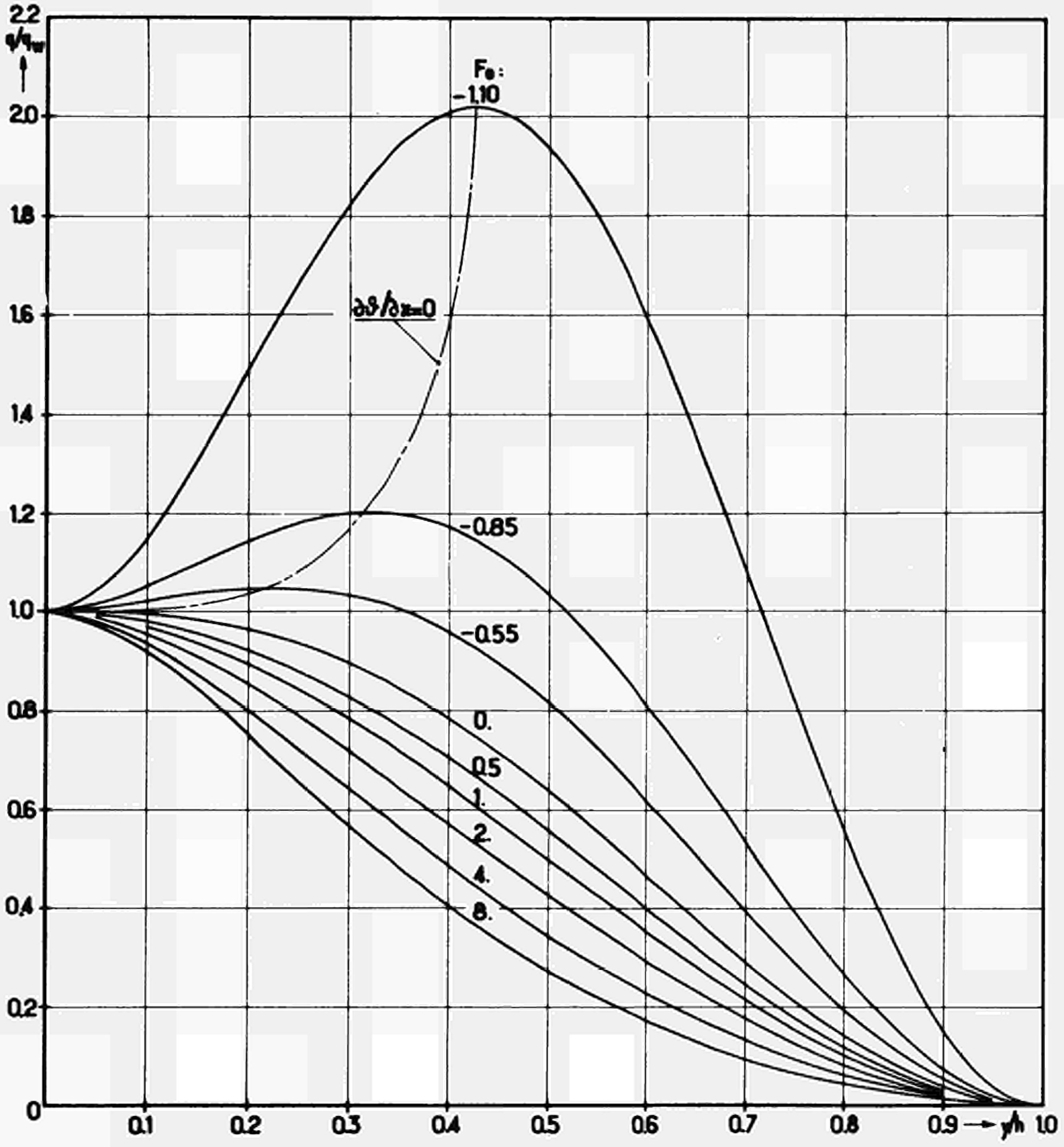


ABB. 19. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w=f(y/h,F_o)$ bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch

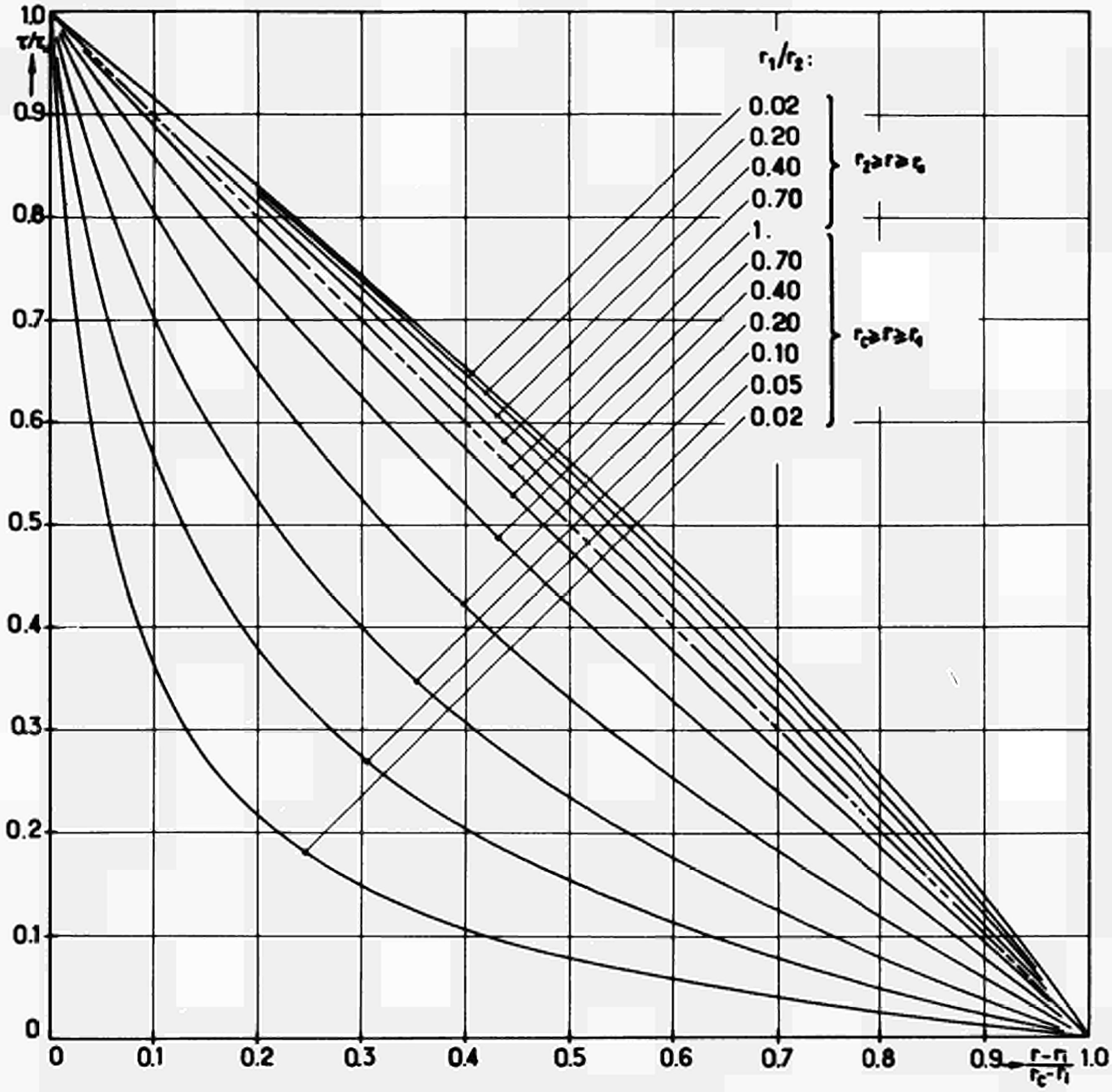


ABB.20. Schubspannungsverlauf $\tau/\tau_w = f((r-r_i)/(r_c-r_i), r_1/r_2)$ bei laminarer und turbulenter Strömung im Ringspalt

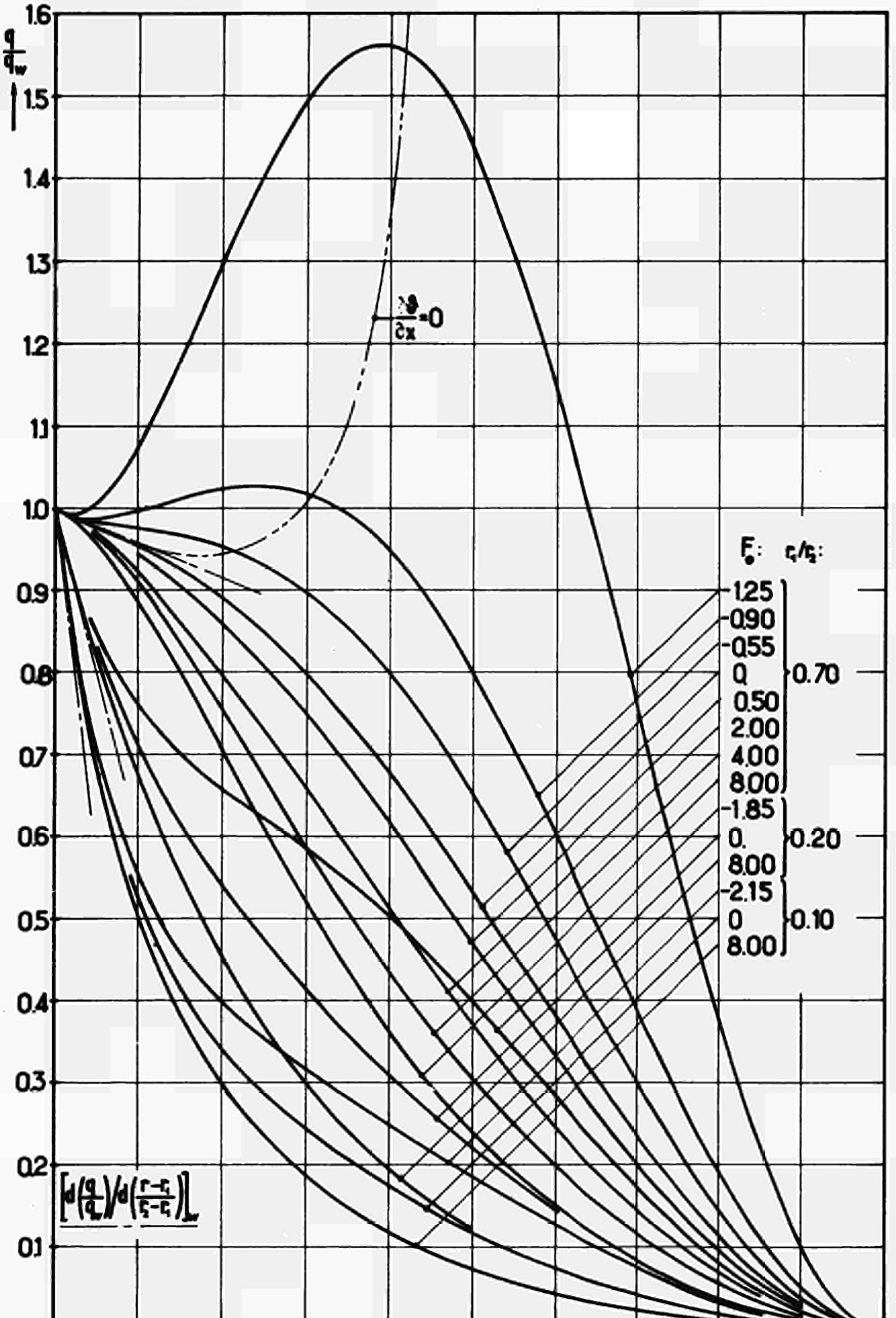


ABB.21. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w=f((r-r_1)/(r_2-r_1), F_o, r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder

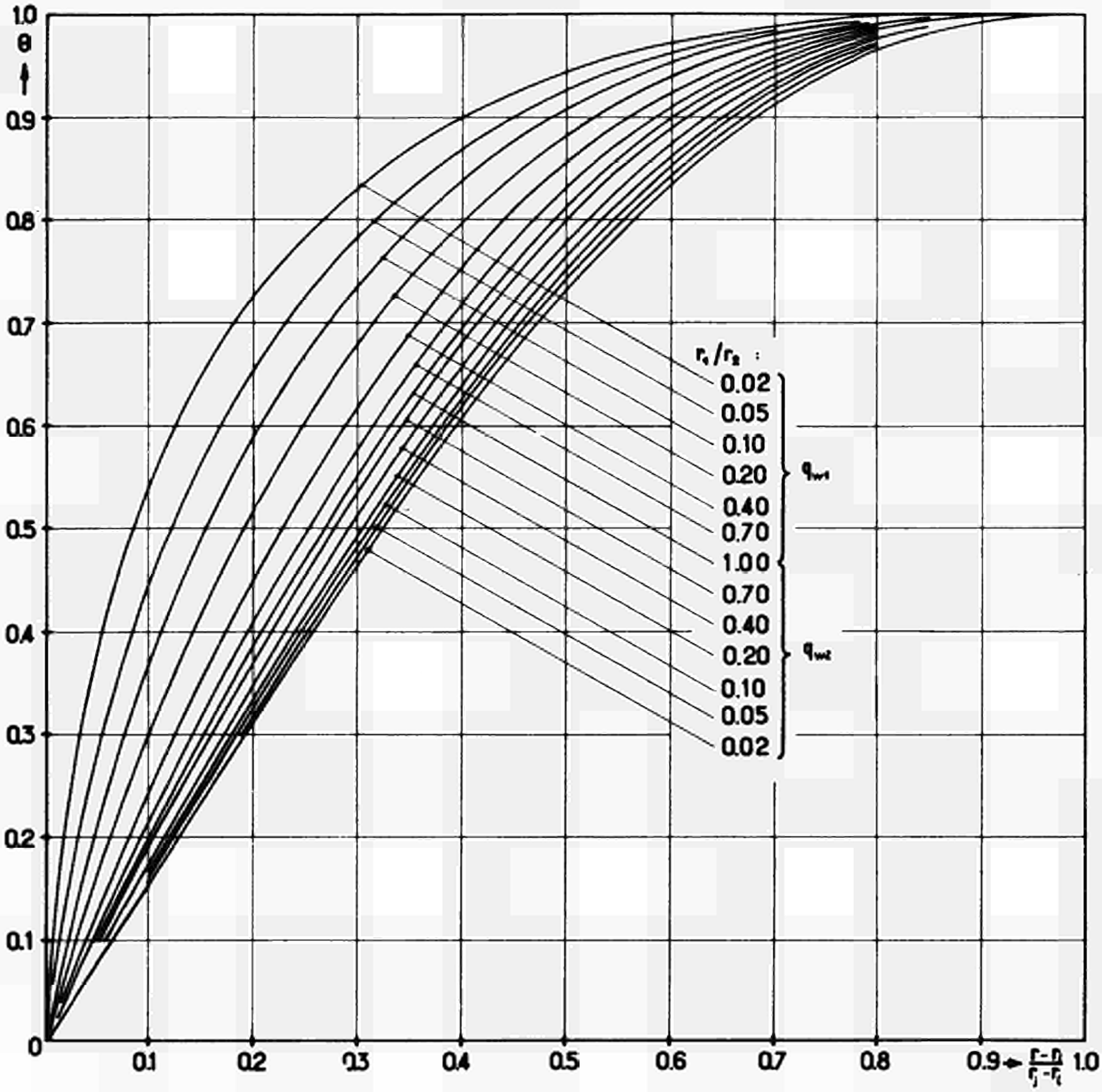


ABB.22. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_i)/(r_j-r_i),r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für q_w=konst.

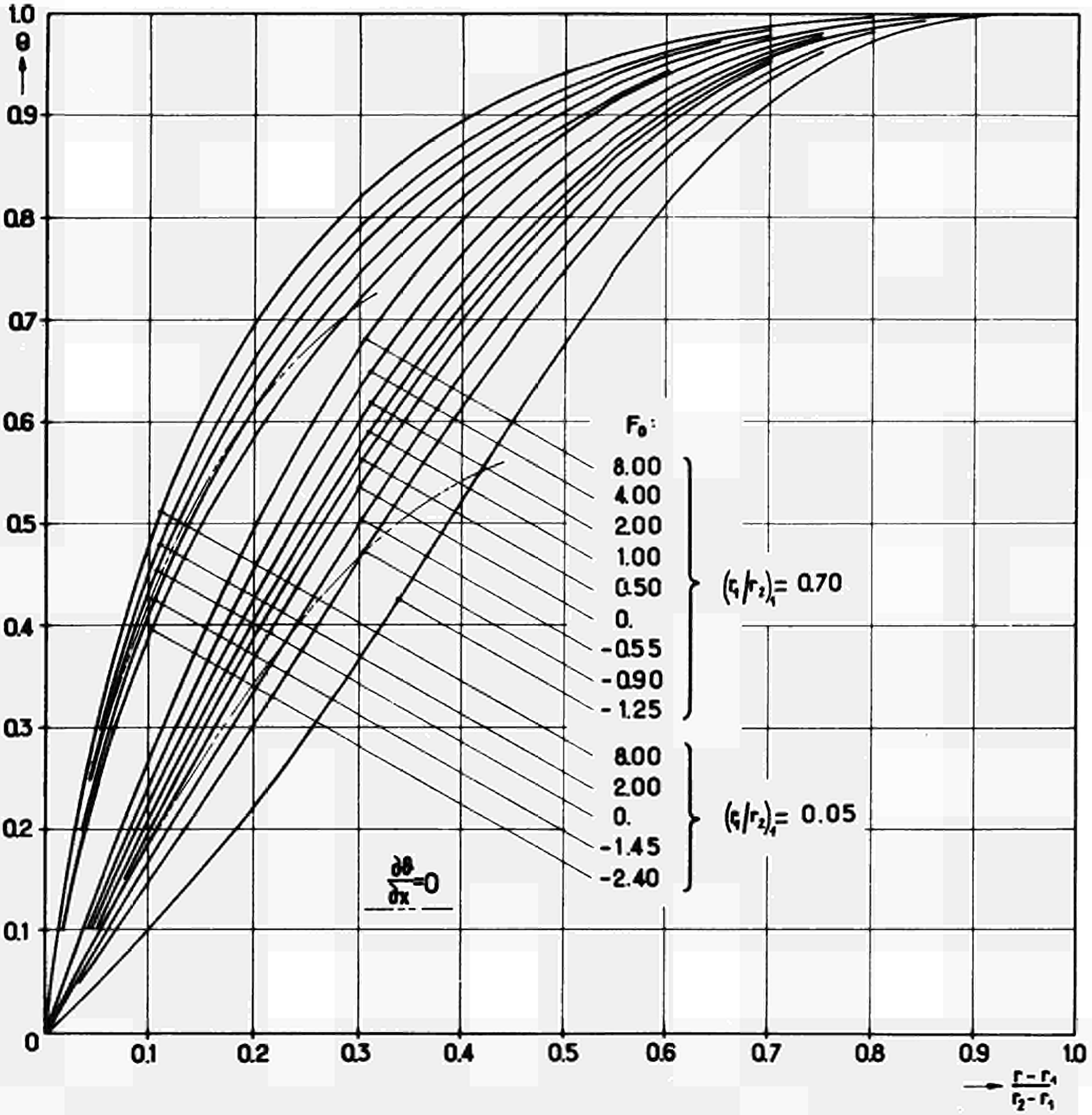


ABB.23. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_1)/(r_2-r_1),F_0)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder, für $r_1/r_2=0{,}70$ und $r_1/r_2=0{,}05$

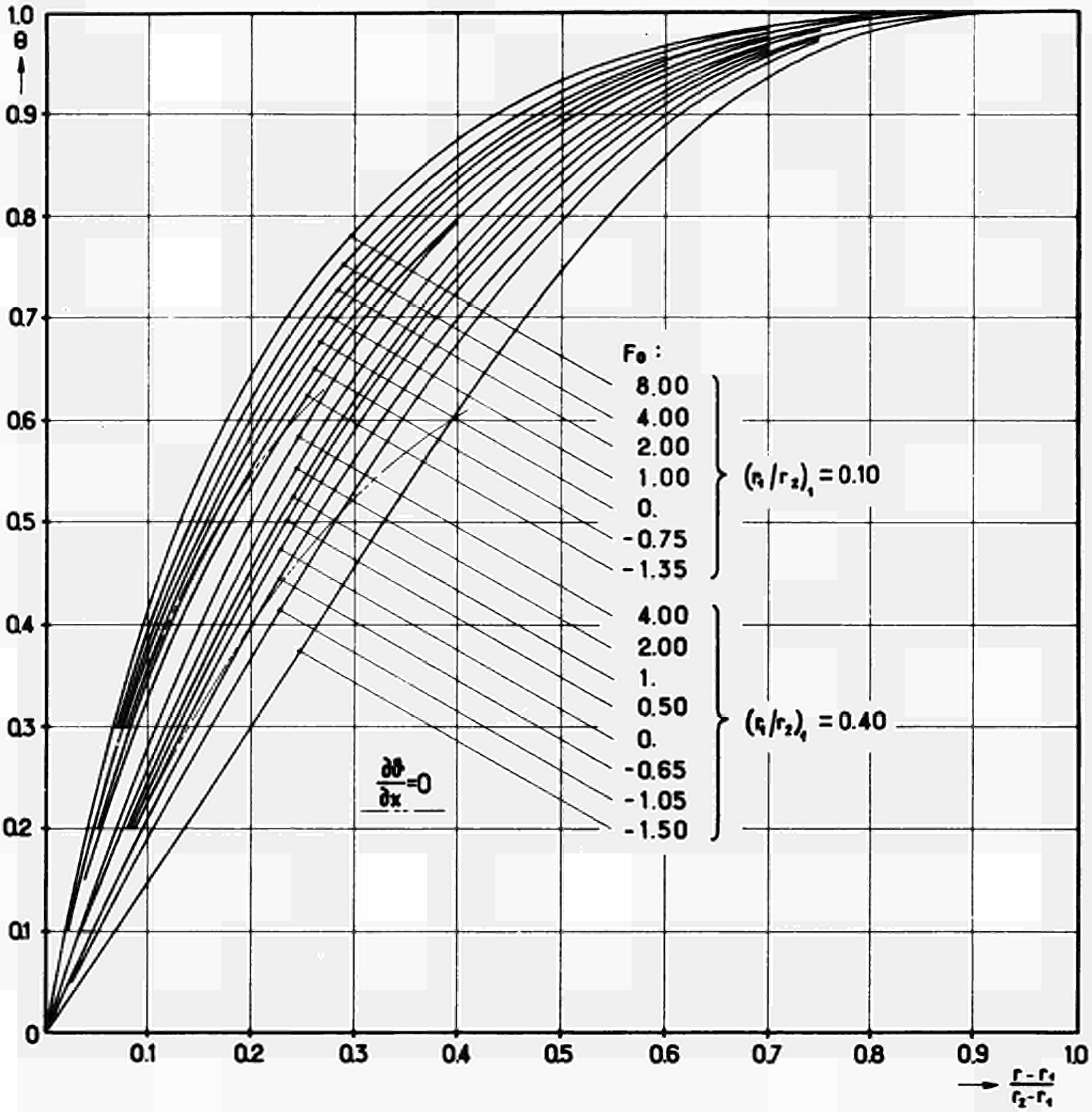


ABB.24. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_1)/(r_2-r_1),F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder, für $r_1/r_2=0{,}40$ und $r_1/r_2=0{,}10$

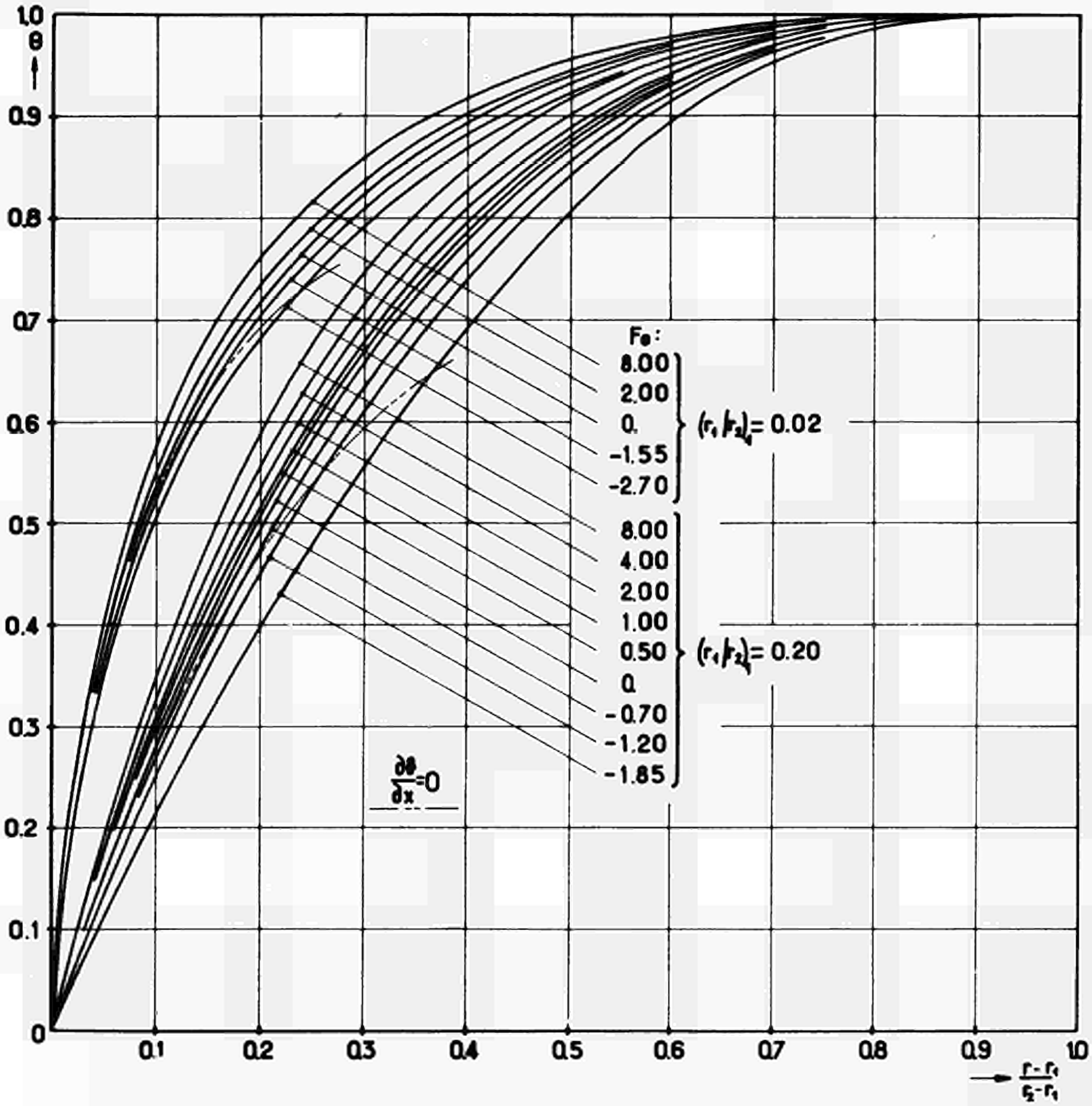


ABB.25. Temperaturverlauf $\Theta = f((r-r_1)/(r_2-r_1), F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am inneren Zylinder, für $r_1/r_2 = 0{,}20$ und $r_1/r_2 = 0{,}02$

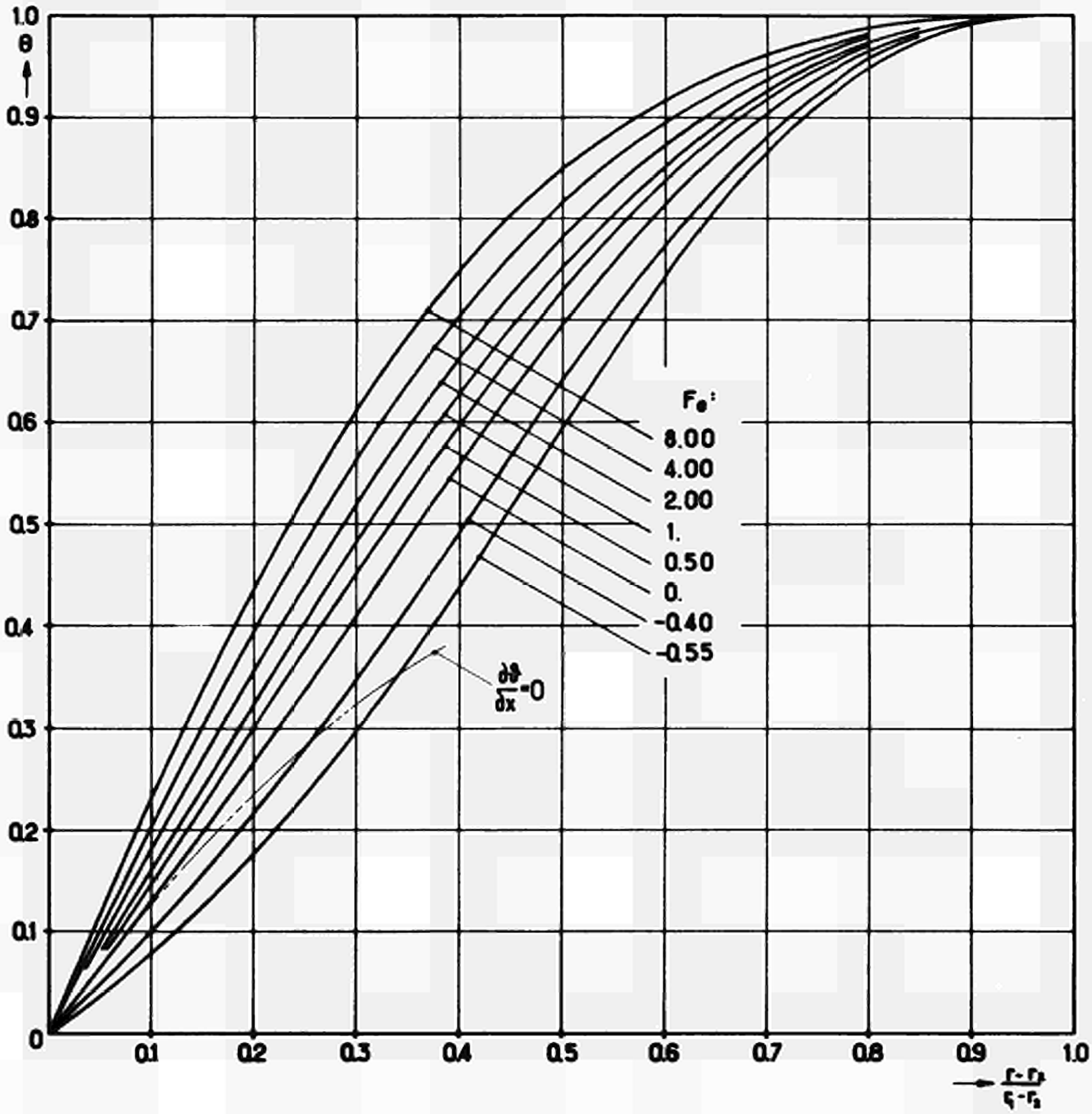


ABB.26. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_2)/(r_1-r_2),F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, Wärmeaustausch am äußeren Zylinder, für $r_1/r_2=0,10$

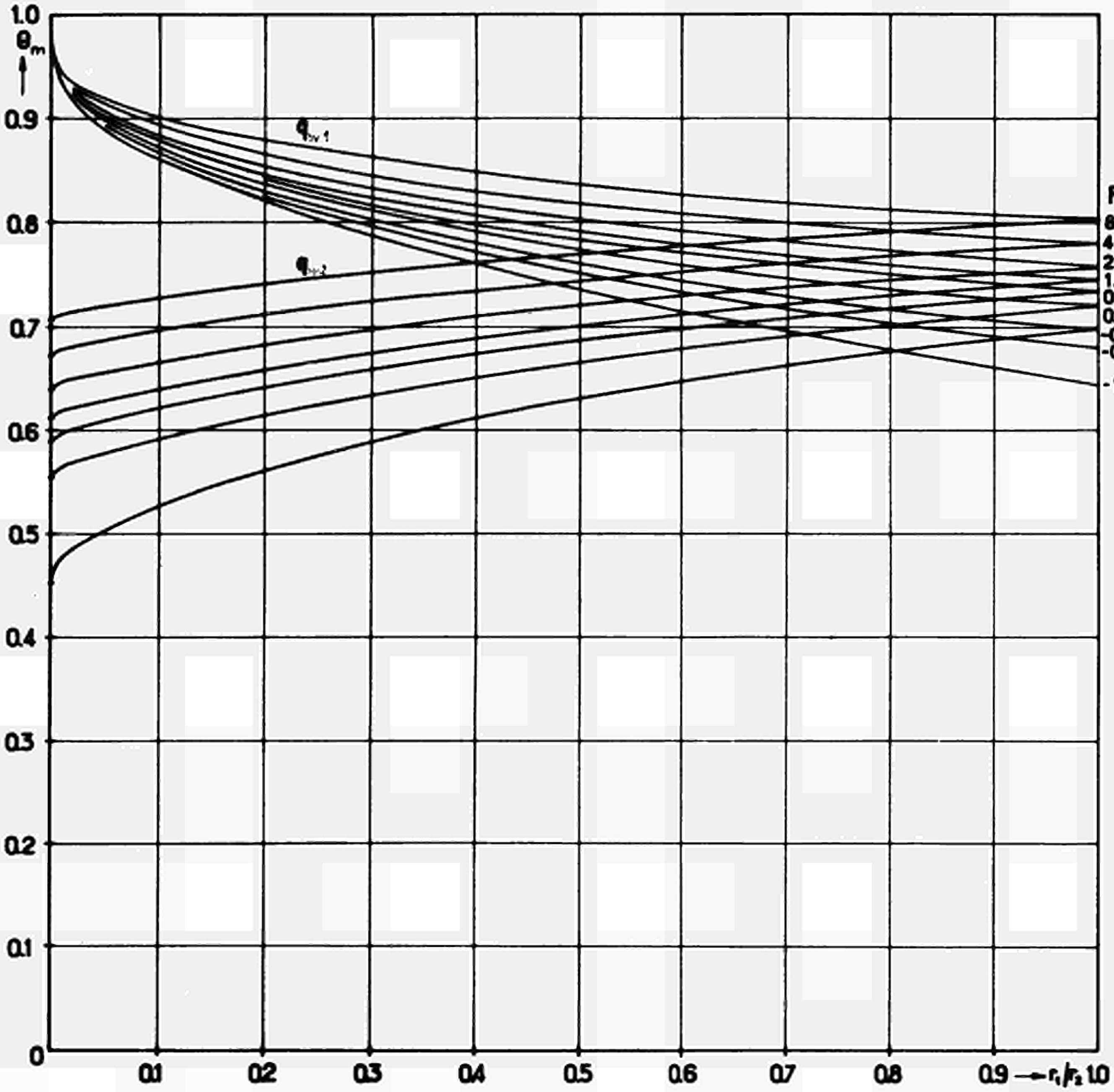


ABB.27. Mischungstemperatur $\Theta_m = f(r_1/r_2, F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für Wärmeaustausch am inneren (q_{w1}) bzw. äußeren Zylinder (q_{w2})

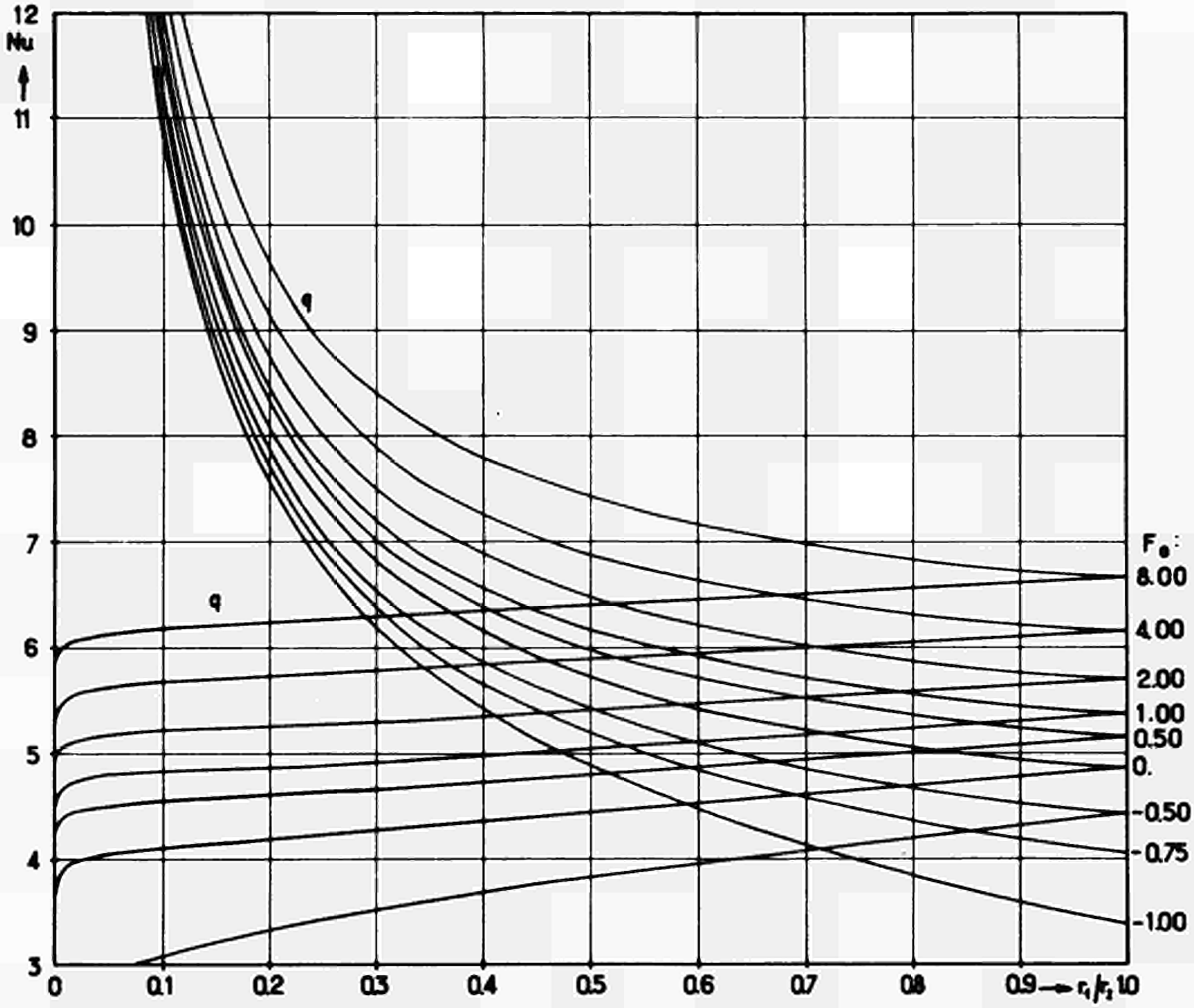


ABB.28. Nußelt-Zahl $Nu=f(r_1/r_2,F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für Wärmeaustausch am inneren (q_{w1}) bzw. äußeren Zylinder (q_{w2})

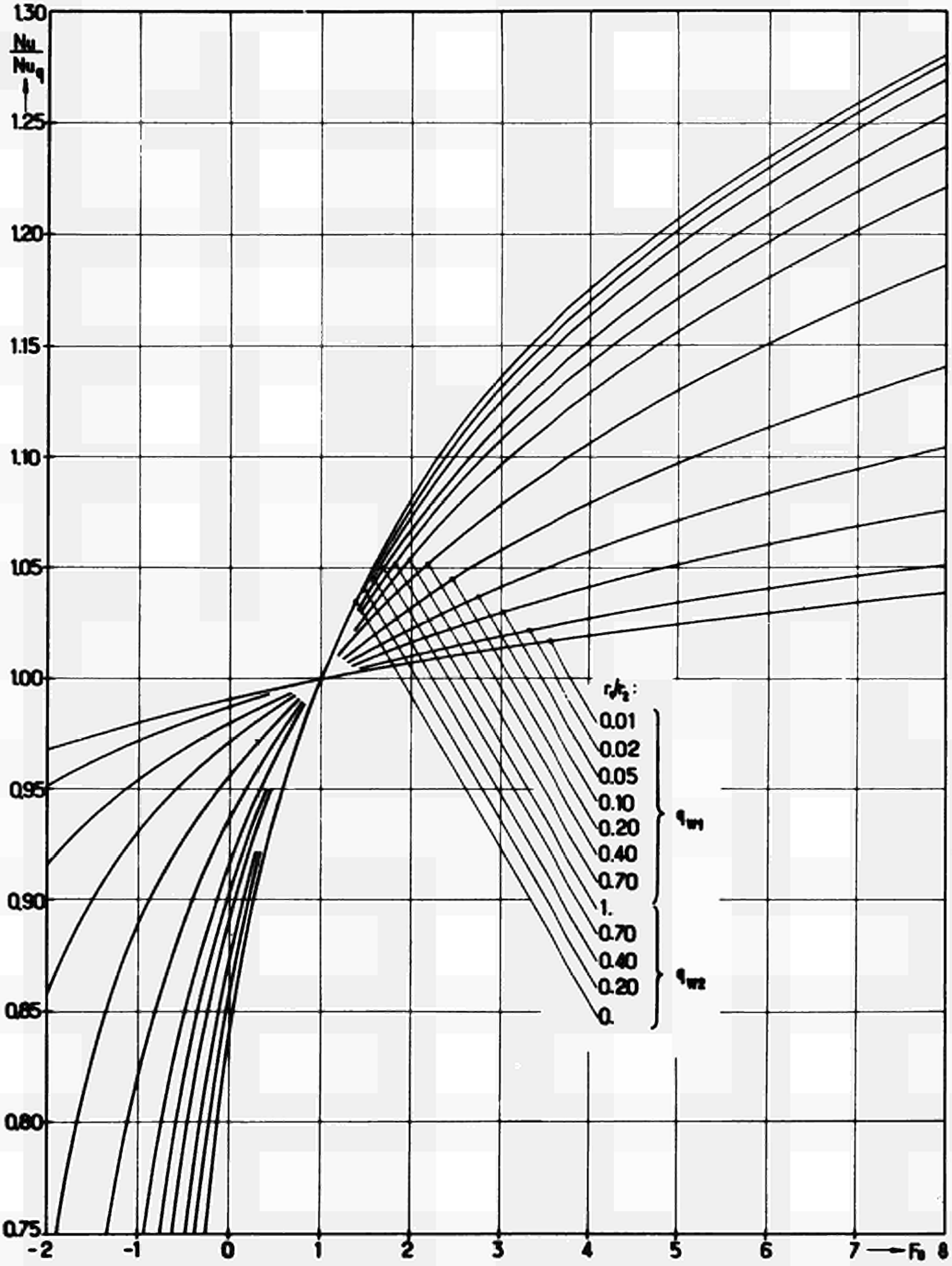


ABB.29. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_q=f(F_o, r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt, einschließlich der Grenzfälle $r_1/r_2=0$: Rohr und $r_1/r_2=1$: Parallele Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch

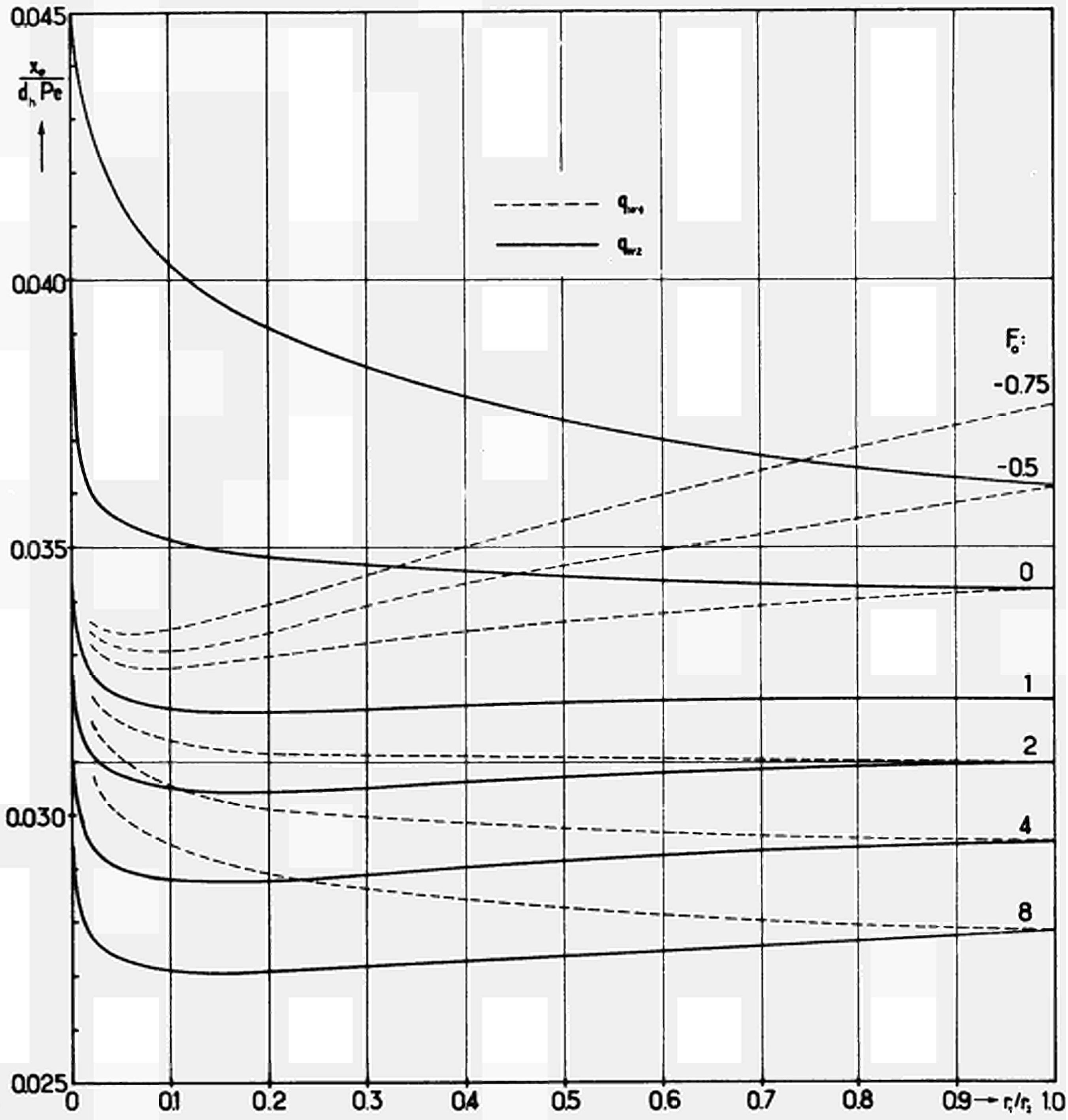


ABB.30. Thermische Einlauflänge $x_e/(d\ Pe)=f(r_1/r_2,F_o)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt

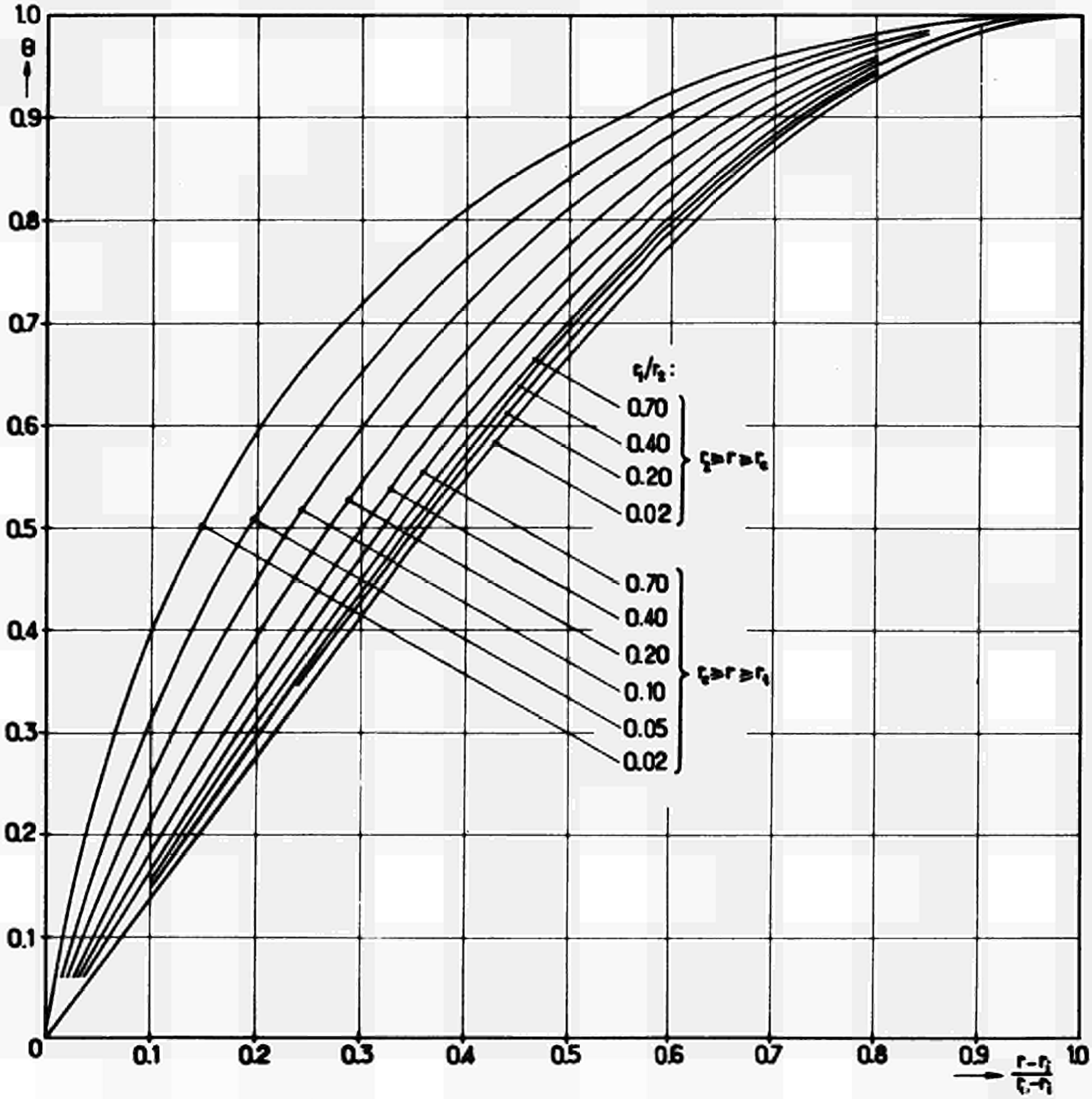


ABB.31. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_i)/(r_o-r_i), r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für quasisymmetrischen Wärmeaustausch mit q_{w1}=konst. und q_{w2}=konst.

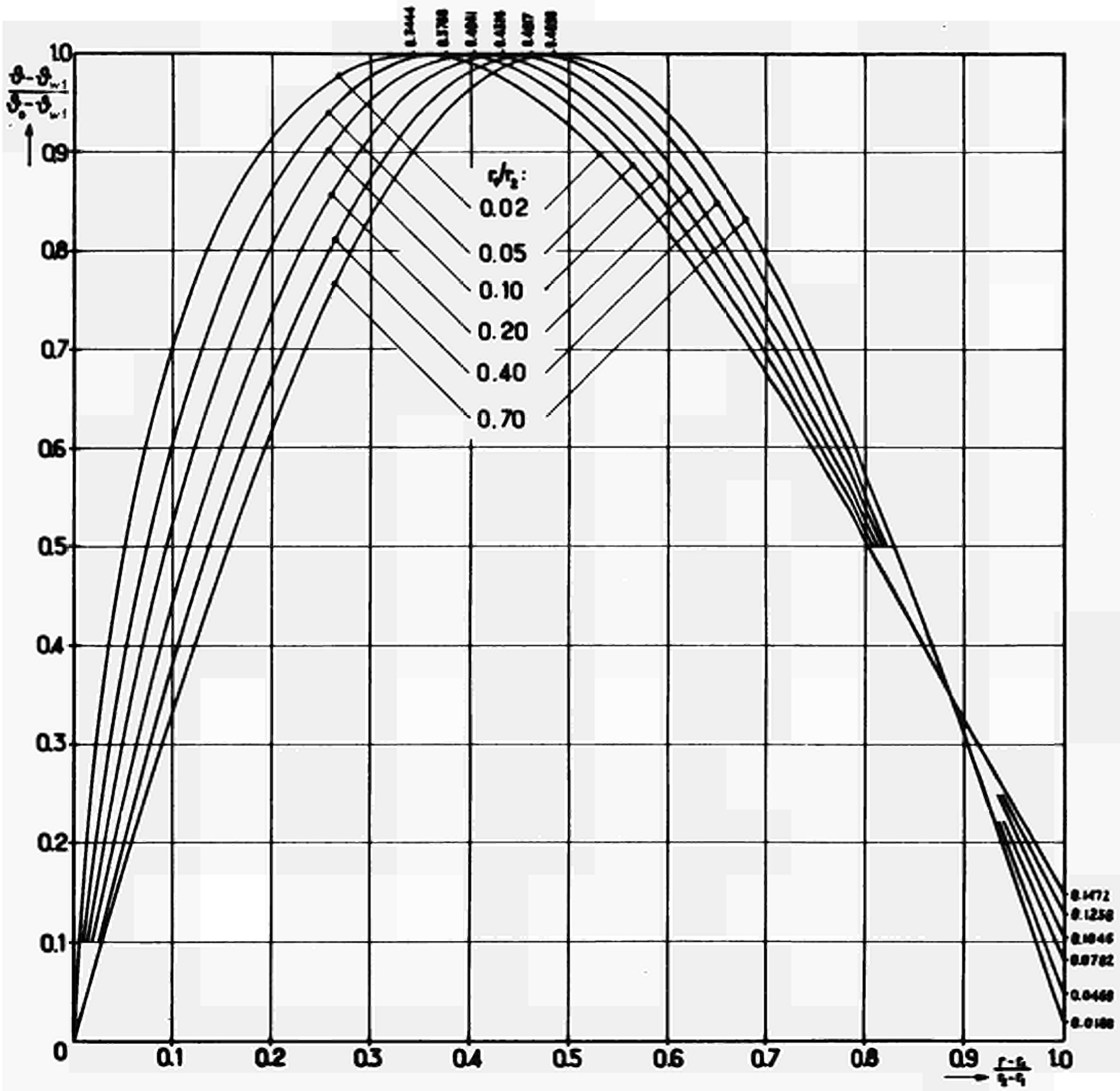


ABB.32. Temperaturverlauf $(\vartheta-\vartheta_{w1})/(\vartheta_0-\vartheta_{w1})=f((r-r_1)/(r_2-r_1),r_1/r_2)$ bei laminarer Strömung im Ringspalt für quasisymmetrischen Wärmeaustausch mit q_{w1}=konst. und q_{w2}=konst.

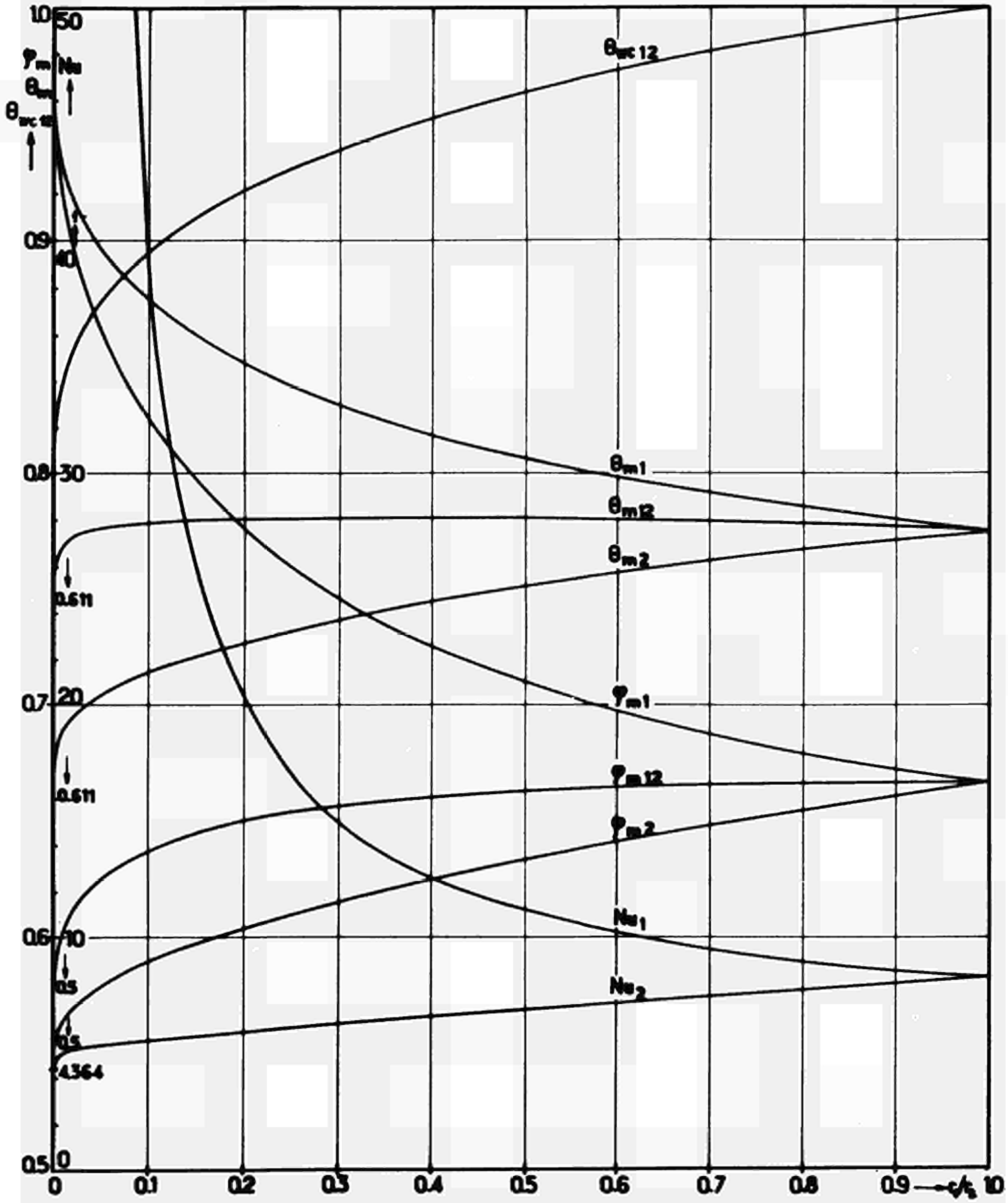


ABB.33. Mischungstemperaturen Θ_{m1}, Θ_{m2} und Θ_{m12}, Wandtemperatur $\Theta_{wc12} = (\vartheta_{w2}-\vartheta_o)/(\vartheta_{w1}-\vartheta_o)$ und Nußelt-Zahlen Nu_1 bzw. Nu_2 bei der laminaren Strömung im Ringspalt für quasisymmetrischen Wärmeaustausch mit q_{w1}=konst. und q_{w2}=konst. sowie mittlere Geschwindigkeiten φ_{m1}, φ_{m2} und φ_{m12} in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2

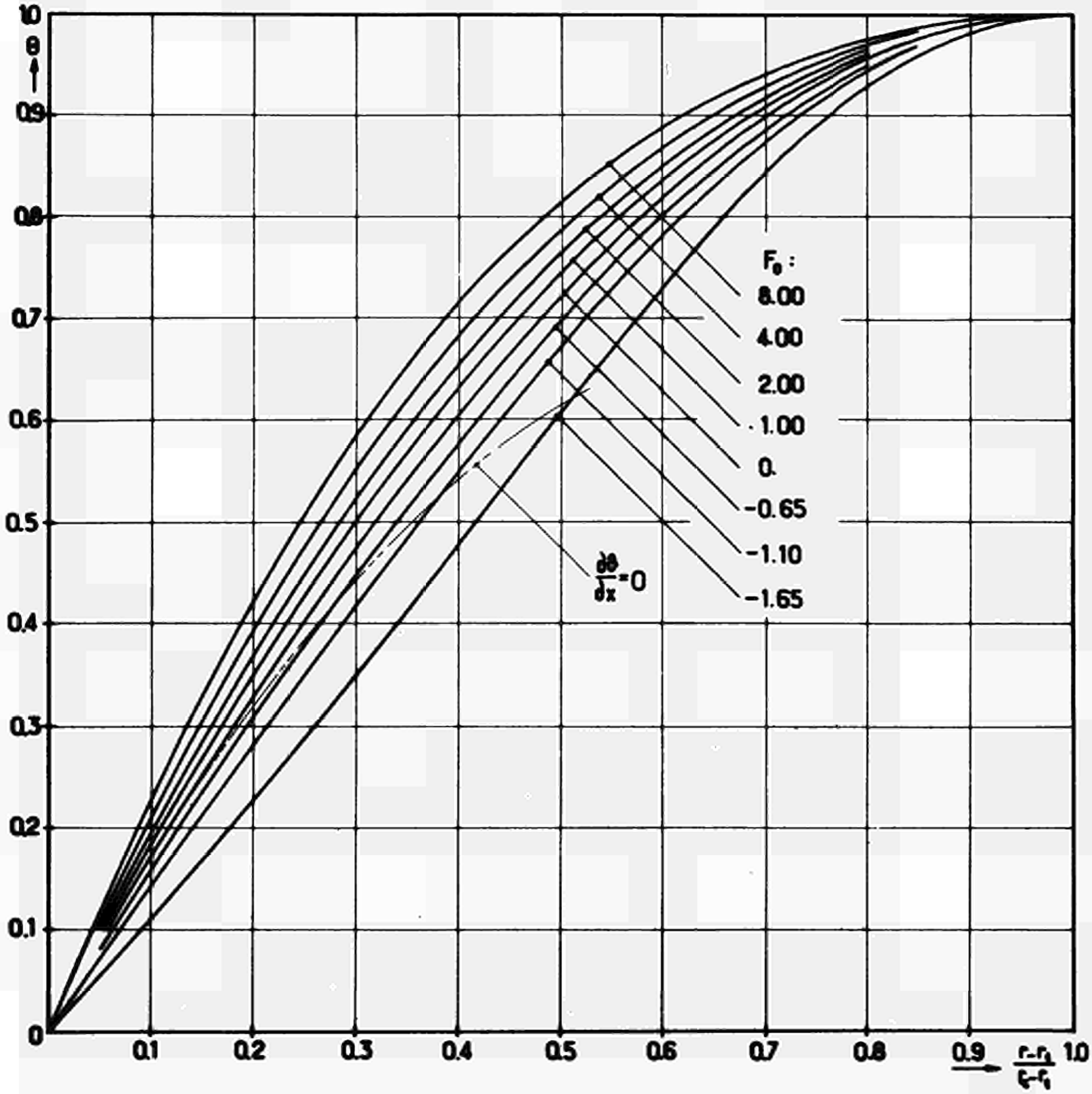


ABB.34. Temperaturverlauf $\theta=f((r-r_1)/(r_c-r_1),F_o)$ bei laminarer Strömung längs eines Rohrbündels mit p/d=1,61 (Dreieckanordnung)

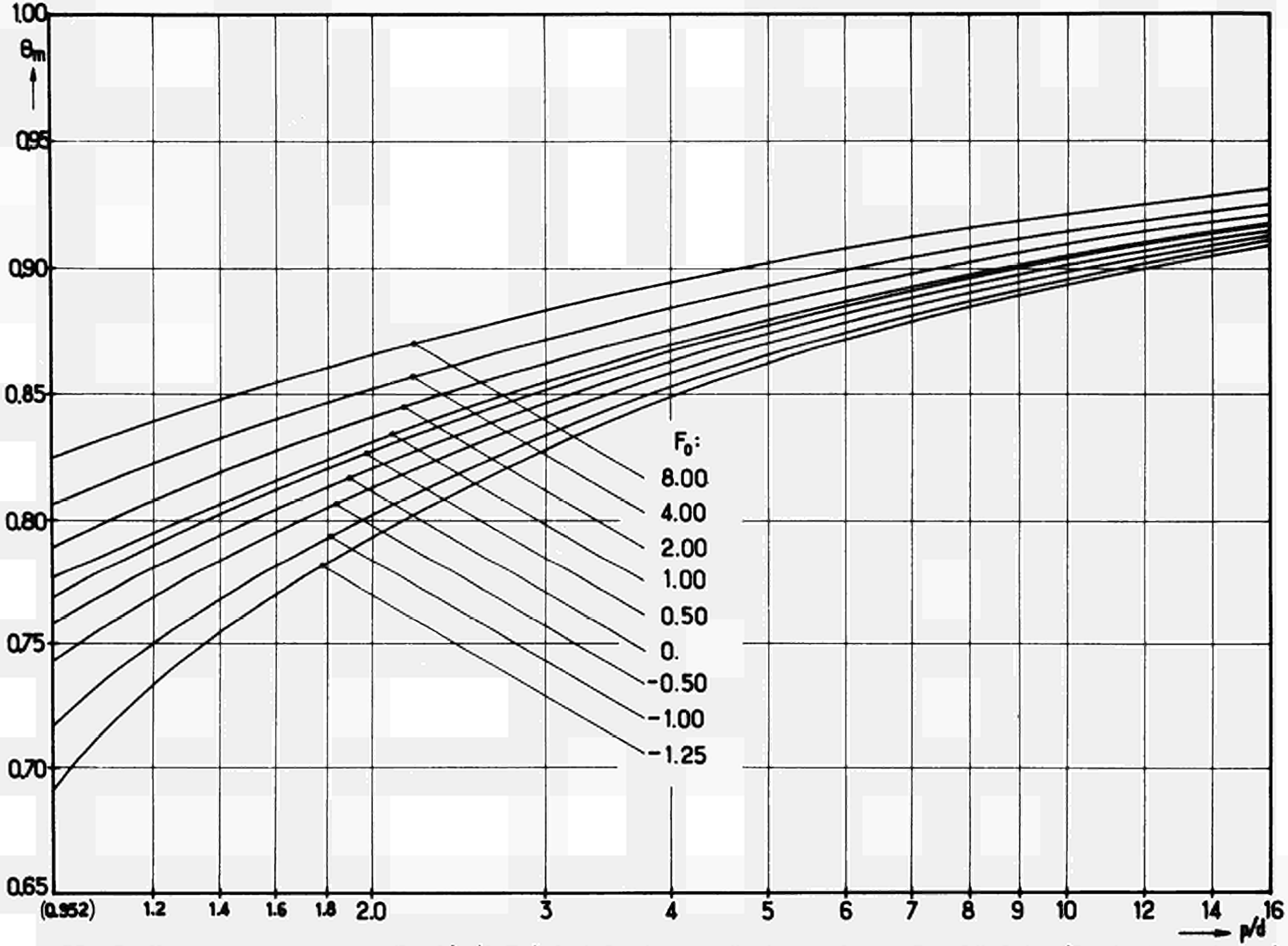


ABB.35. Mischungstemperatur $\Theta_m = f(p/d, F_o)$ bei laminarer Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

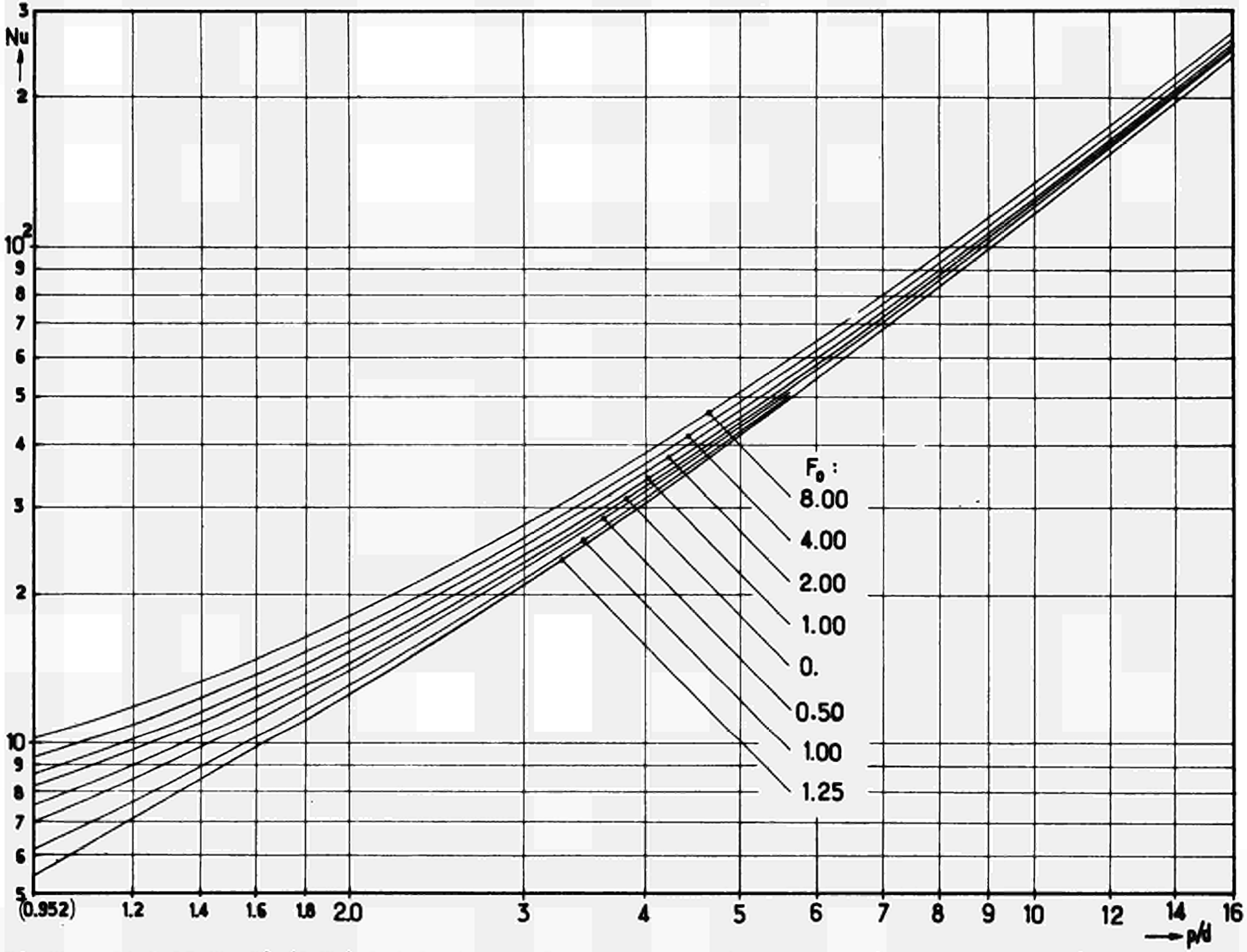


ABB.36. Nusselt-Zahl $Nu=f(p/d,F_o)$ bei laminarer Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

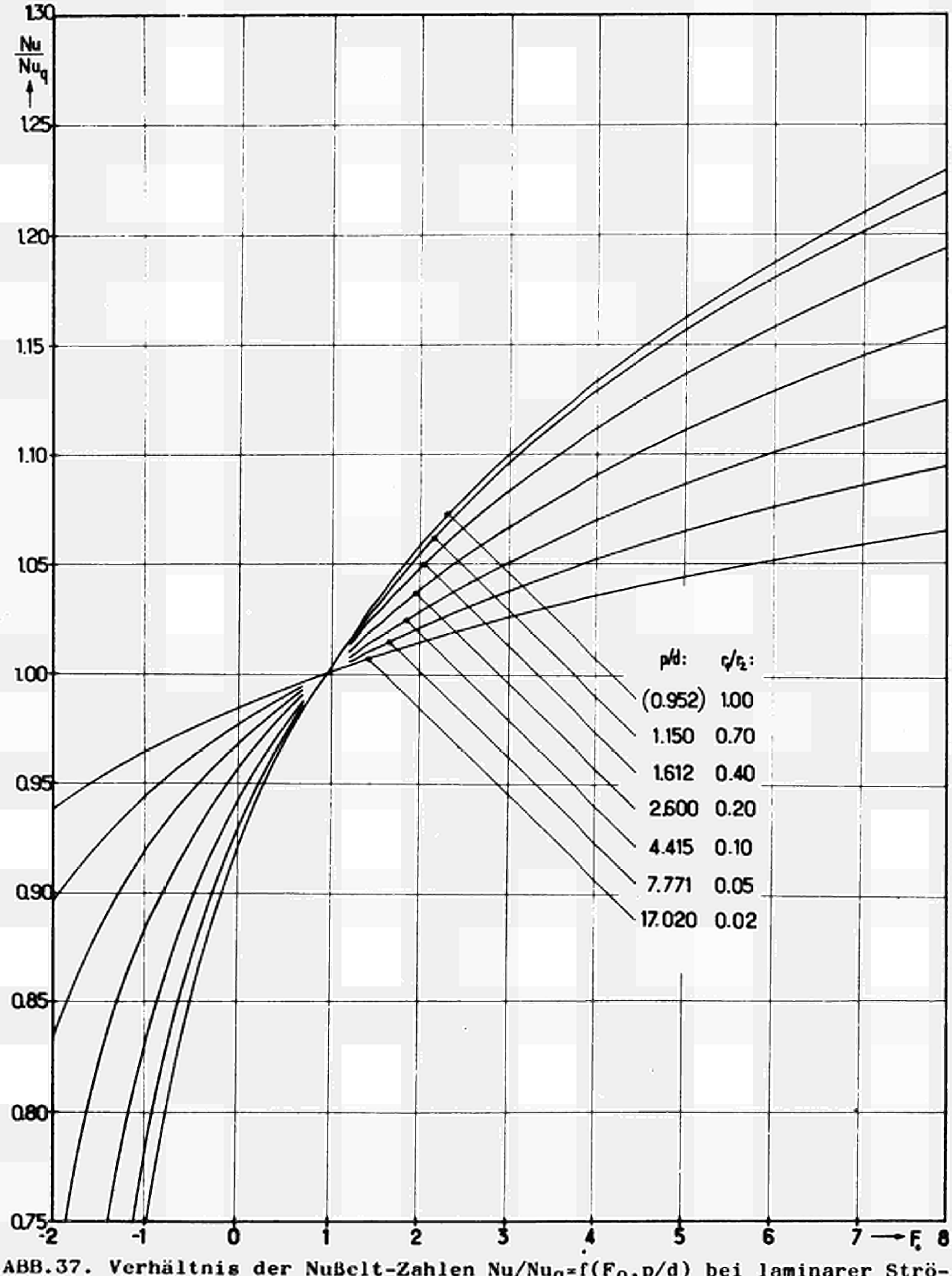


ABB.37. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_q = f(F_o, p/d)$ bei laminarer Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung), einschließlich des Grenzfalls $p/d = 0{,}952$: Parallele Platten, symmetrischer Wärmeaustausch

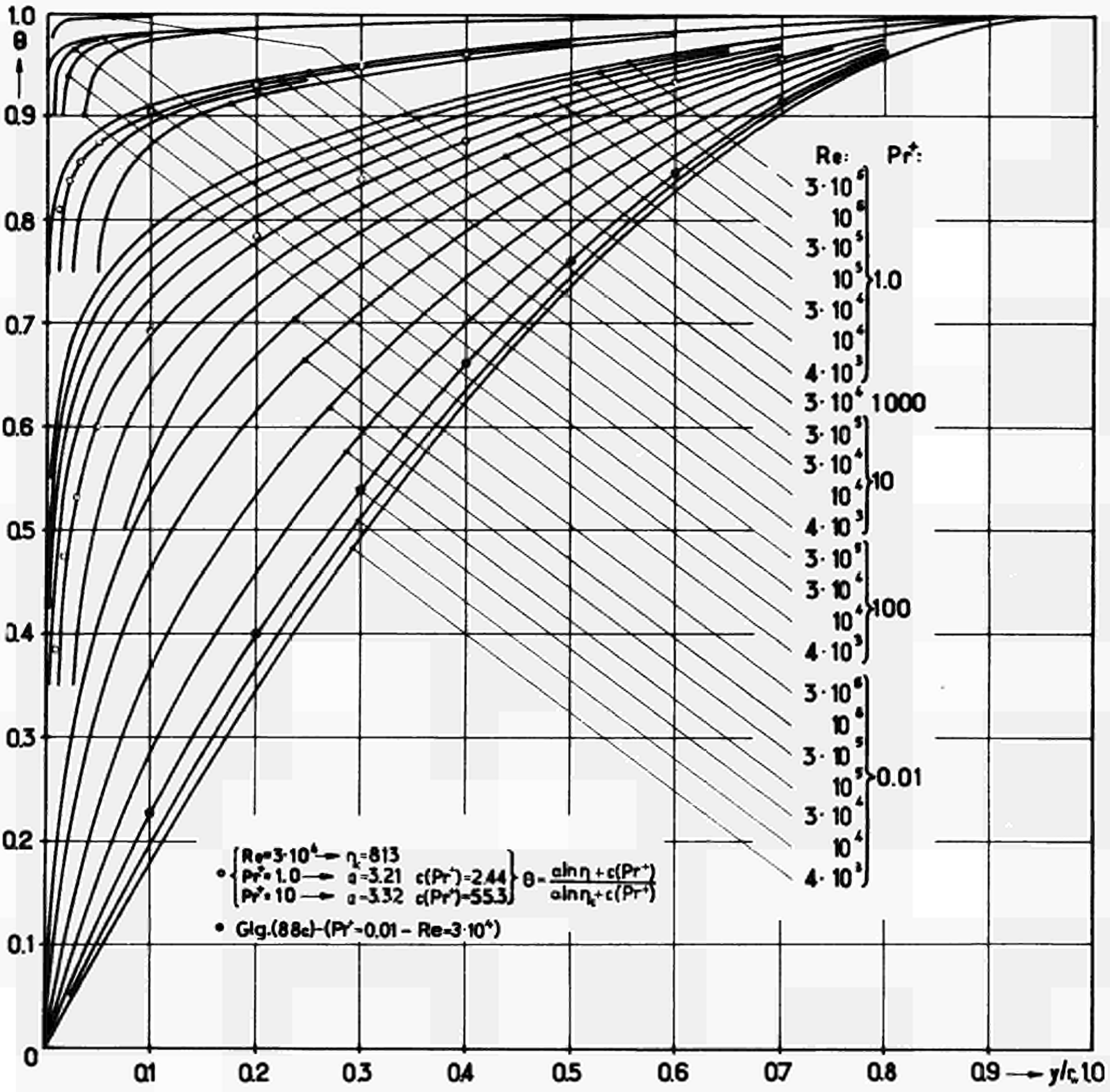


ABB.38. Temperaturverlauf $\Theta=f(y/r,Pr^+,Re)$ bei turbulenter Rohrströmung für q_w=konst.

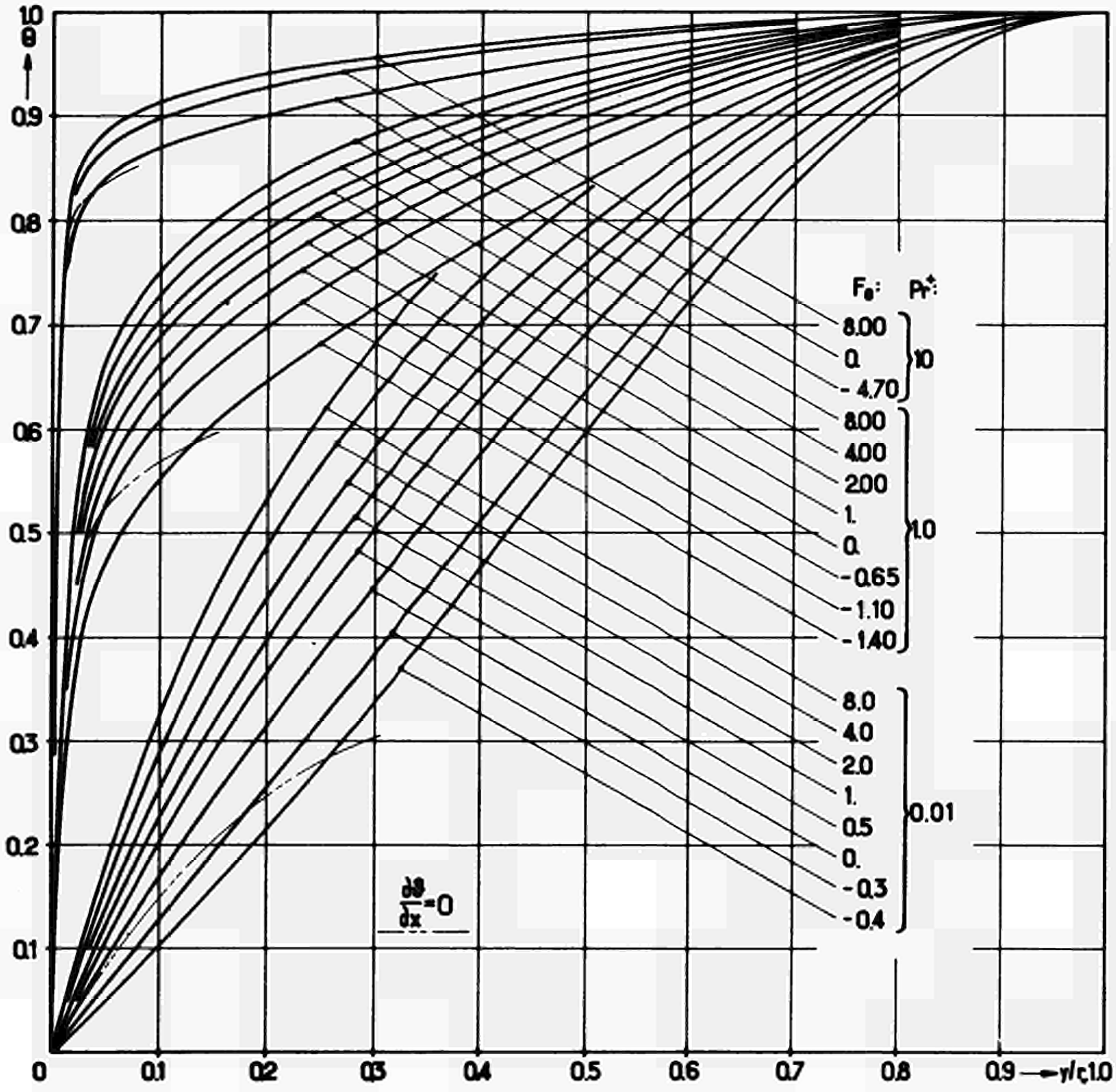


ABB.39. Temperaturverlauf $\Theta=f(y/r, Pr^{+}, F_{o})$ bei turbulenter Rohrströmung für $Re=3 \cdot 10^{4}$

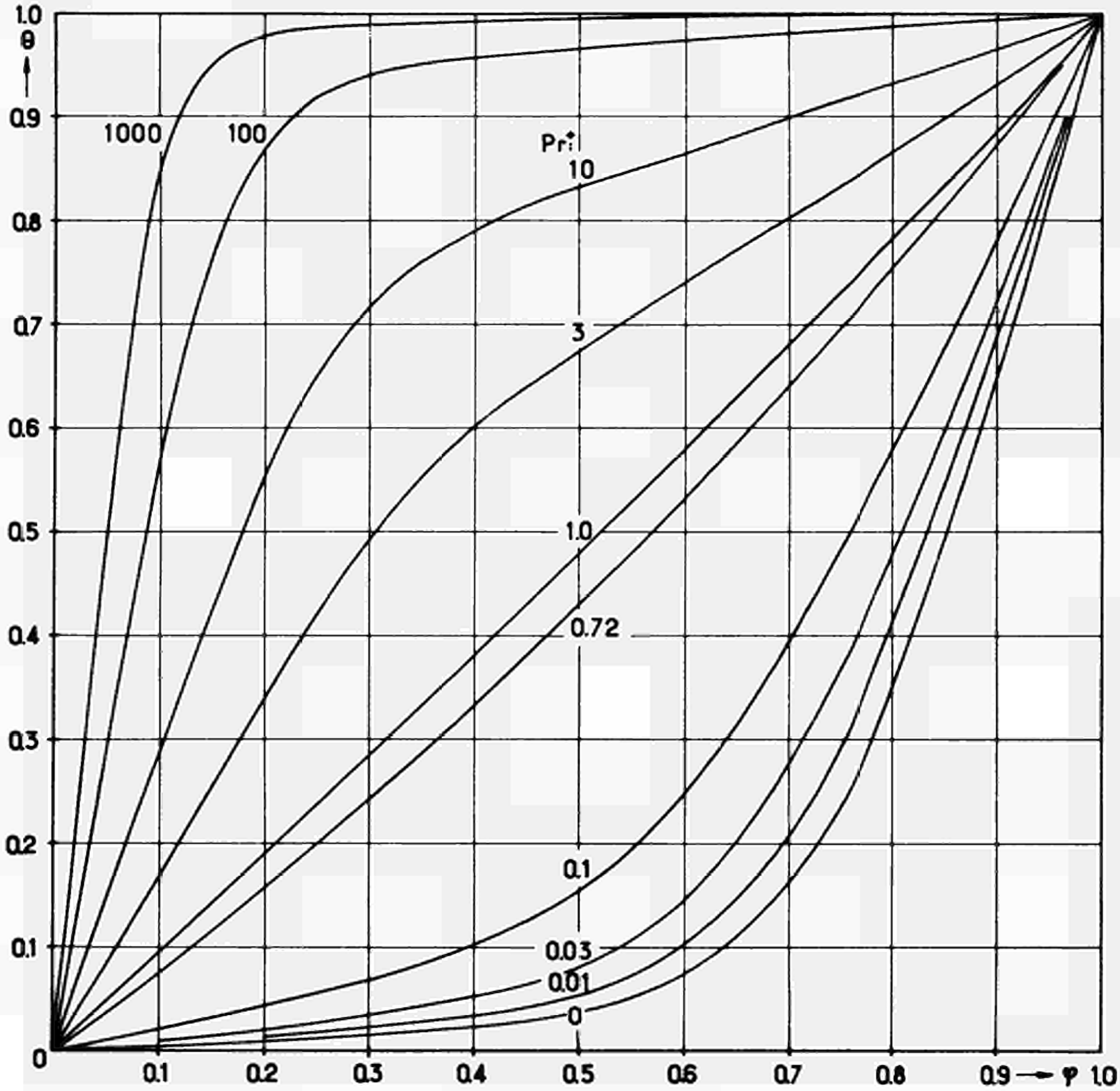


ABB.40. Temperaturverlauf $\Theta=f(\varphi,Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für q_w=konst. und $Re=3\cdot10^4$

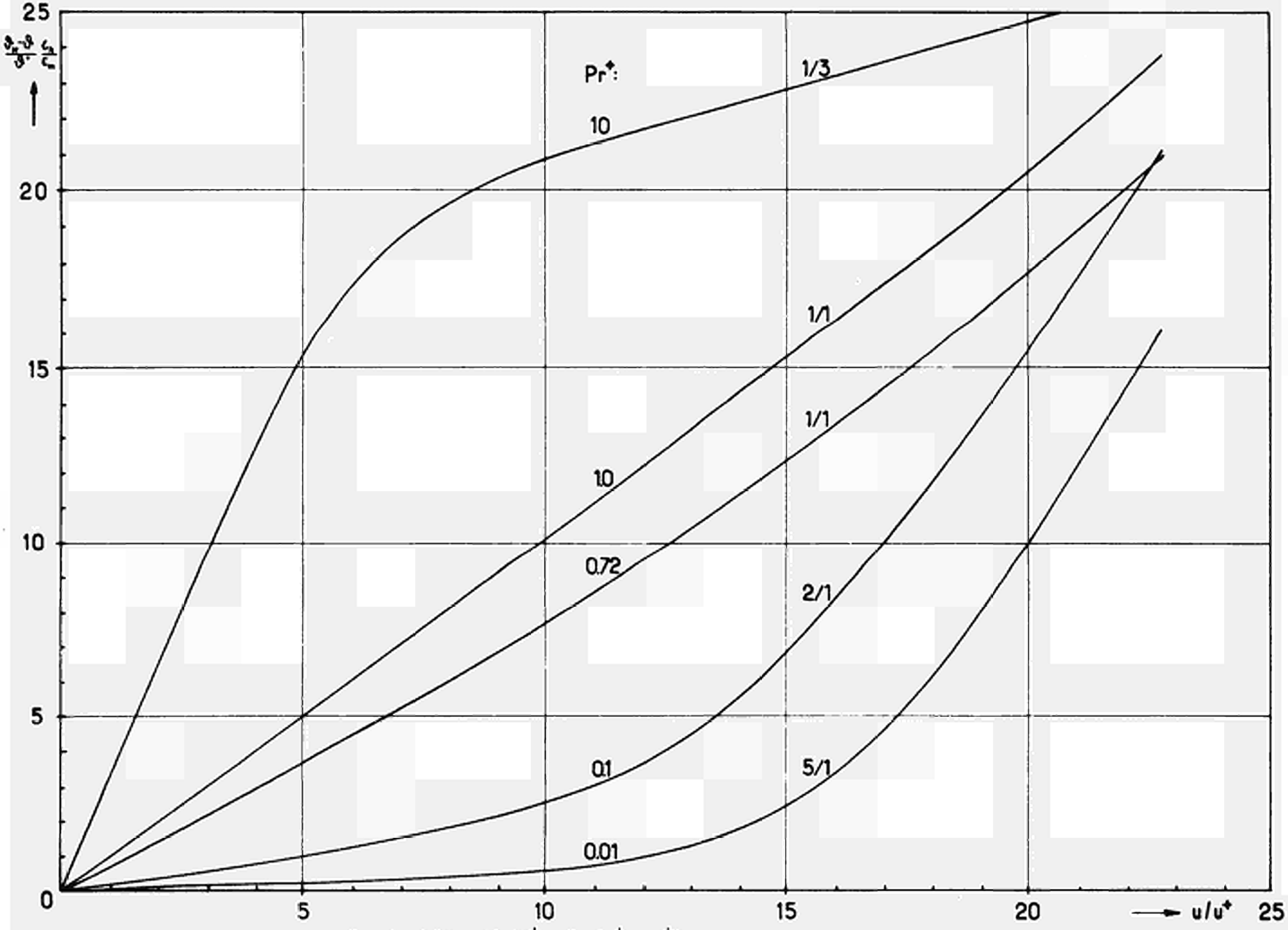


ABB.41. Temperaturverlauf $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(u/u^+,Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für q_w=konst. und $Re=3.10^4$

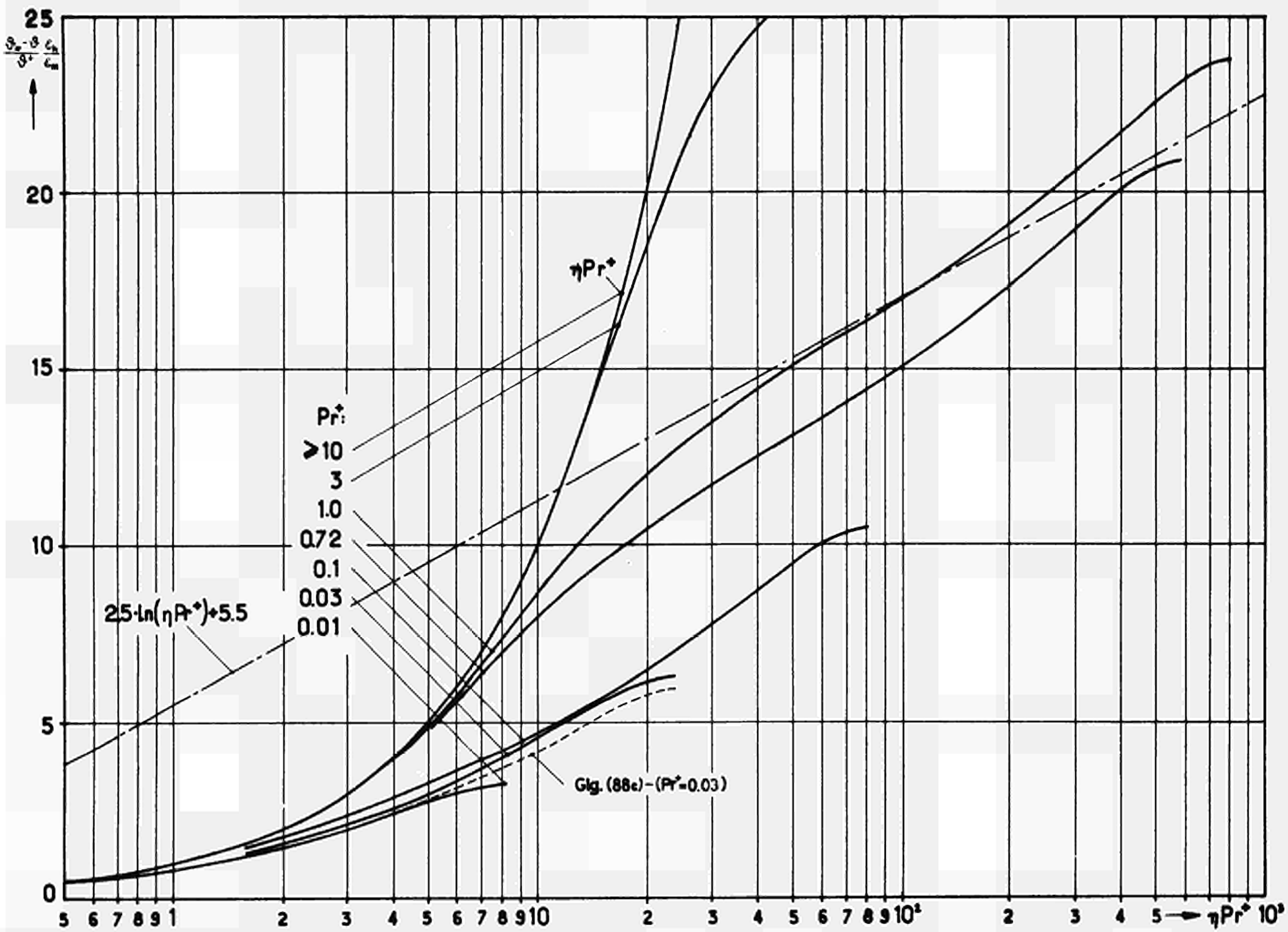
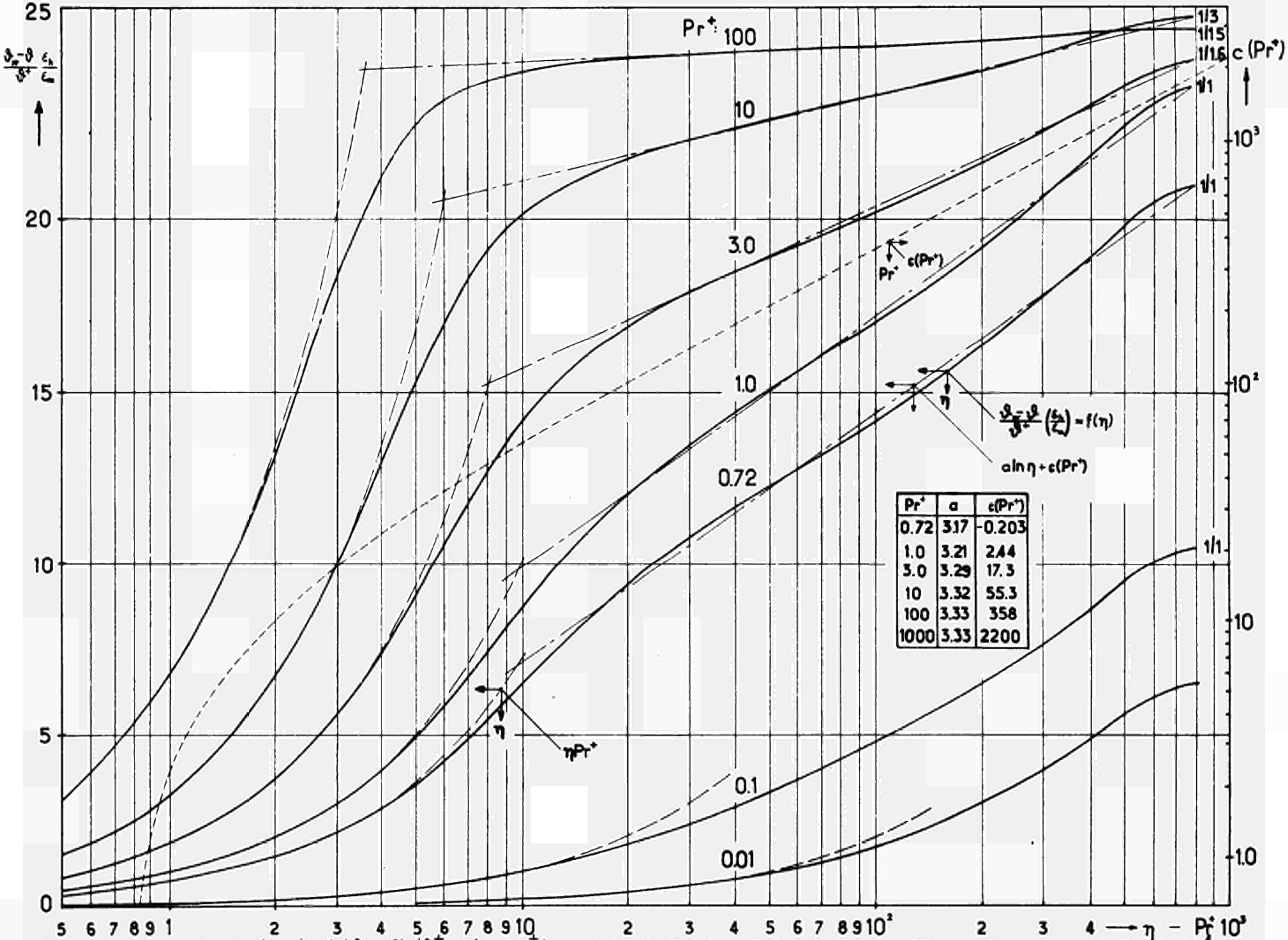


ABB.42.Temperaturverlauf $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+=f(\eta Pr^+, Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für q_w=konst. und $Re=3\cdot10^4$



Pr+	a	c(Pr+)
0.72	3.17	-0.203
1.0	3.21	2.44
3.0	3.29	17.3
10	3.32	55.3
100	3.33	358
1000	3.33	2200

ABB.43. Temperaturverlauf $(\varepsilon_h/\varepsilon_m)(\vartheta_w-\vartheta)/\vartheta^+ = f(\eta, Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für q_w=konst. und $Re=3.10^4$

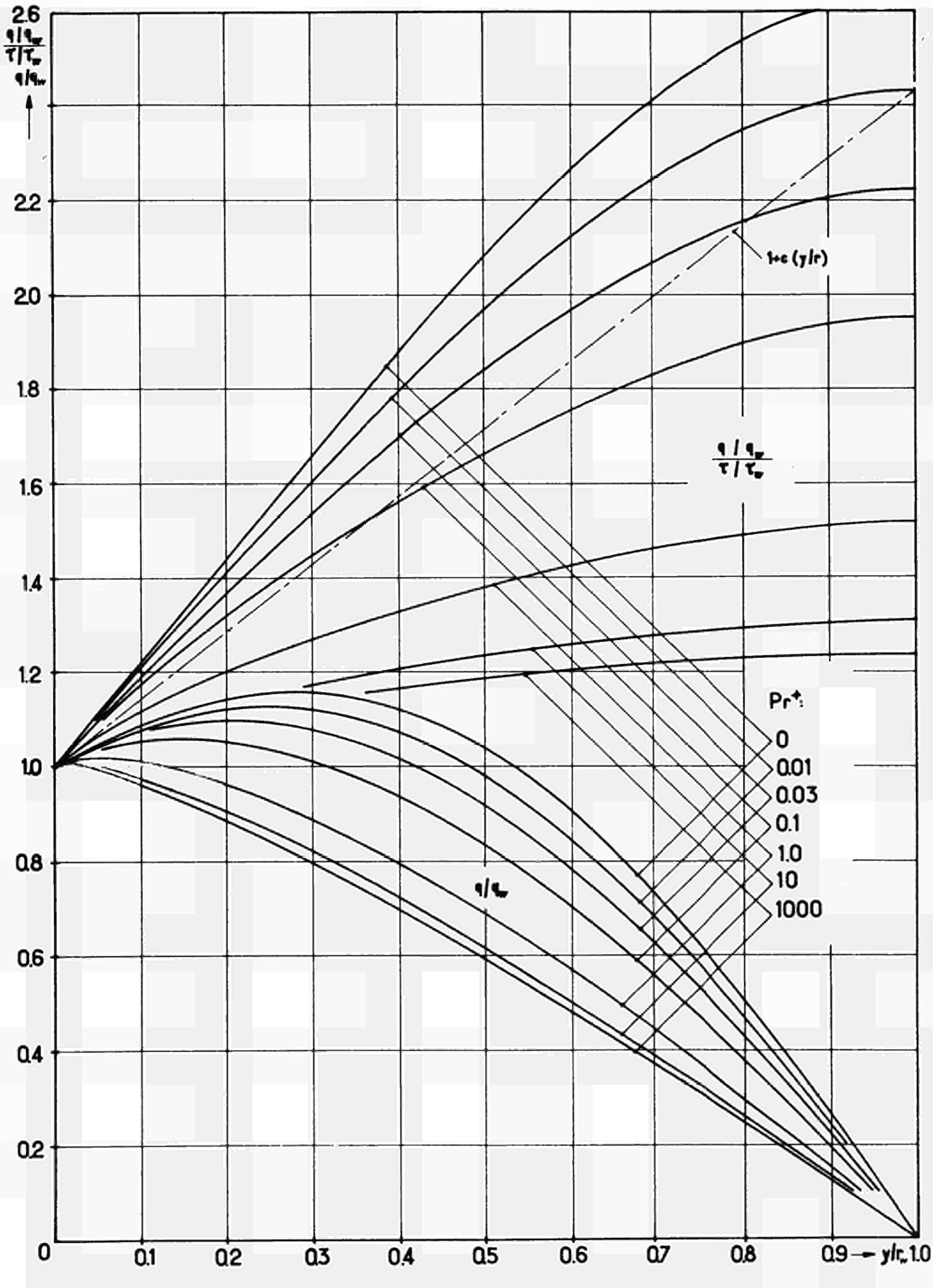


ABB.44. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w = f_1(y/r, Pr^+)$ bzw. $(q/q_w)/(\tau/\tau_w) = f_2(y/r, Pr^+)$ bei turbulenter Rohrströmung für ϑ_w=konst. und $Re = 3 \cdot 10^4$

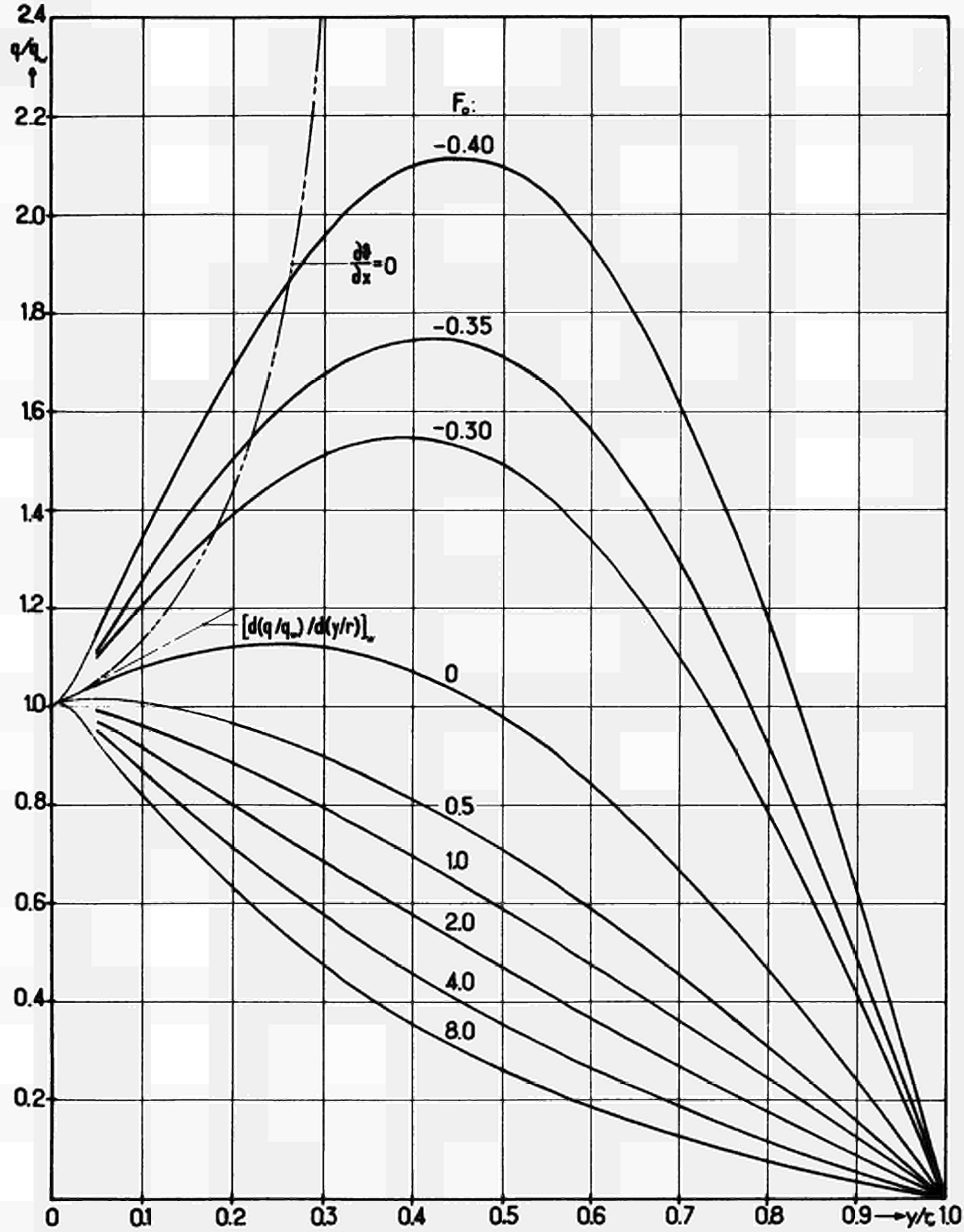


ABB.45. Wandnormaler Wärmestromdichteverlauf $q/q_w=f(y/r,F_o)$ bei turbulenter Rohrströmung für $Pr^+=0{,}01$ und $Re=3\cdot10^4$

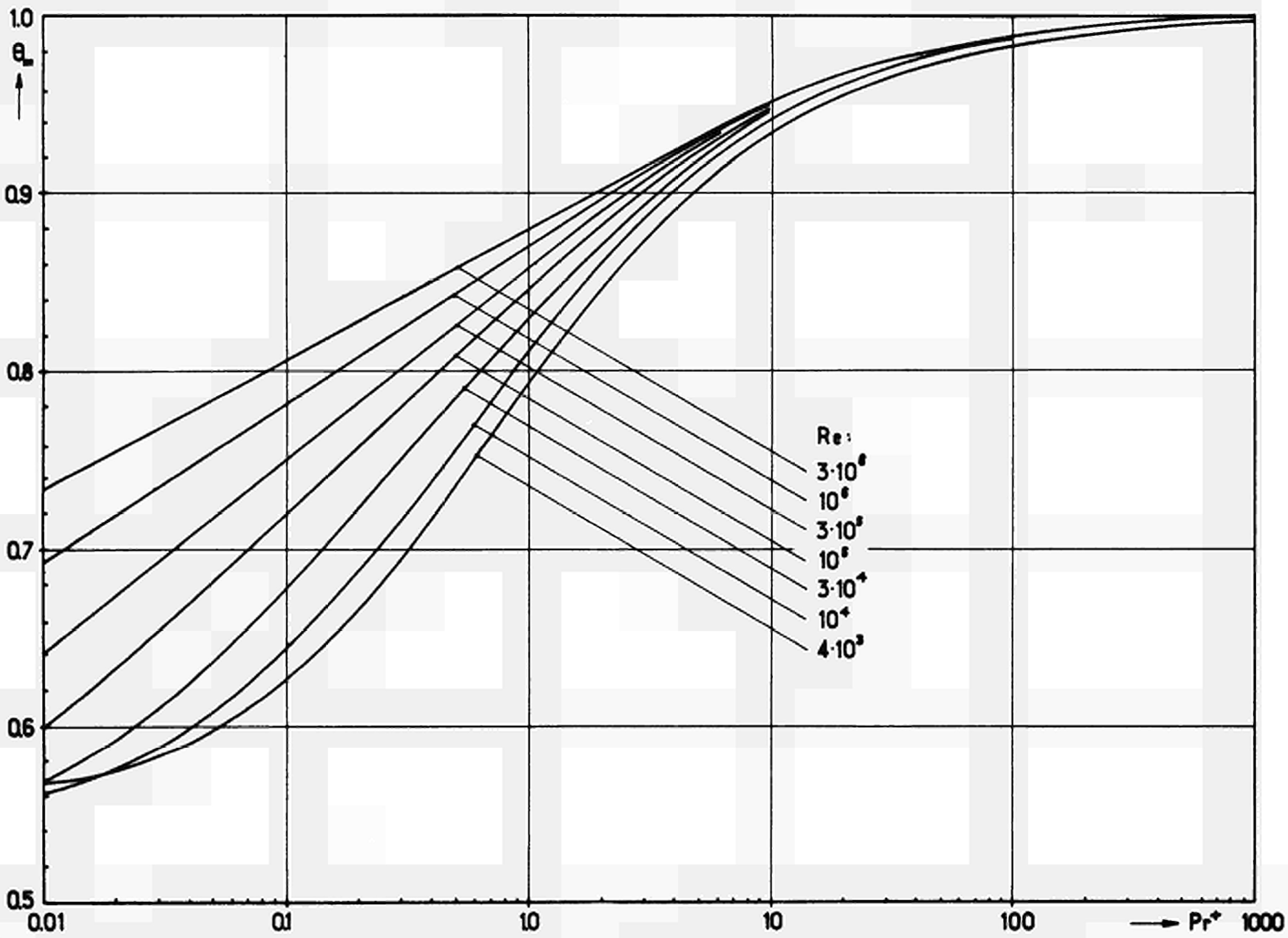


ABB.46. Mischungstemperatur $\Theta_m = f(Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Rohrströmung für q_W=konst.

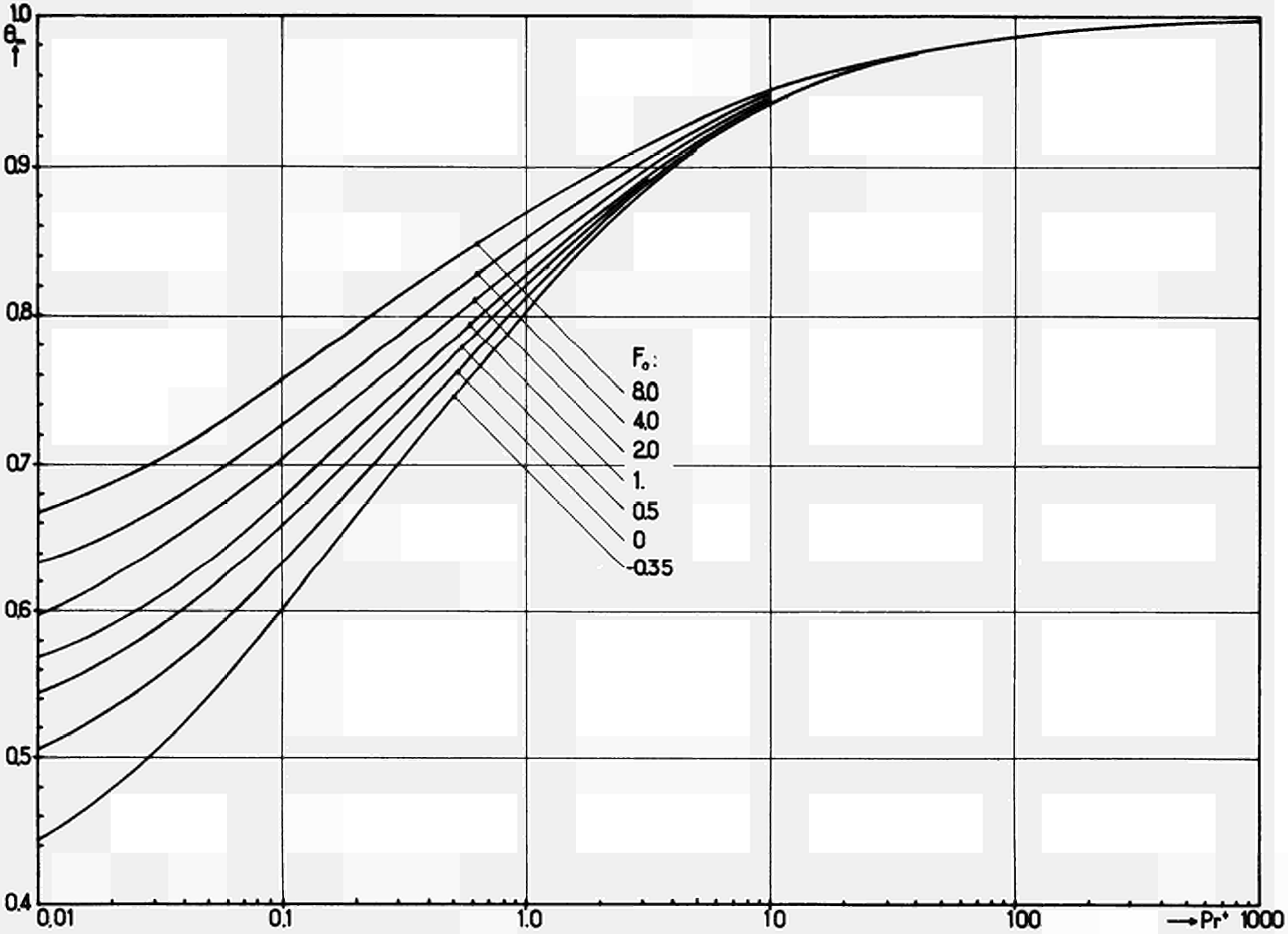


ABB.47. Mischungstemperatur $\Theta_m = f(Pr^+, F_o)$ bei der turbulenten Rohrströmung für $Re=3\cdot 10^4$

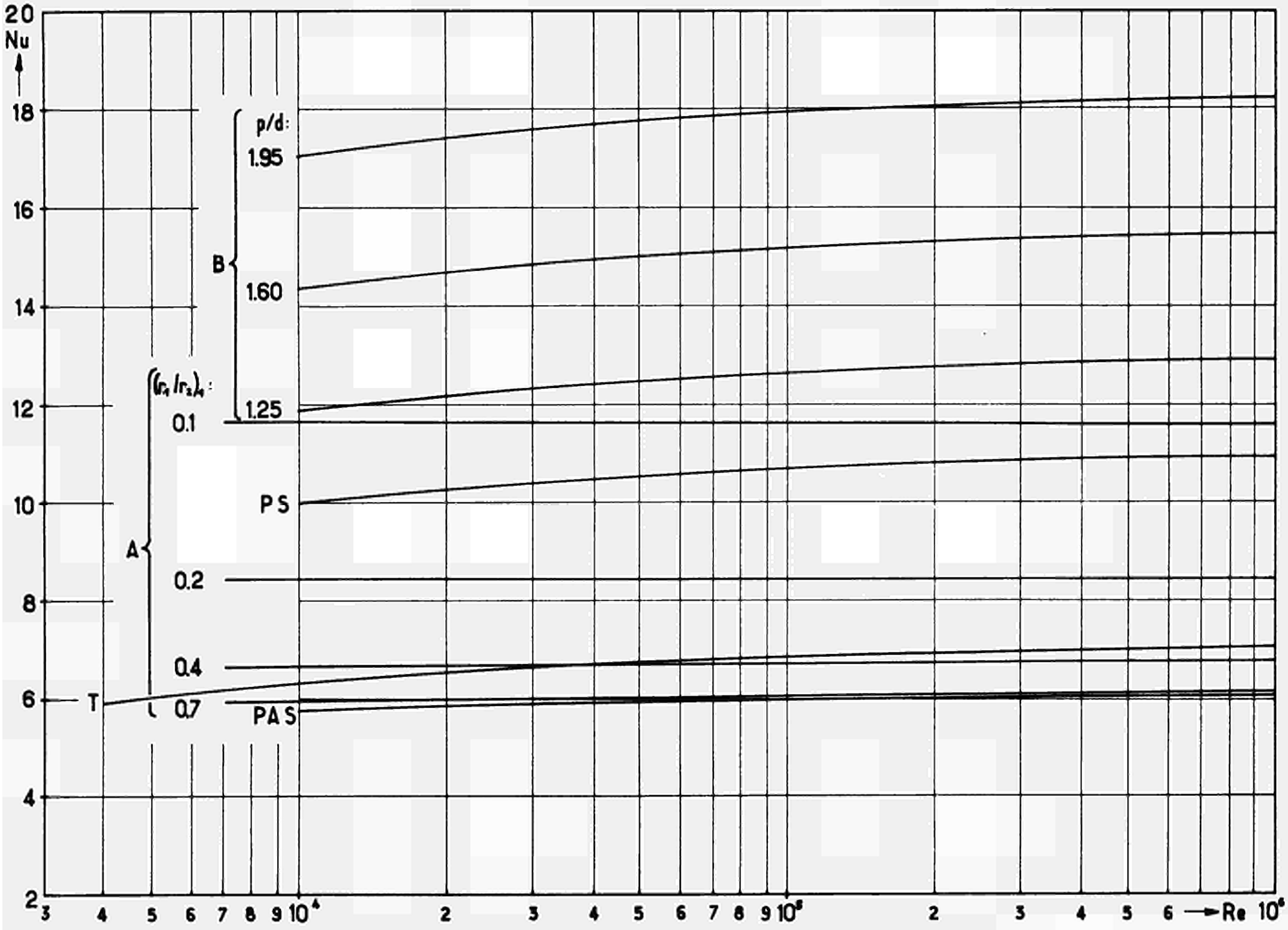


ABB.48. Nusselt-Zahl Nu=f(Re) bei der turbulenten Strömung für Pr=0 und q_W=konst.

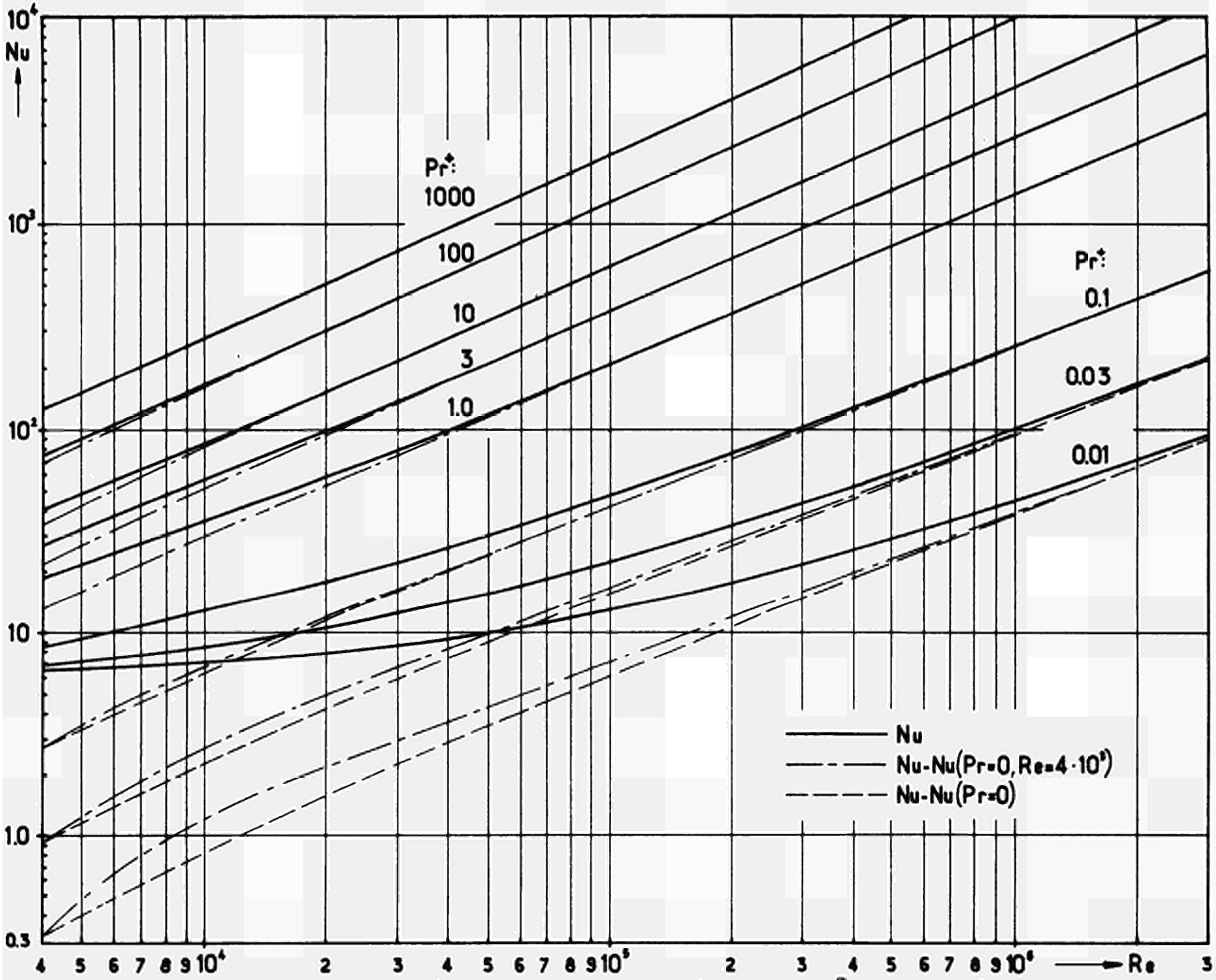


ABB.49. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Re,Pr^+)$, $Nu-Nu_{min}=Nu-Nu(Pr^+=0;Re=4\cdot 10^3)=f_2(Re,Pr^+)$ und $Nu-Nu(Pr=0)=f_3(Re,Pr^+)$ bei der turbulenten Rohrströmung für q_w=konst.

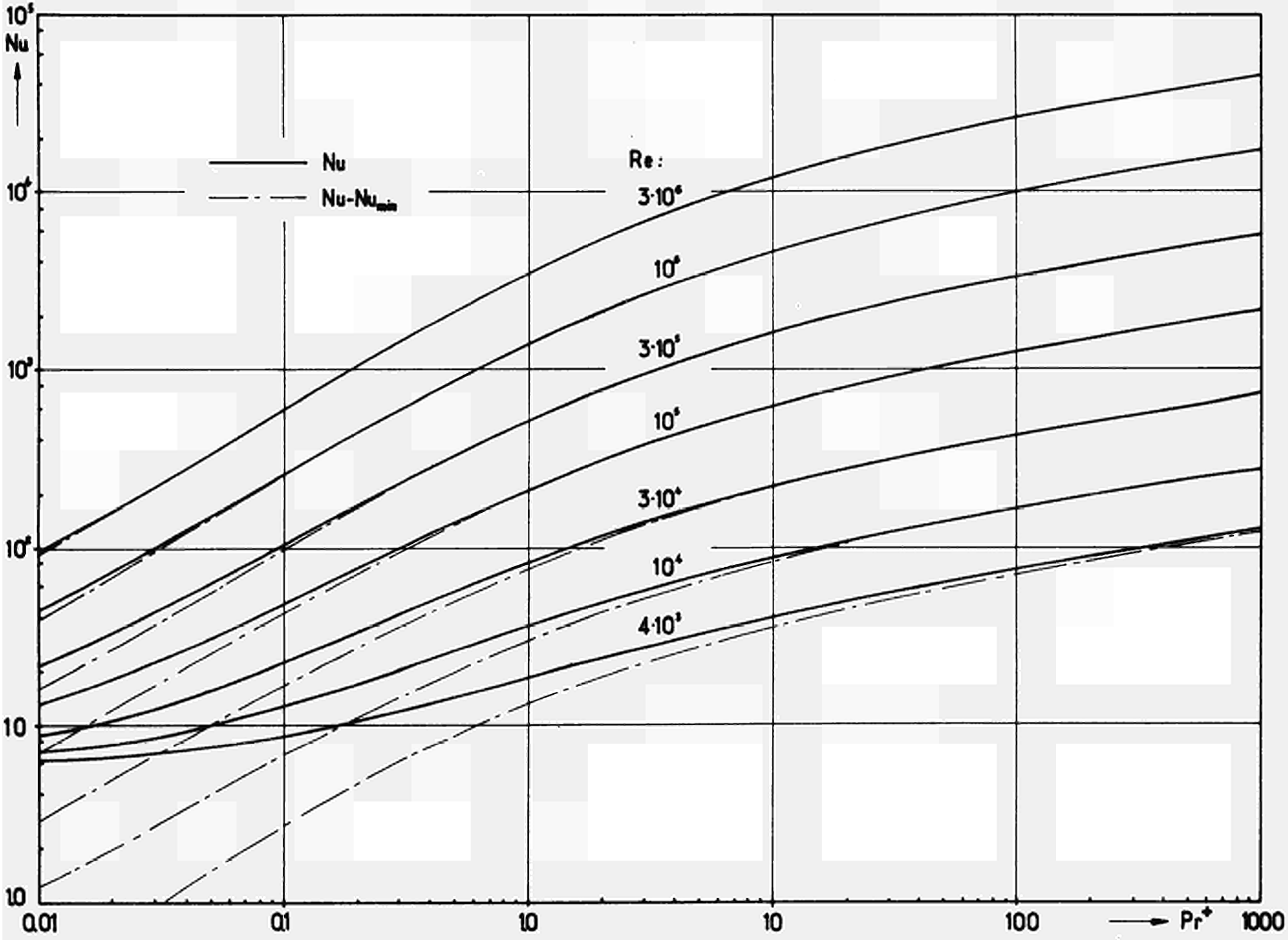


ABB.50. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Pr^+,Re)$ und $Nu-Nu_{min}=f_2(Pr^+,Re)$ bei der turbulenten Rohrströmung für q_w=konst.

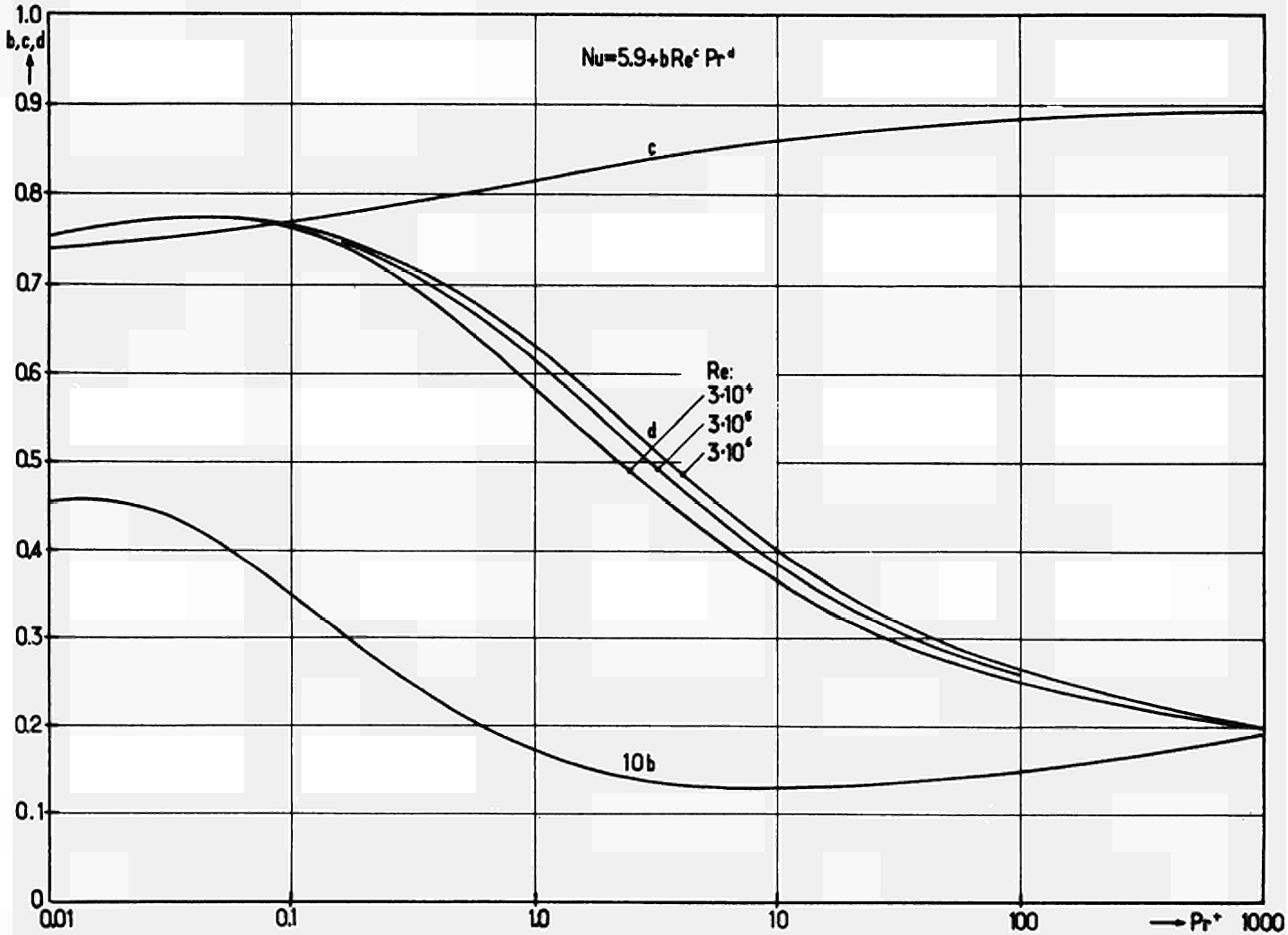


ABB.51. Koeffizienten $b=f_1(Pr^+)$, $c=f_2(Pr^+)$ und $d=f_3(Pr^+,Re)$ der Beziehung $Nu=5,9+bRe^cPr^{+d}$ bei der turbulenten Rohrströmung für q_w=konst.

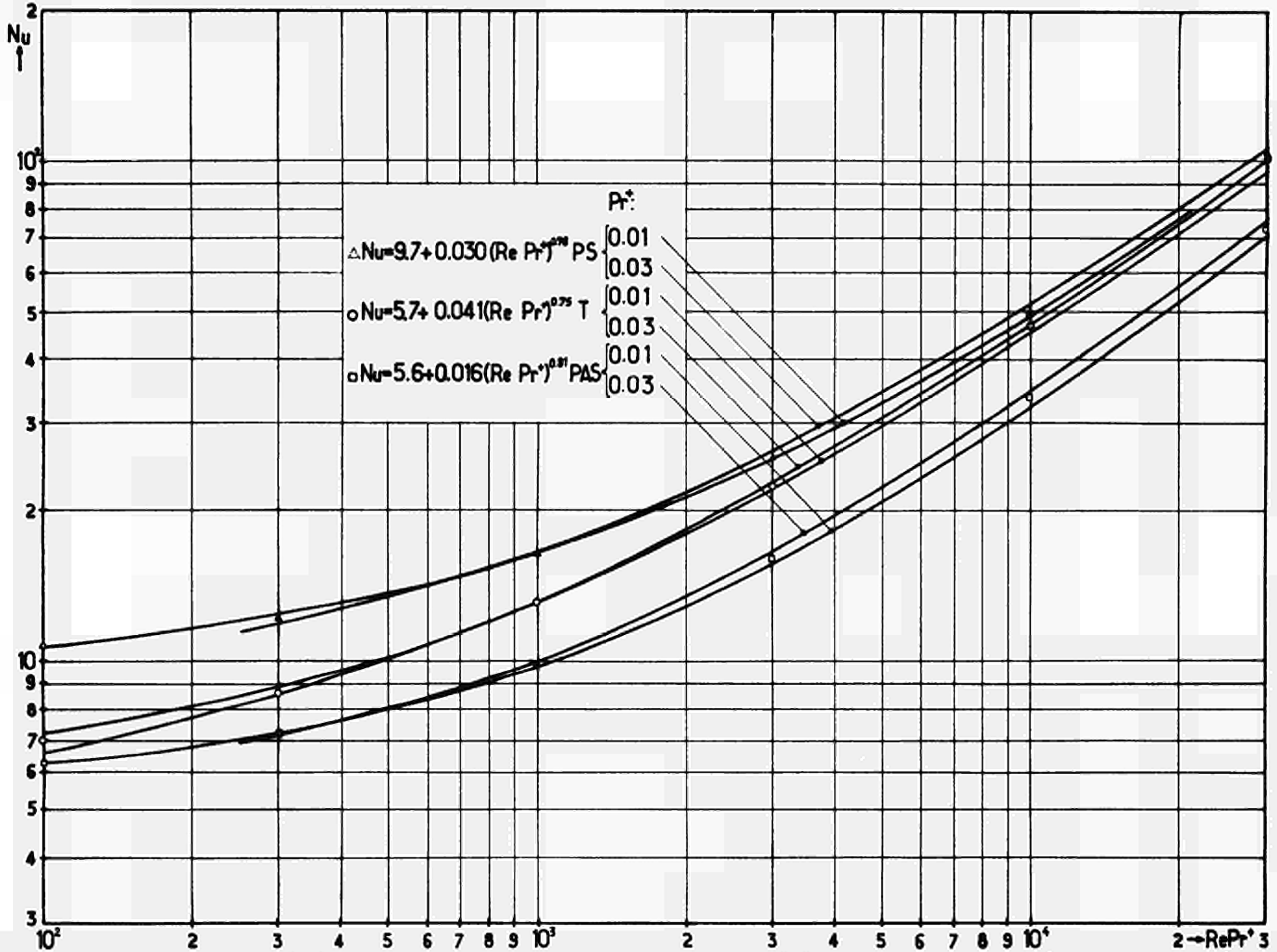


ABB.52. Nusselt-Zahlen $Nu=f(Pe^{+})$ bei turbulenter Strömung in Rohren (T) und zwischen parallelen Platten (PS;PAS) für $Pr^{+}=0.01$, $Pr^{+}=0.03$ und q_{w}=konst. im Vergleich mit Näherungsgleichungen der Form $Nu=a+bPe^{+c}=a+b(RePr^{+})^{c}$

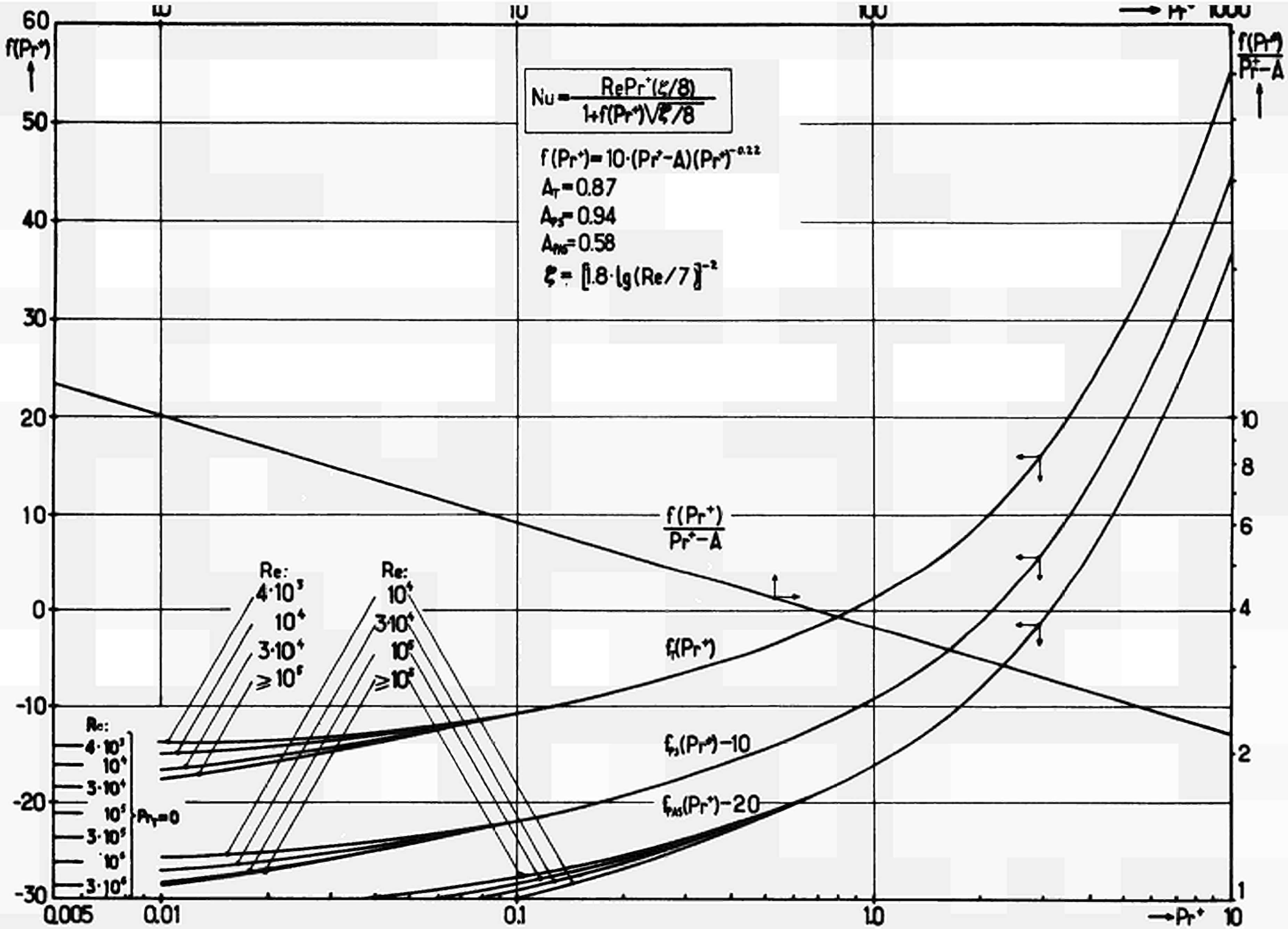


ABB.53. Herleitung der Näherungsgleichung zur expliziten Darstellung der Funktion $f(Pr^+)$ für die Wiedergabe der numerischen Ergebnisse in der Form $Nu = RePr^+(\zeta/8)/(1+f(Pr^+)\sqrt{\zeta/8})$, angewandt auf die turbulente Strömung in Rohren (T) und zwischen parallelen Platten, symmetrischer (PS) bzw asymmetrischer (PAS) Wärmeaustausch

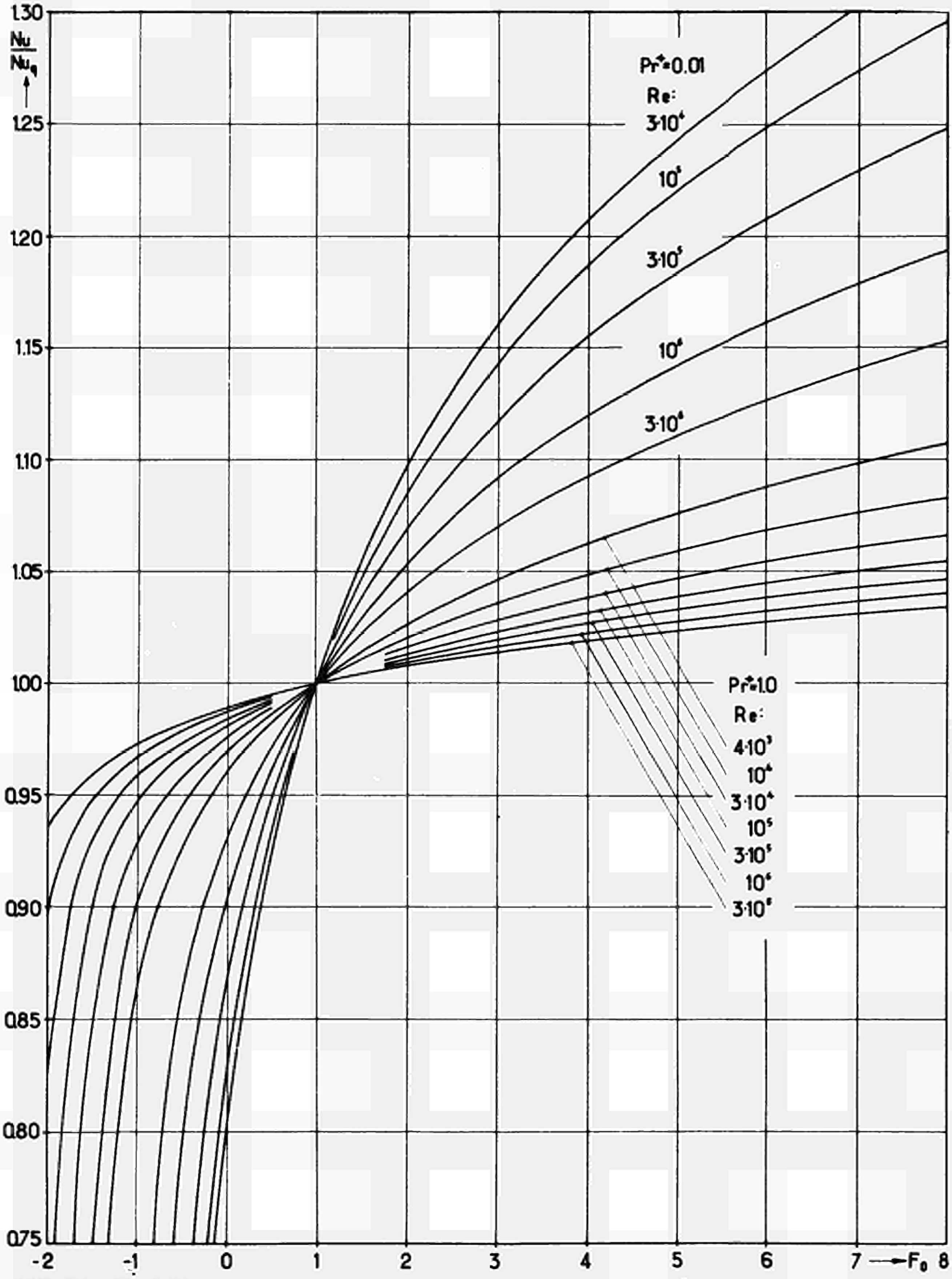


ABB.54. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_q = f(F_o, Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Rohrströmung für $Pr^+ = 0{,}01$ und $Pr^+ = 1{,}0$

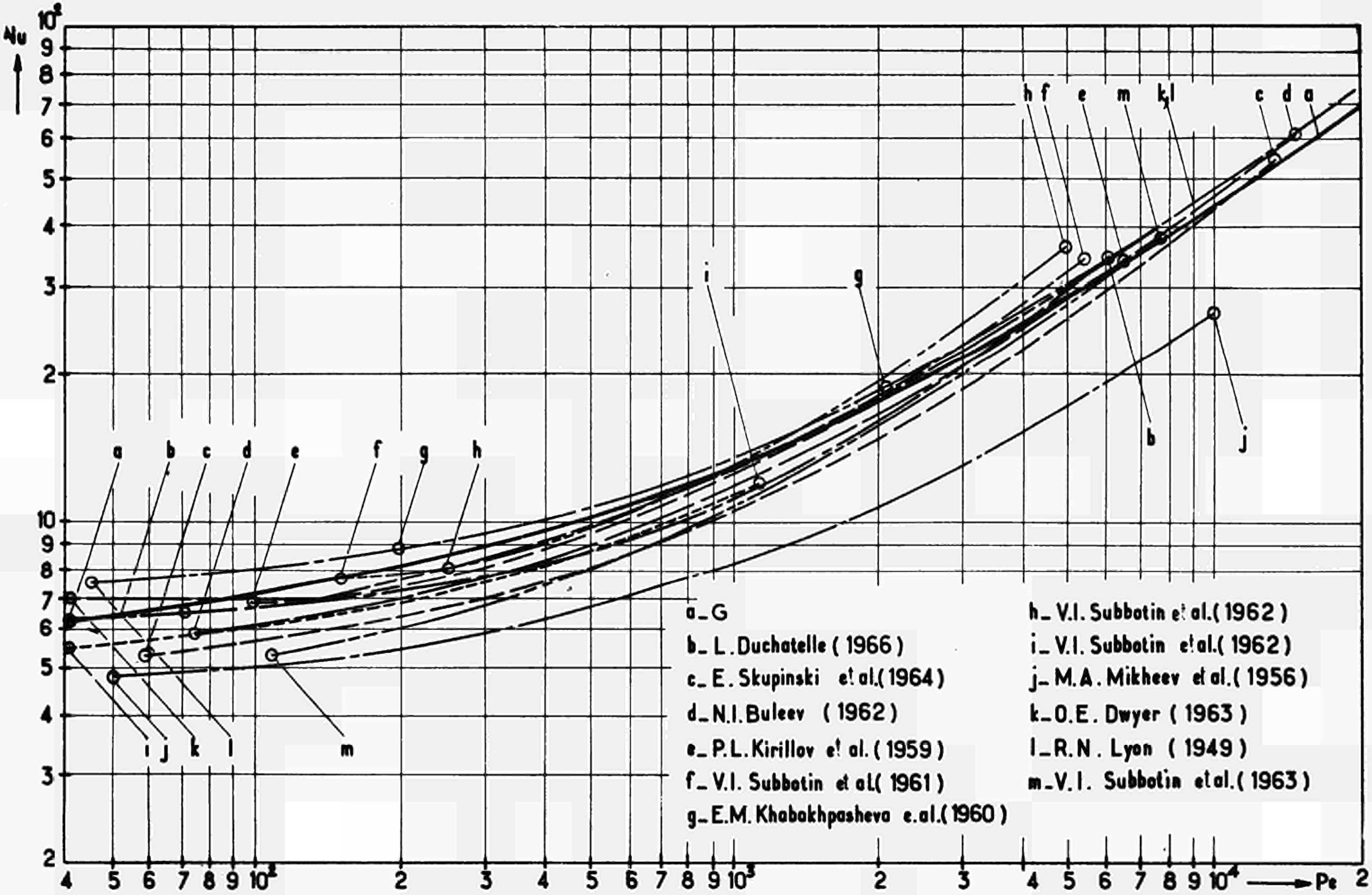


ABB.55. Vergleich der in der vorliegenden Arbeit (G) für die turbulente Rohrströmung (q_w=konst. - $Pr=Pr^+=0{,}01$) berechneten Nusselt-Zahlen Nu=f(Pe) mit theoretischen und an Flüssigmetallen experimentell gewonnenen Ergebnissen anderer Autoren

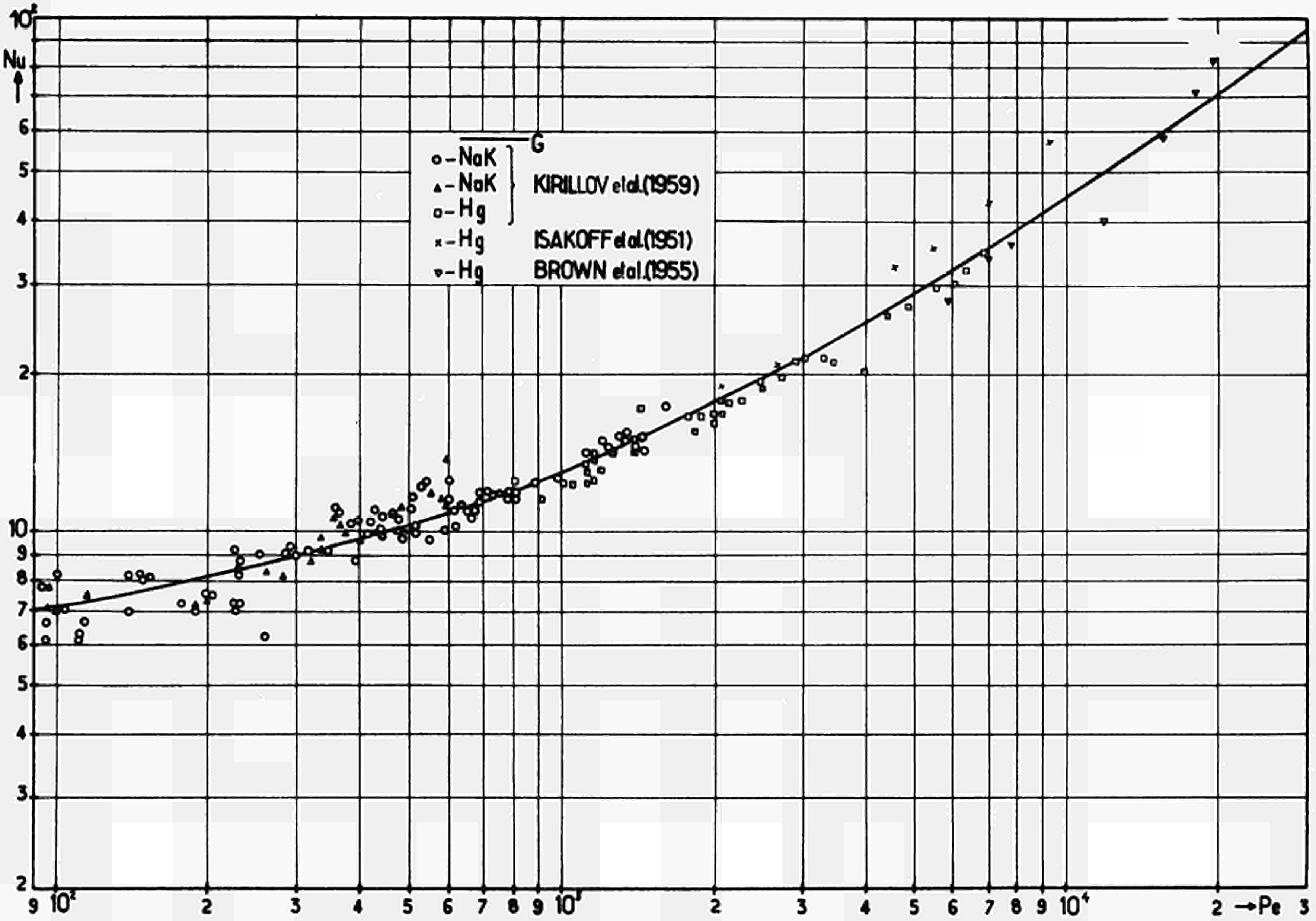


ABB.56. Vergleich der für die turbulente Rohrströmung (q_w=konst. - Pr=Pr$^+$=0,01) berechneten (G) und an Flüssigmetallen experimentell ermittelten Nusselt-Zahlen Nu=f(Pe)

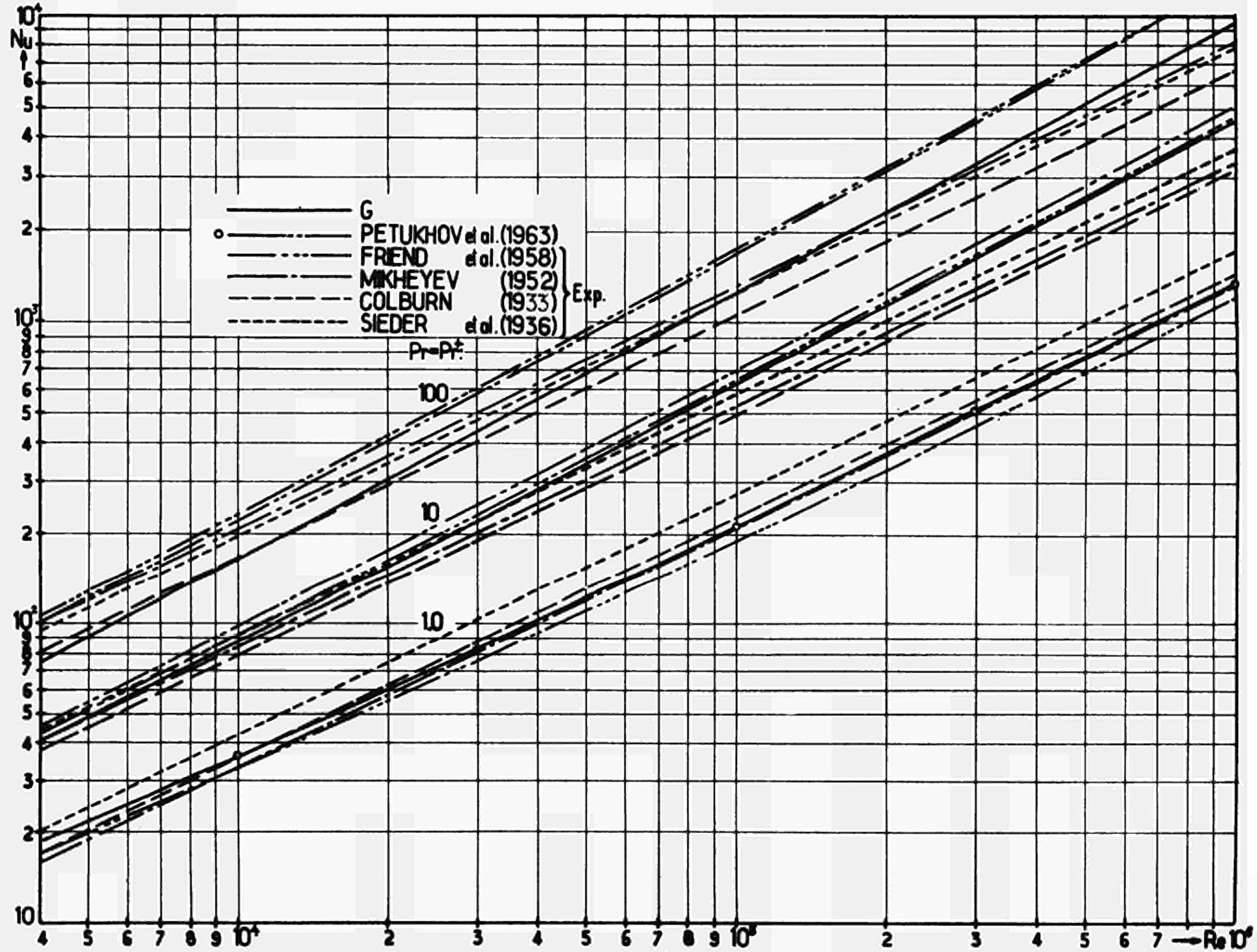


ABB.57. Vergleich der in der vorliegenden Arbeit (G) für die turbulente Rohrströmung berechneten Nusselt-Zahlen Nu=f(Re,Pr) mit theoretisch und experimentell gewonnenen Ergebnissen anderer Autoren (q_w=konst.-Pr=Pr^+=1;10;100)

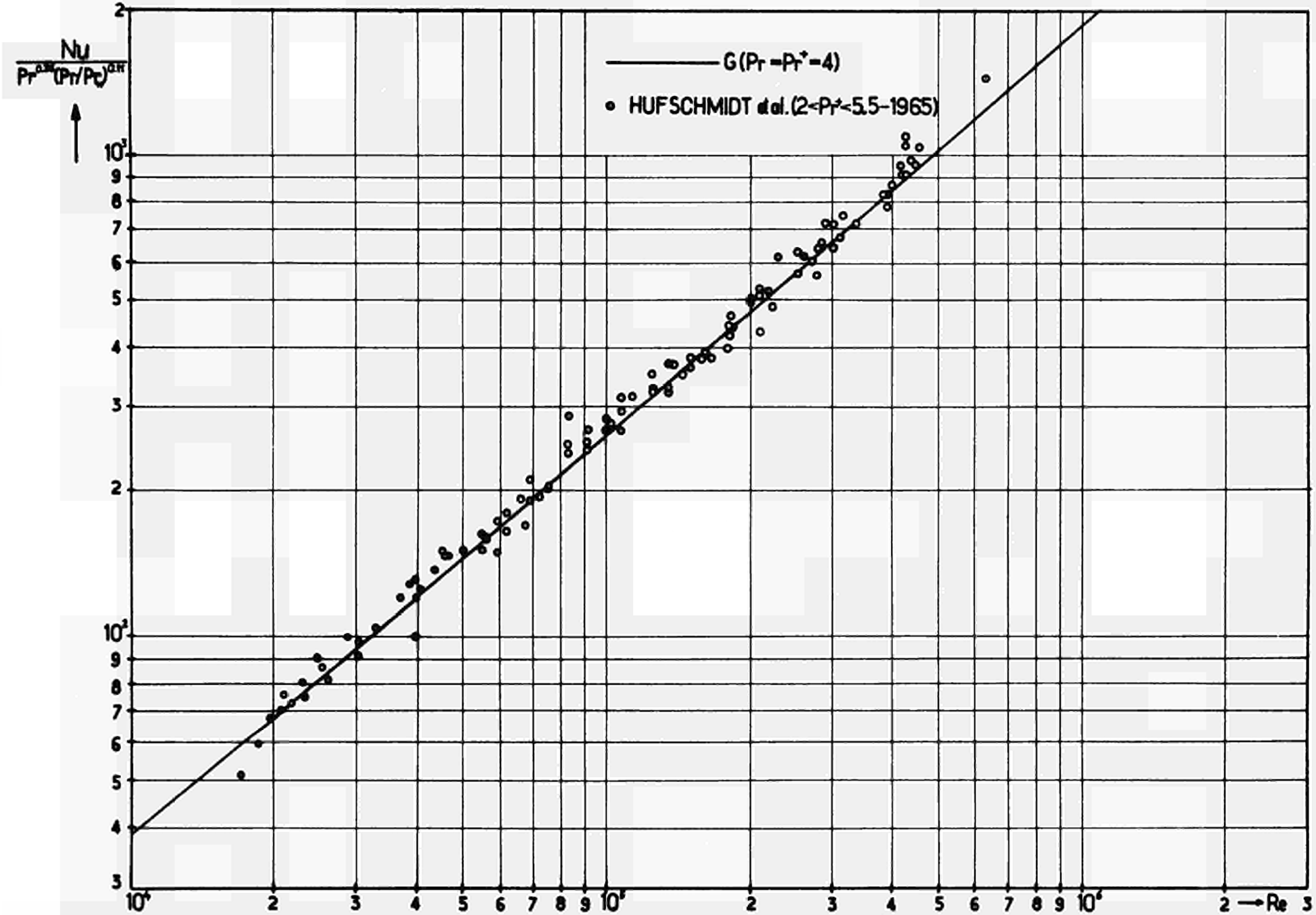


ABB.58. Vergleich der für die turbulente Rohrströmung (q_w=konst.- Pr^+=Pr=4) berechneten (G) und an Wasser von W.HUFSCHMIDT et al. experimentell ermittelten Nusselt-Zahlen in der Darstellung $NuPr^{-0.36}(Pr/Pr_w)^{-0.11}=f(Re)$

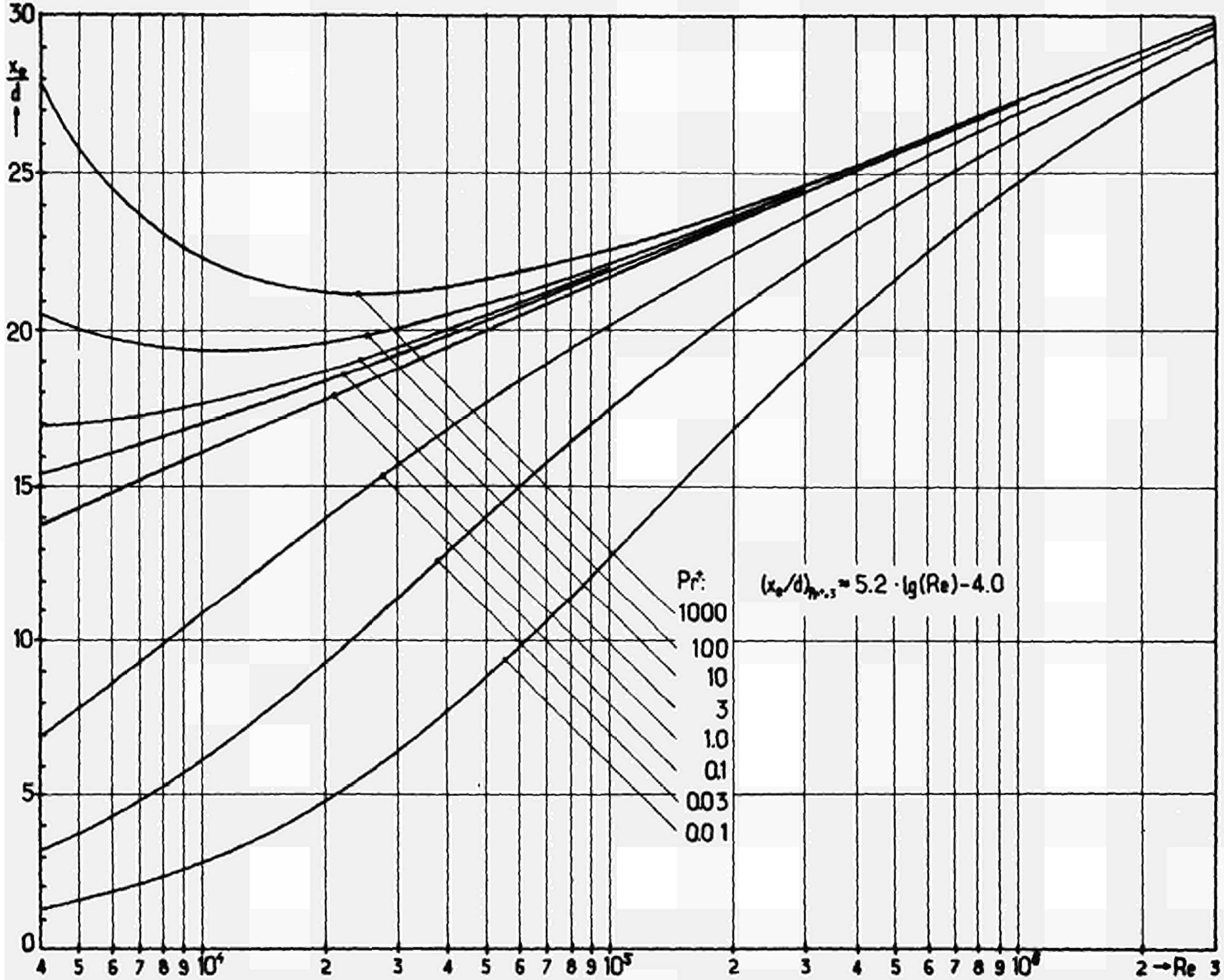


ABB.59. Thermische Einlauflänge $x_e/d=f(Re,Pr^+)$ bei der turbulenten Rohrströmung für q_w=konst.

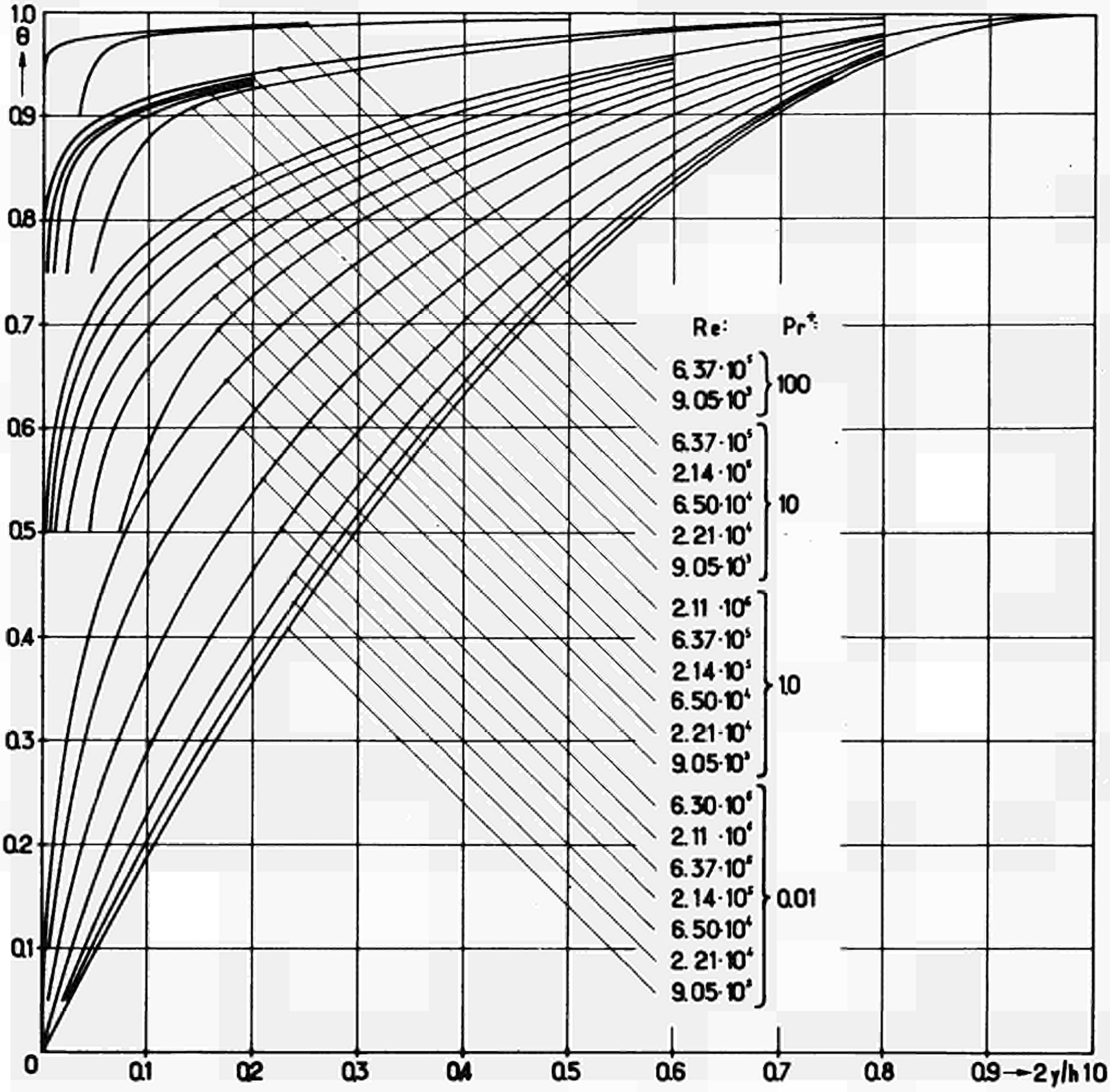


ABB.60. Temperaturverlauf $\Theta=f(2y/h,Re,Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

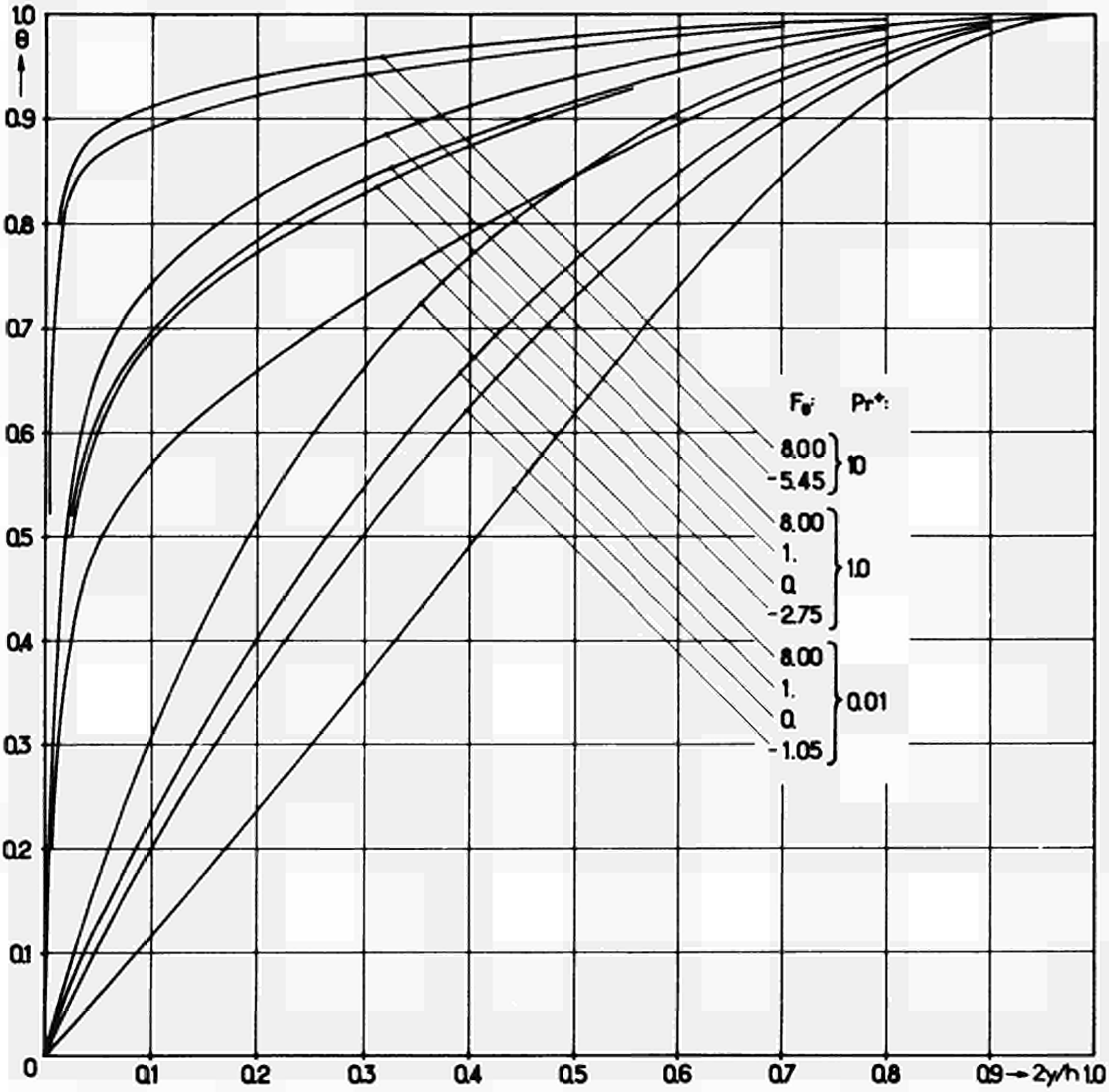


ABB.61. Temperaturverlauf $\Theta = f(2y/h, Pr^+, F_0)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst. und $Re=6{,}50\cdot10^4$

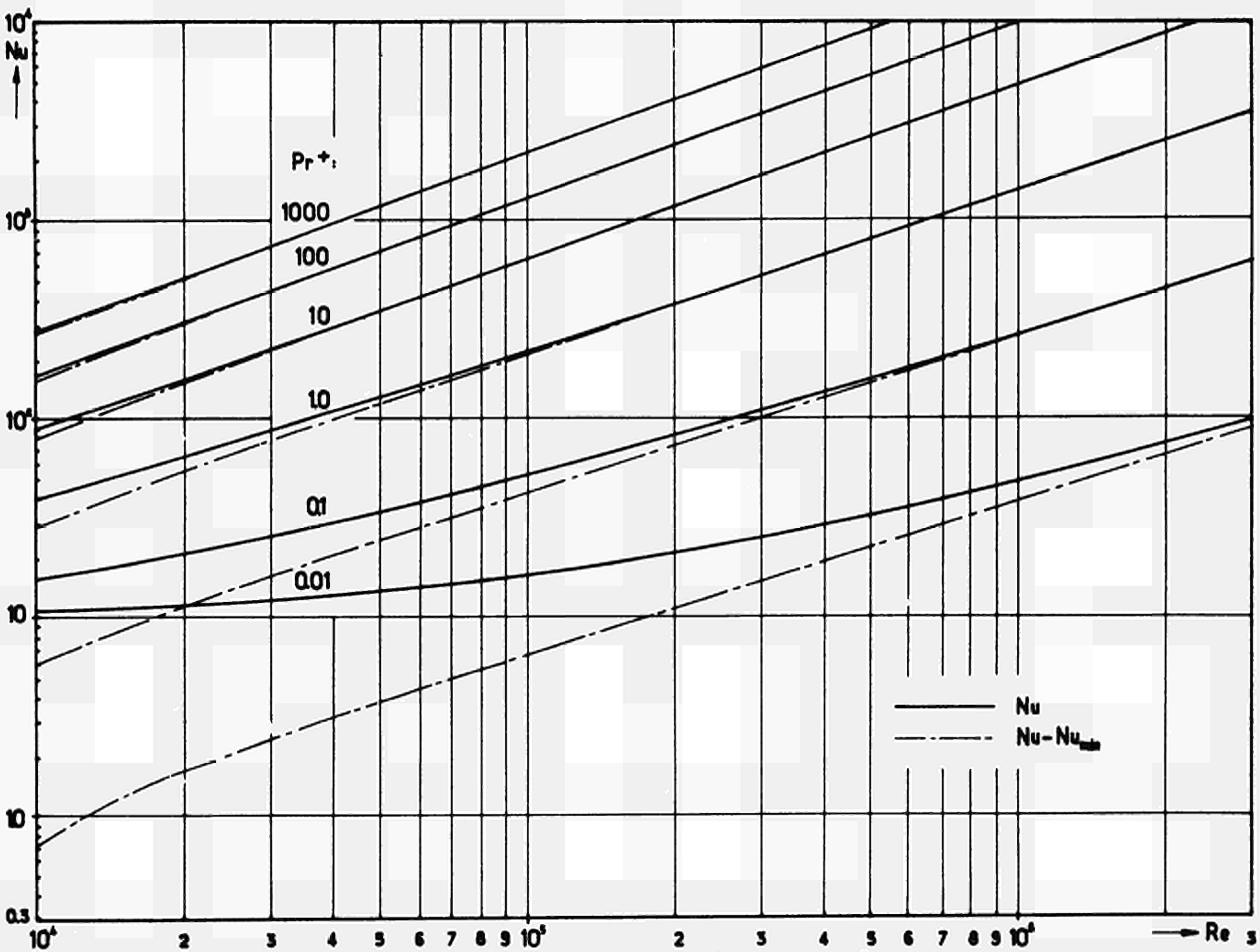


ABB.62. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Re,Pr^+)$ und $Nu-Nu_{min}=Nu-Nu(Pr^+=0,Re_T=4\cdot 10^3)=f_2(Re,Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

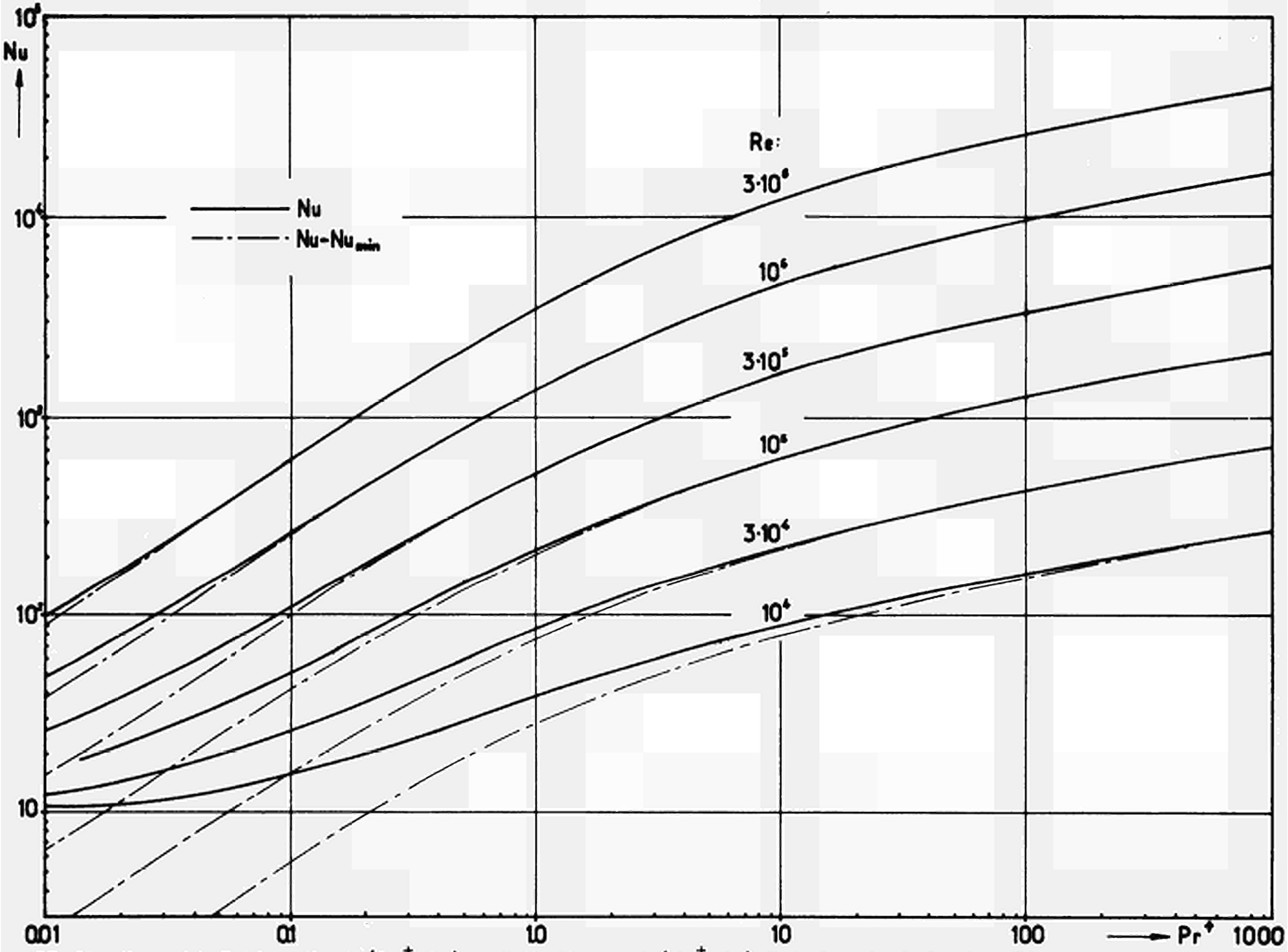


ABB.63. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Pr^+,Re)$ und $Nu-Nu_{min}=f_2(Pr^+,Re)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

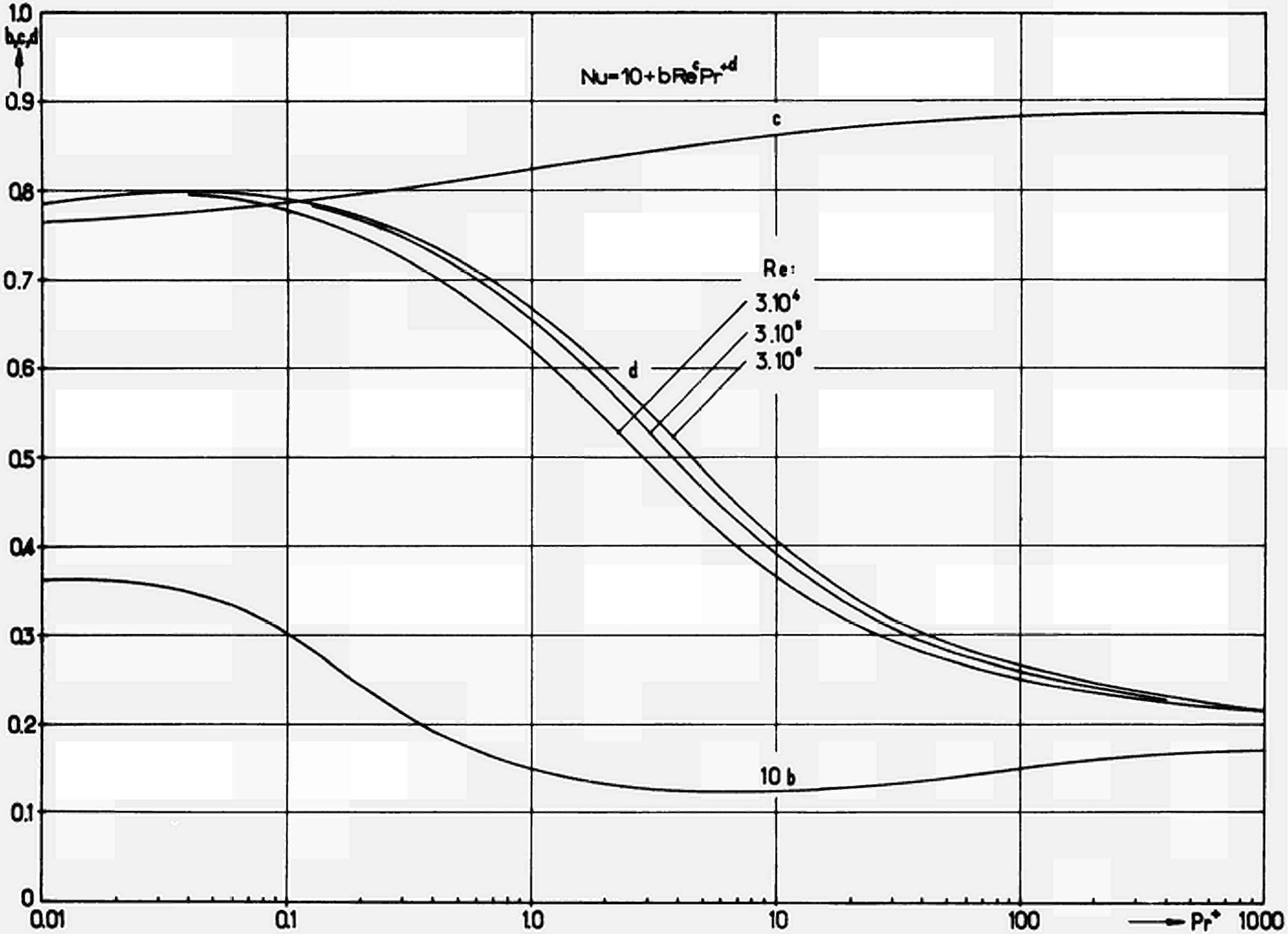


ABB.64. Koeffizienten $b=f_1(Pr^+)$, $c=f_2(Pr^+)$ und $d=f_3(Pr^+,Re)$ der Beziehung $Nu=10+bRe^c Pr^{+d}$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

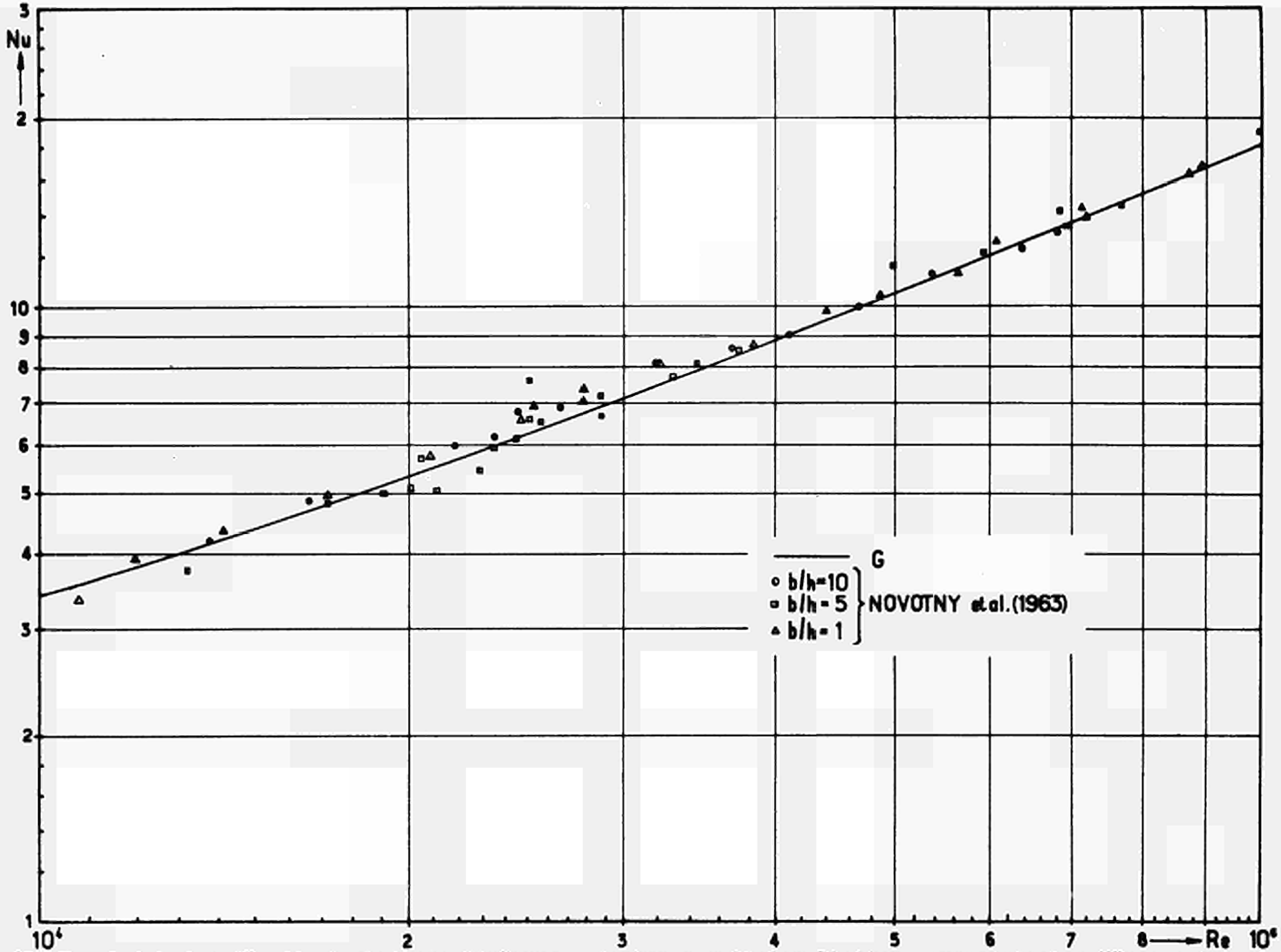


ABB.65. Vergleich der für die turbulente Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_W=konst. und $Pr=Pr^{+}=0{,}72$ berechneten (G) und von J.L.Novotny et al./58/ an Luft experimentell ermittelten Nusselt-Zahlen Nu=f(Re). (b/h gibt das Seitenverhältnis des Rechteckquerschnitts an, h ist unbeheizt.)

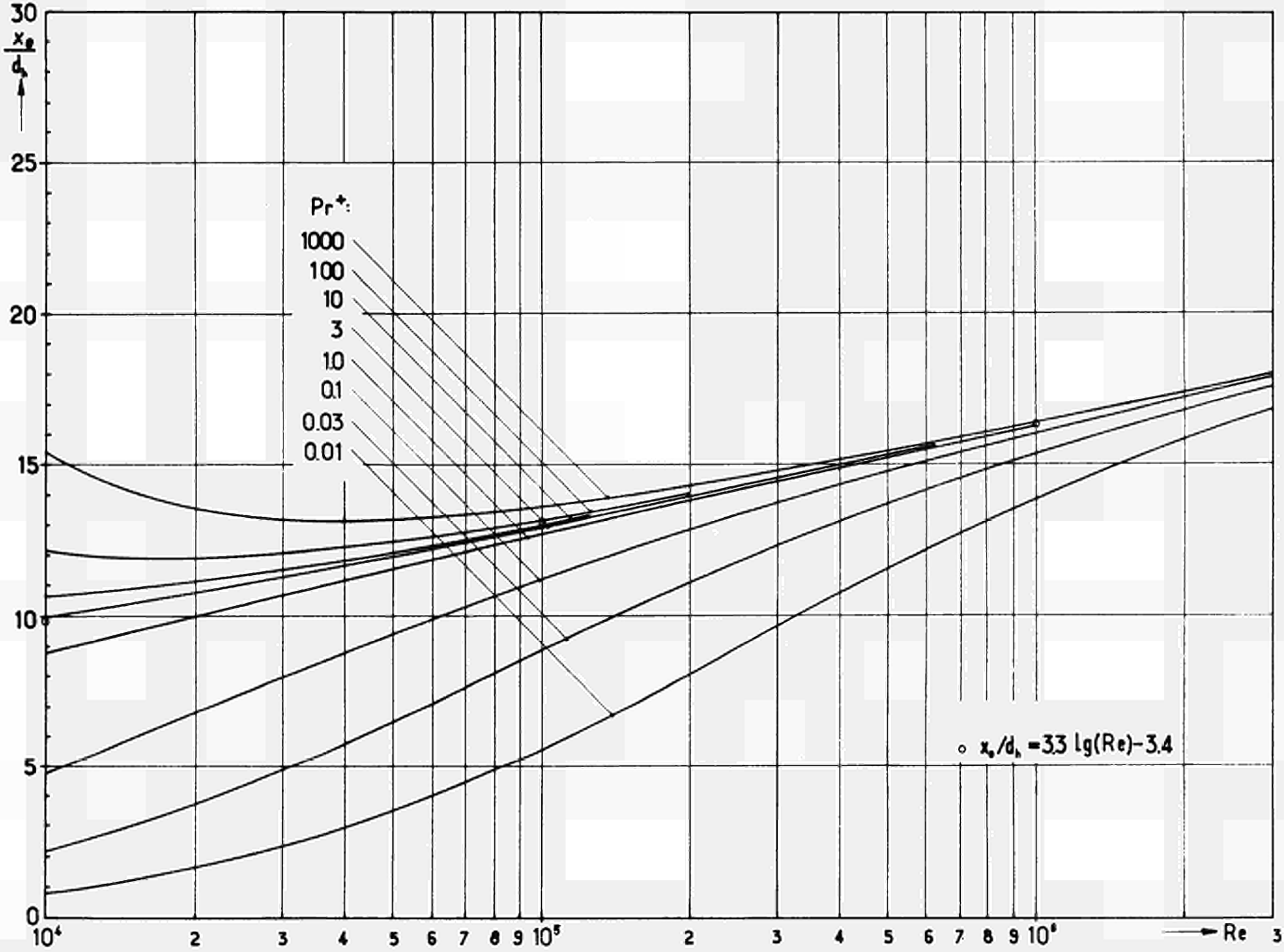


ABB.66. Thermische Einlauflänge $x_e/d_h = f(Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, symmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

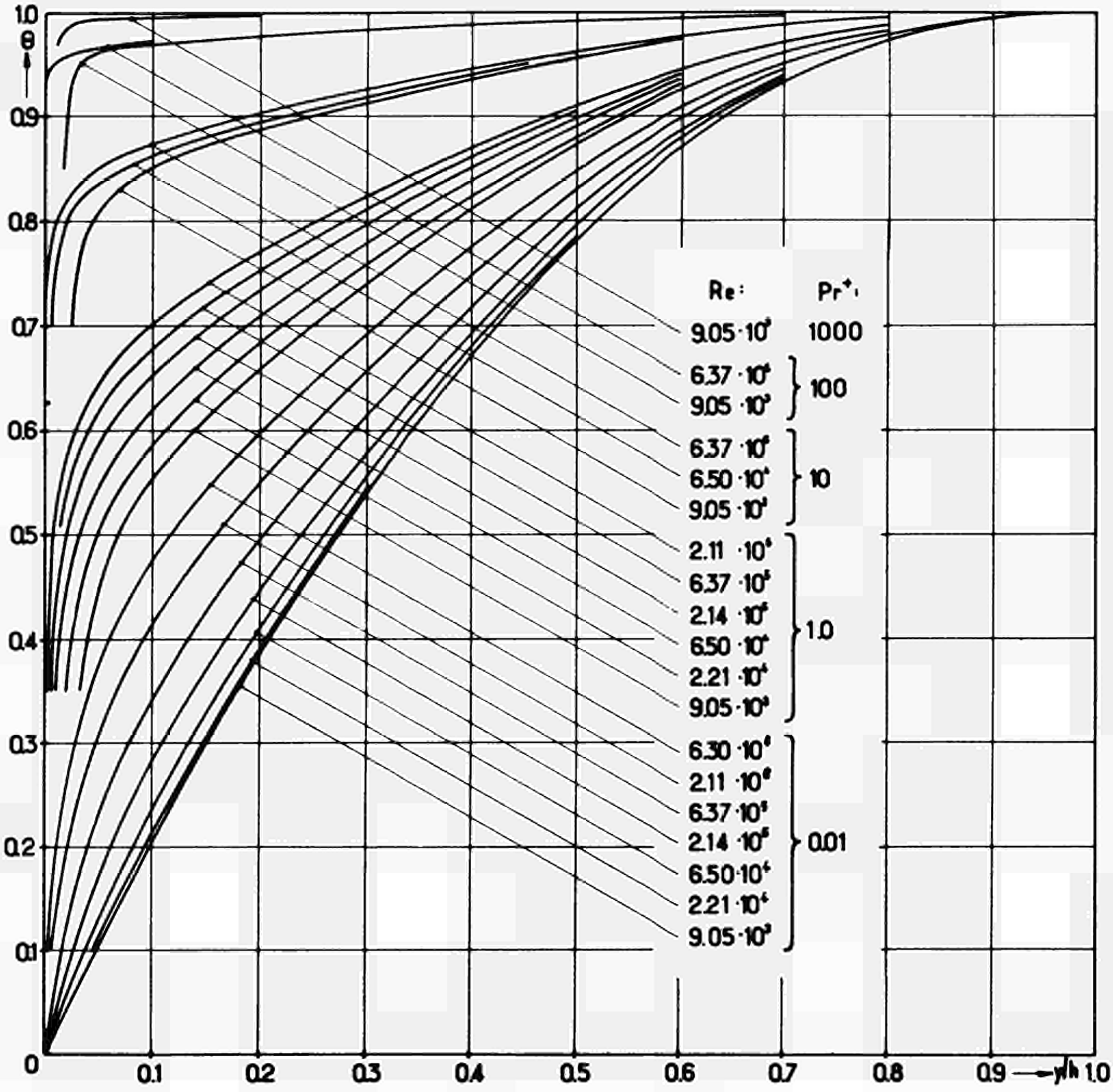


ABB.67. Temperaturverlauf $\Theta = f(y/h, Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

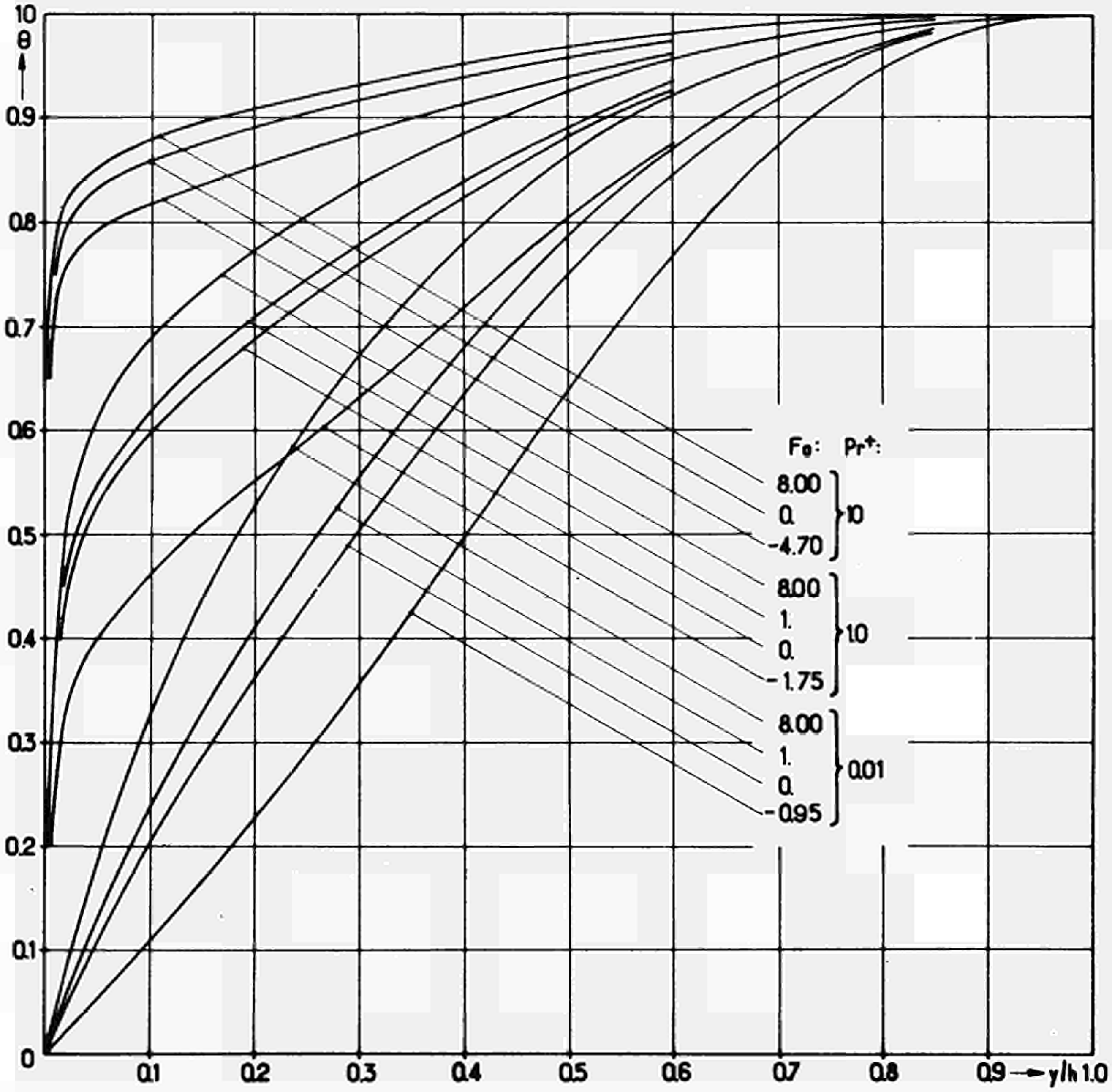


ABB.68. Temperaturverlauf $\Theta = f(y/h, Pr^{+}, F_{o})$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst. und $Re = 6{,}50 \cdot 10^4$

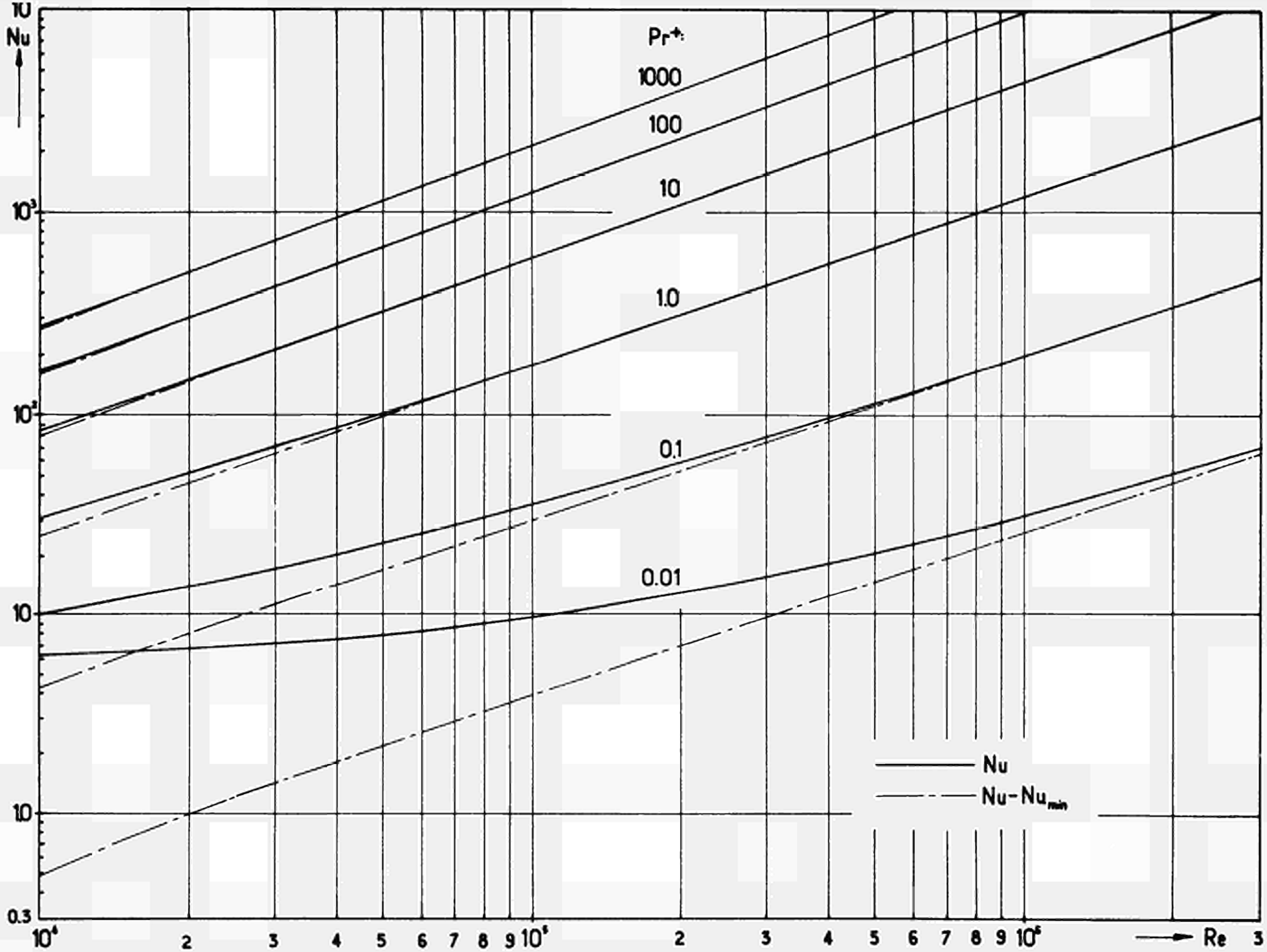


ABB.69. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Re,Pr^+)$ und $Nu-Nu_{min}=Nu-Nu(Pr^+=0,Re_T=4\cdot10^3)=f_2(Re,Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

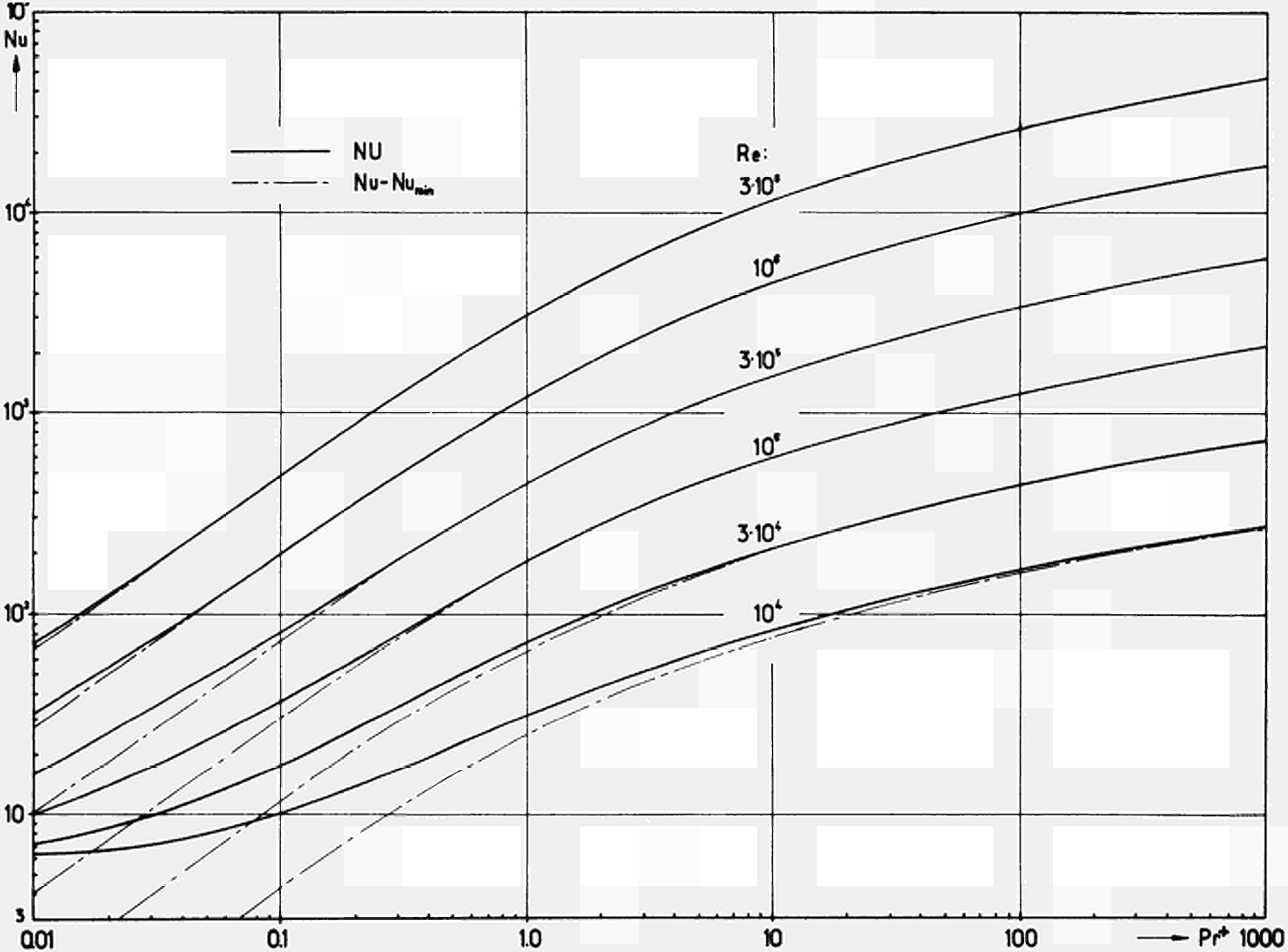


ABB.70. Nusselt-Zahlen $Nu=f_1(Pr^+,Re)$ und $Nu-Nu_{min}=f_2(Pr^+,Re)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

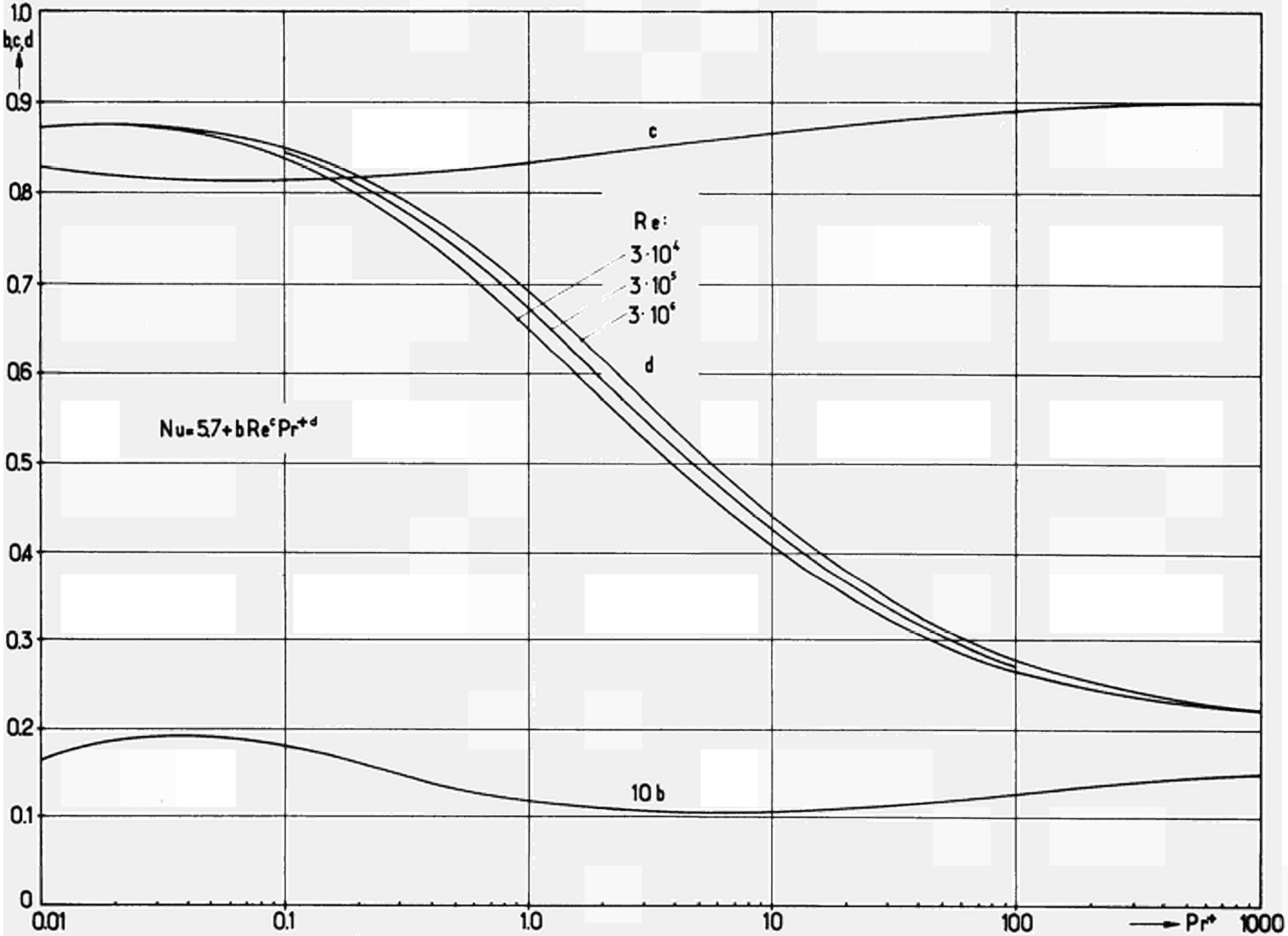


ABB.71 Koeffizienten $b=f_1(Pr^+)$, $c=f_2(Pr^+)$ und $d=f_3(Pr^+,Re)$ der Beziehung $Nu=5,7+bRe^cPr^{+d}$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

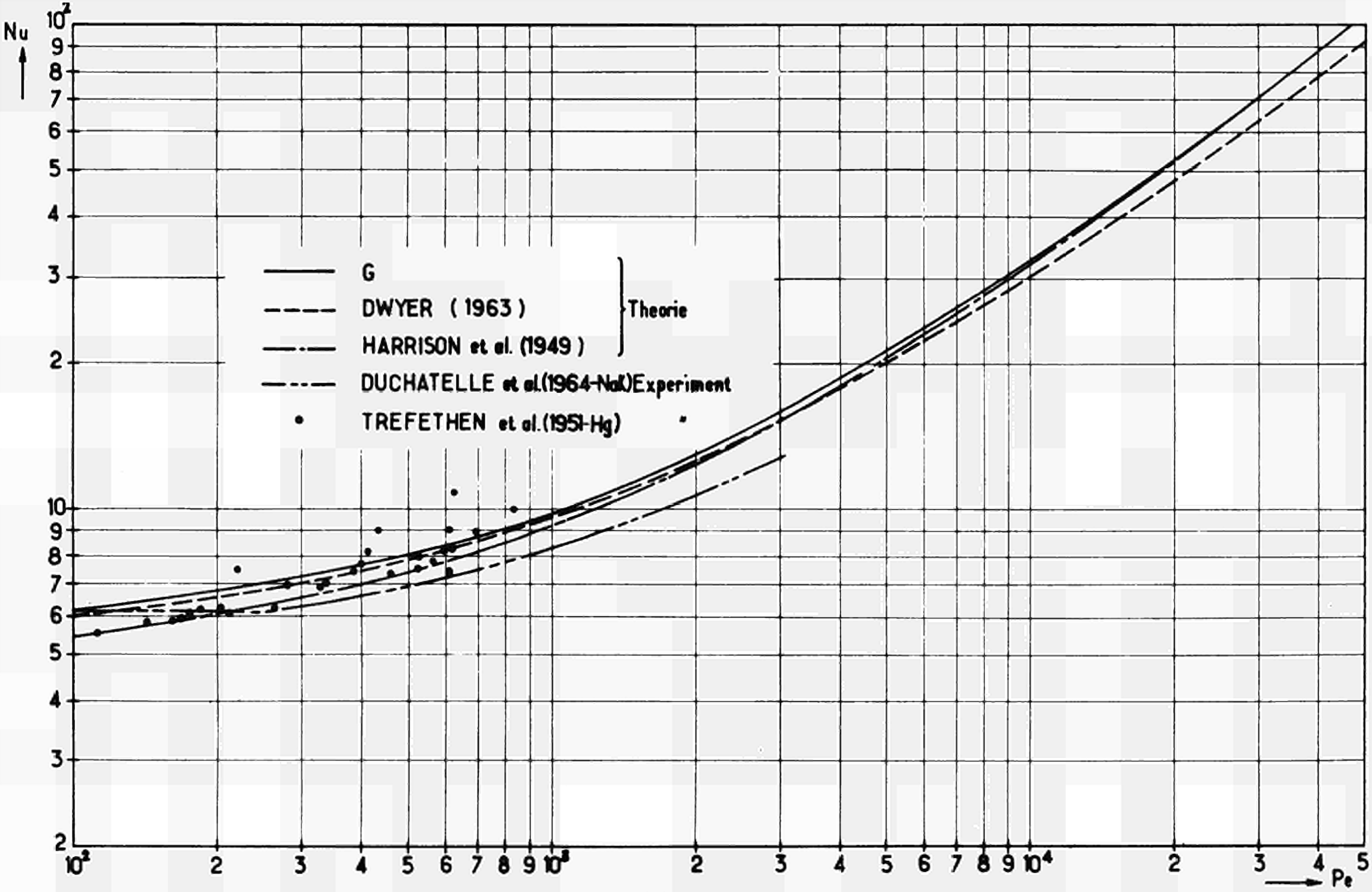


ABB.72. Vergleich der in der vorliegenden Arbeit (G) für die turbulente Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst. und $Pr^+=Pr=0,01$ berechneten Nusselt-Zahlen Nu=f(Pe) mit theoretischen und an Flüssigmetallen experimentell ermittelten Ergebnissen anderer Autoren

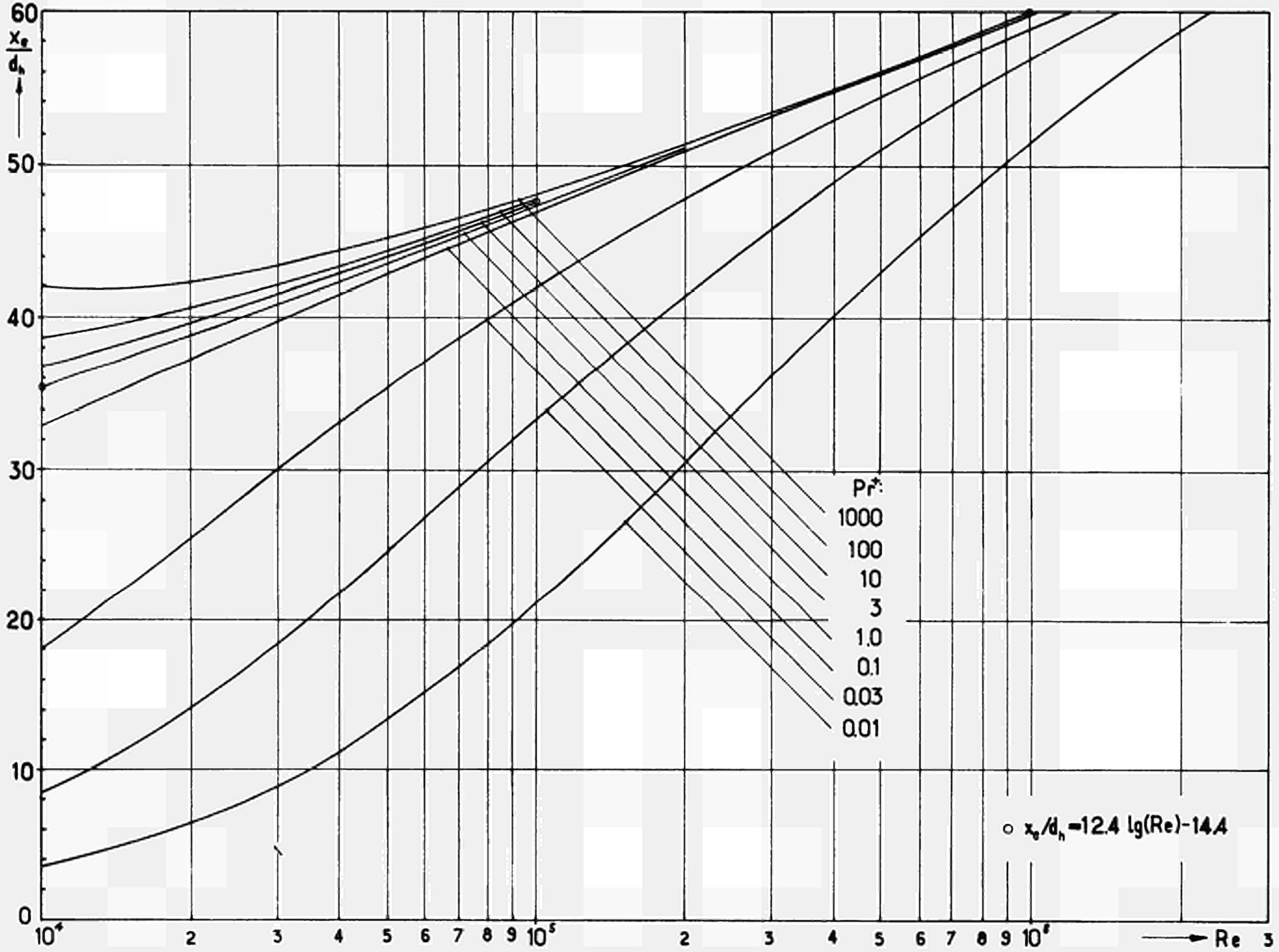


ABB.73. Thermische Einlauflänge $x_e/d_h = f(Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung zwischen parallelen Platten, asymmetrischer Wärmeaustausch, für q_w=konst.

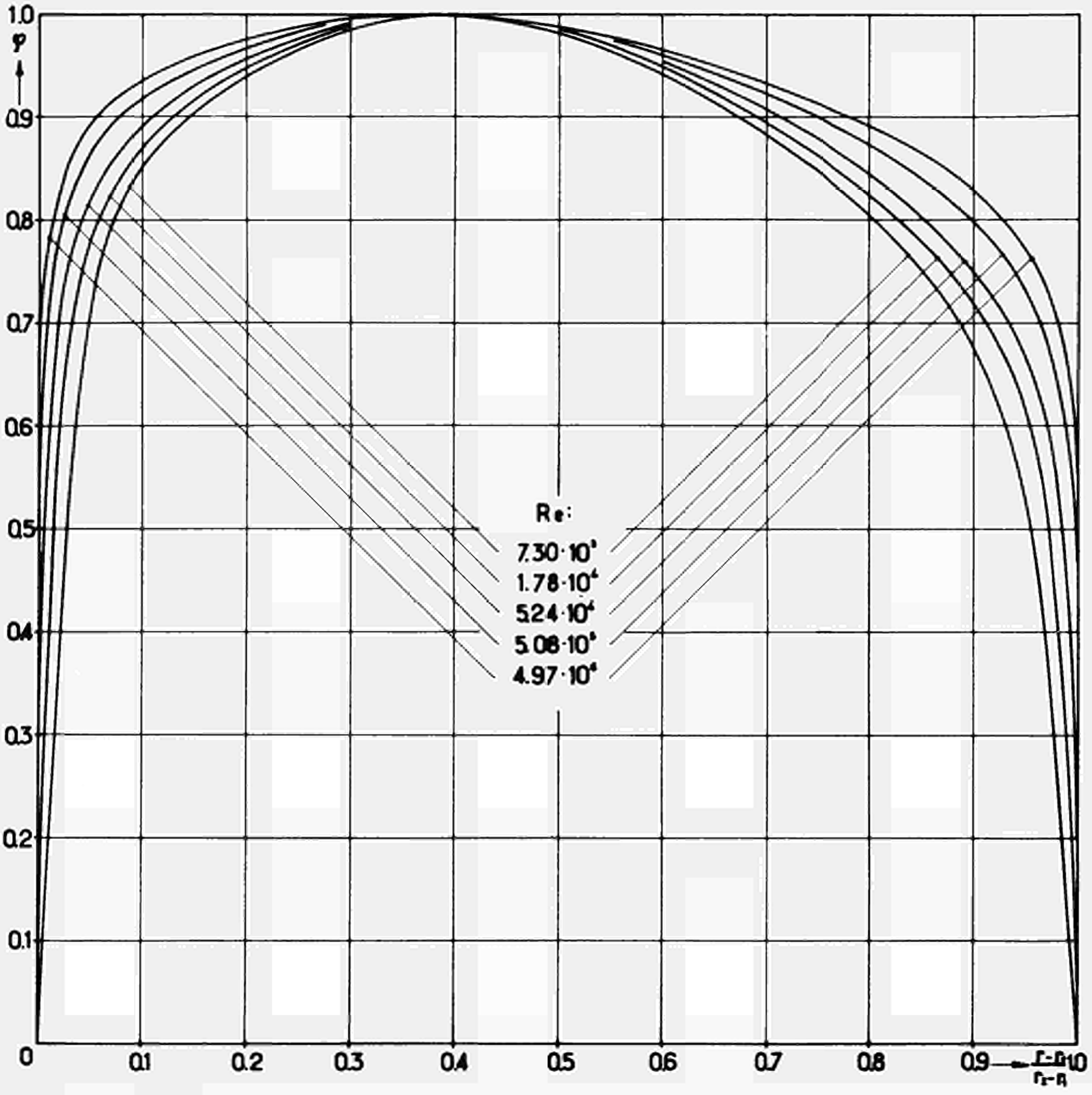


ABB.74. Geschwindigkeitsverlauf $\varphi = f((r-r_1)/(r_2-r_1), Re)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für $r_1/r_2 = 0{,}2$

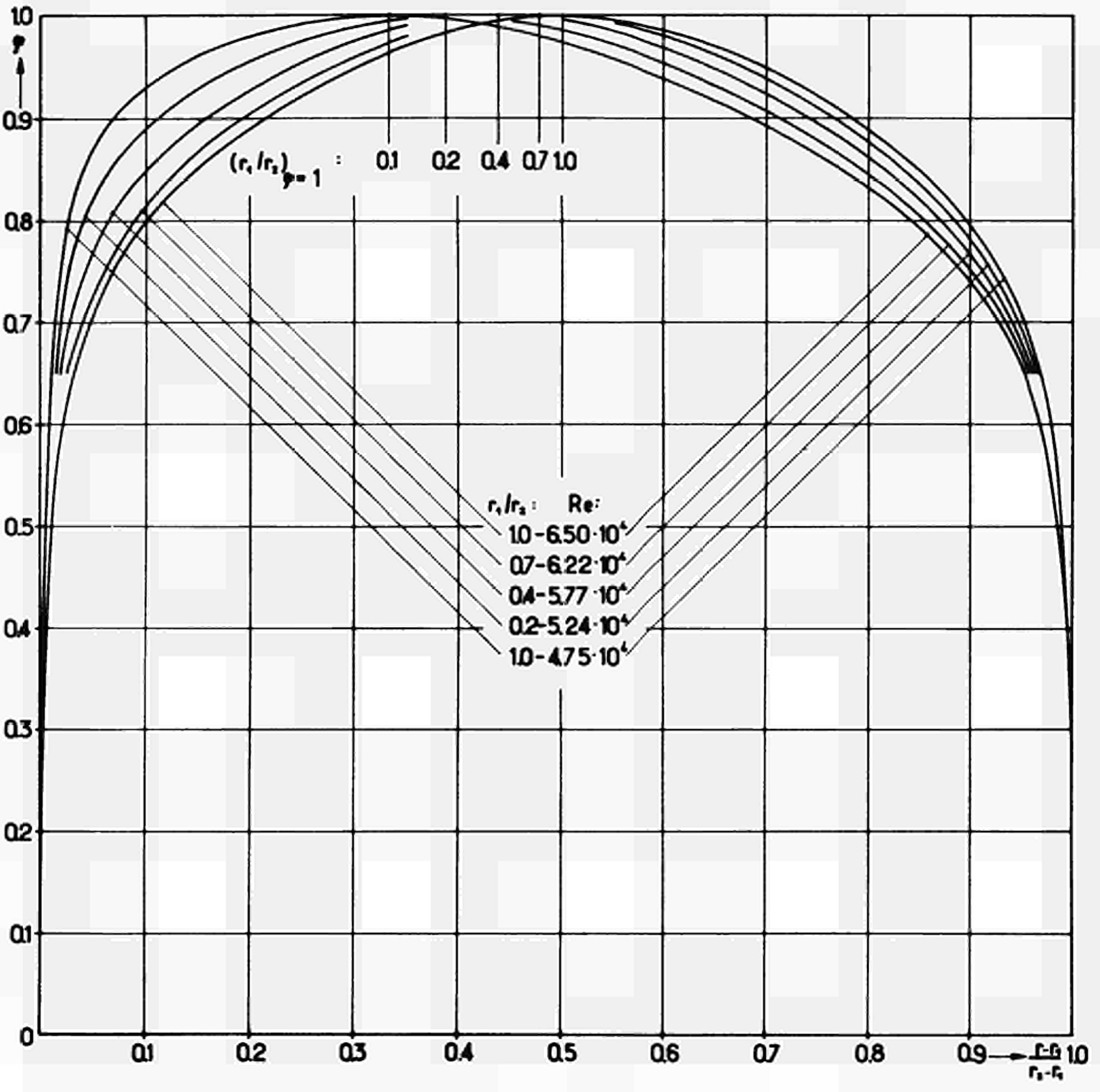


ABB.75. Geschwindigkeitsverteilung $\varphi = f((r-r_1)/(r_2-r_1), r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für $Re_T = 3 \cdot 10^4$

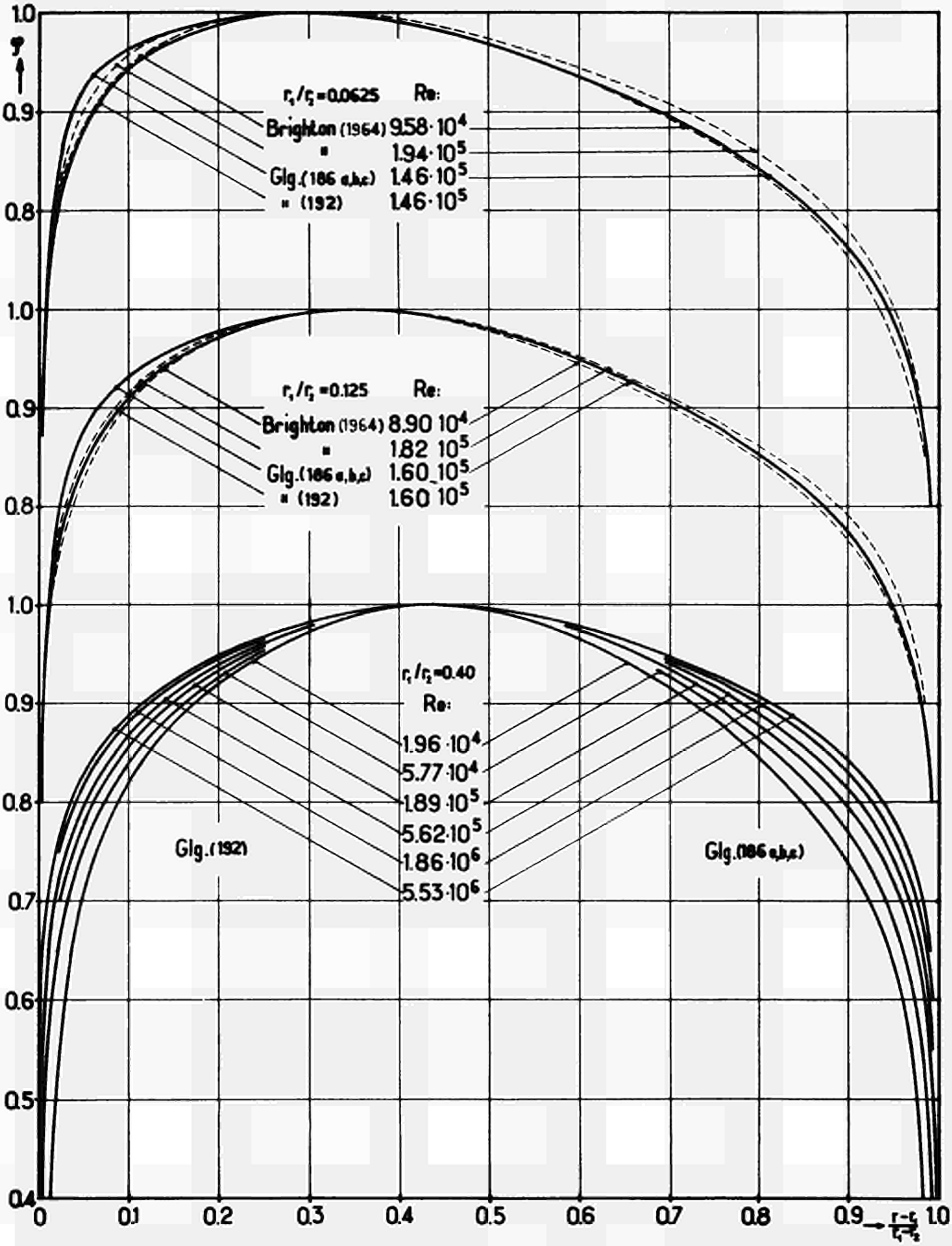


ABB.76. Vergleich der für die turbulente Strömung im Ringspalt mit Hilfe der Gleichungen (186a,b,c) bzw. (192) berechneten und an Luft von J.A.BRIGHTON et al./25/ experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen $\varphi=f((r-r_1)/(r_2-r_1),Re,r_1/r_2)$

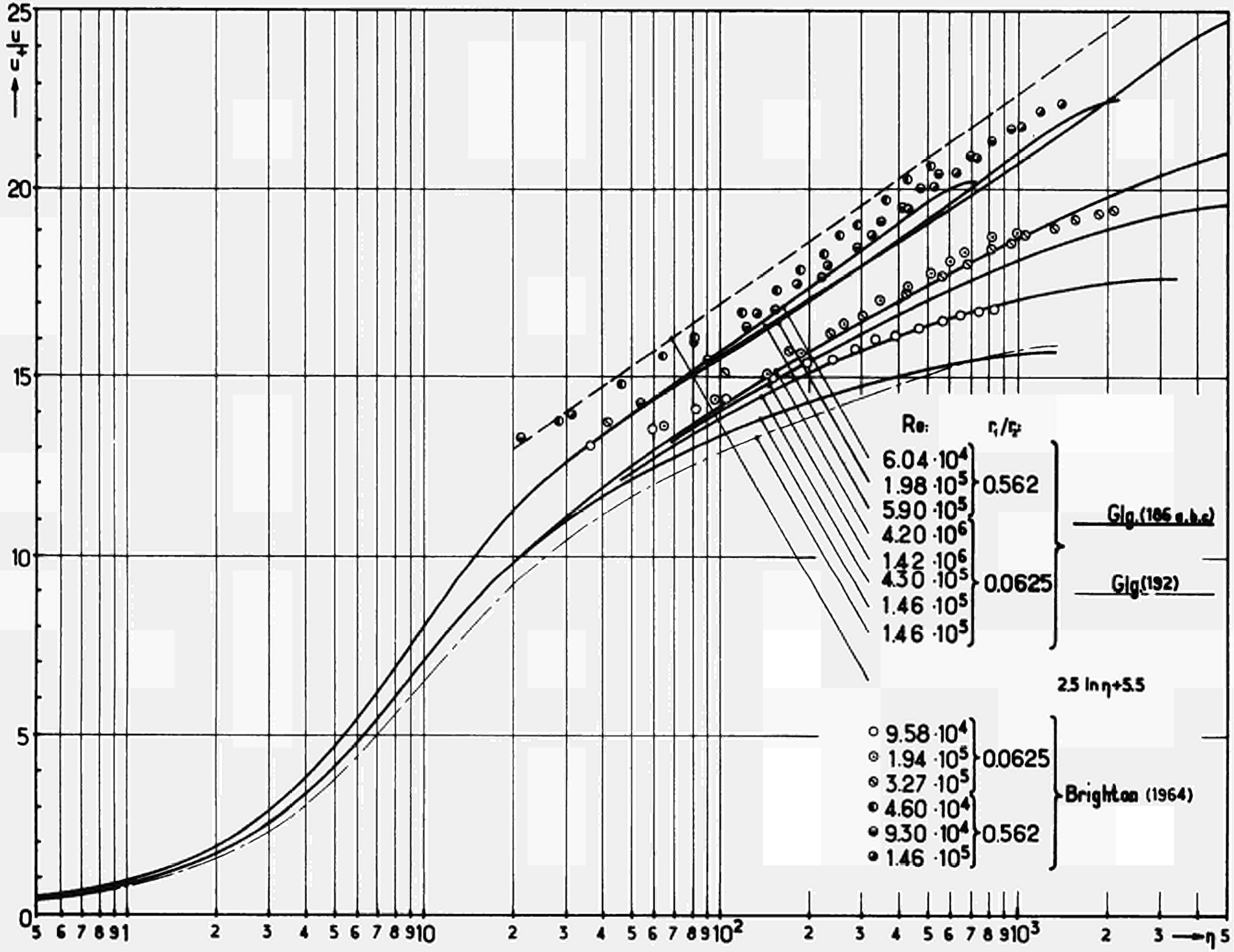


ABB.77. Vergleich der für die turbulente Strömung im Ringspalt mit Hilfe der Gleichungen (186a,b,c) bzw.(192) berechneten und an Luft von J.A.BRIGHTON et al./25/ experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen $u/u^+=f(\eta, Re, r_i/r_a)$

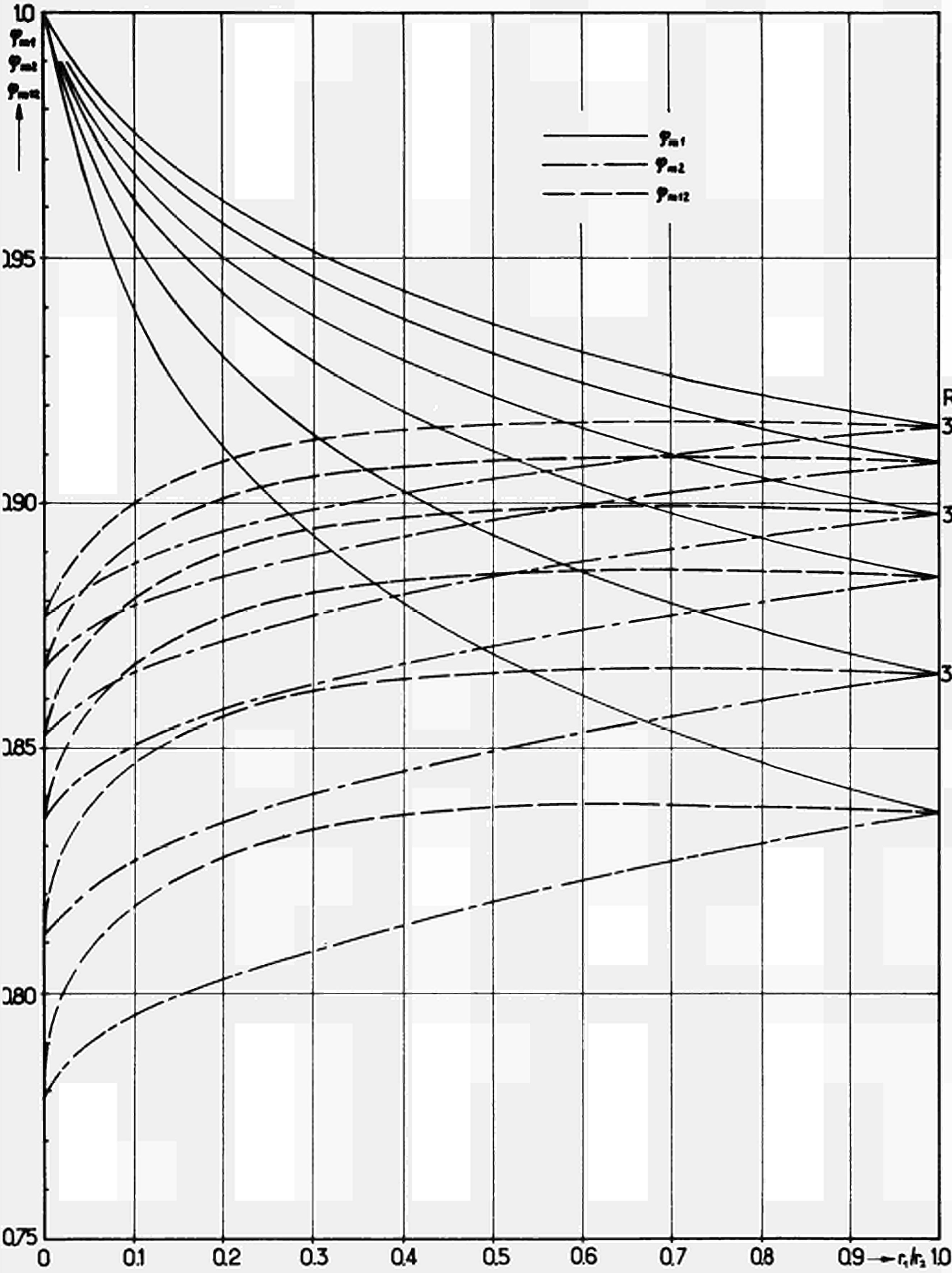


ABB.78. Mittlere Geschwindigkeiten φ_{m1}, φ_{m2} und φ_{m12} bei der turbulenten Strömung im Ringspalt in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 und von der Reynolds-Zahl

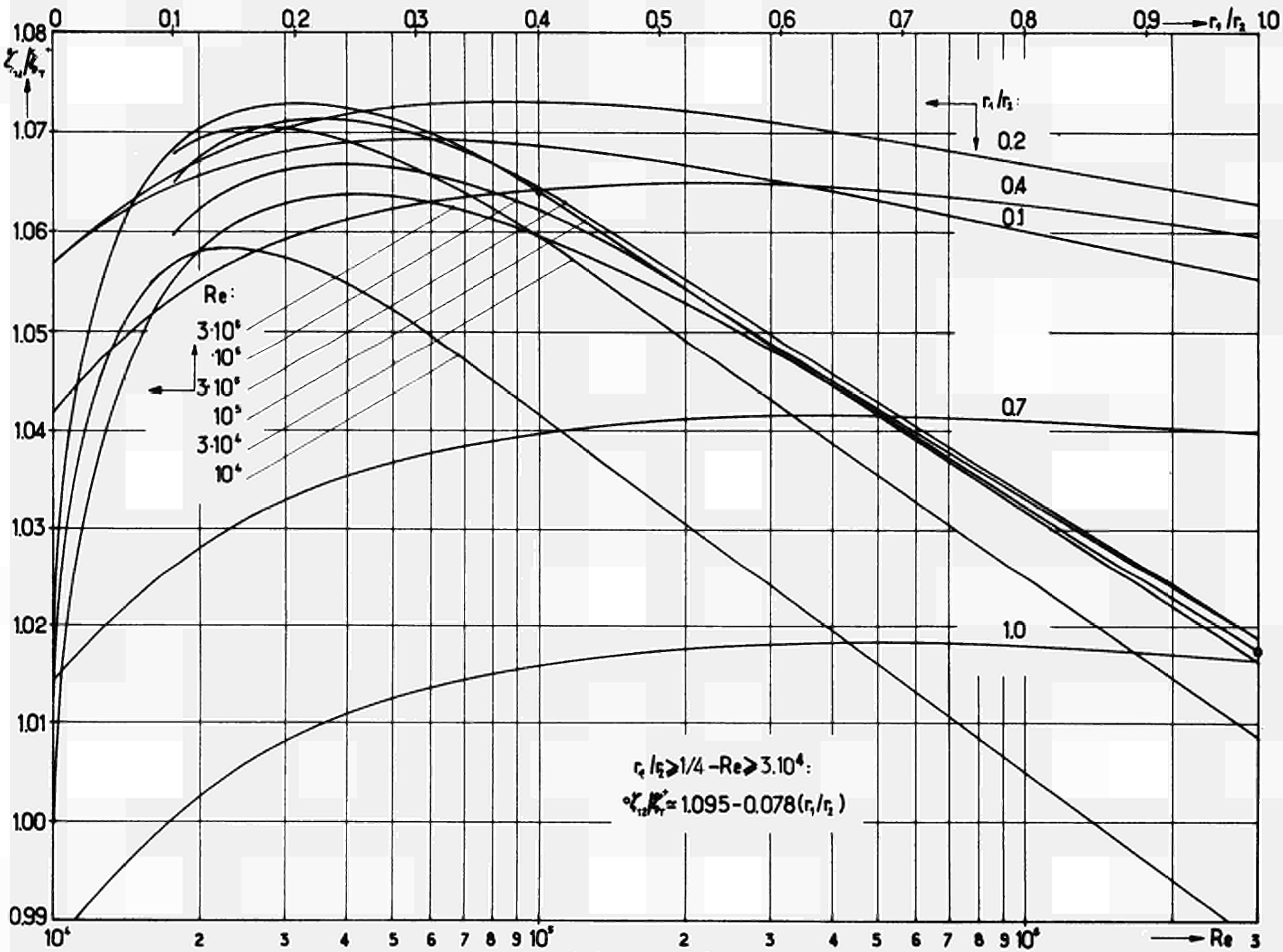


ABB.79. Verhältnis der Widerstandsbeiwerte $\zeta_{12}/\zeta_T^* = f(Re, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt

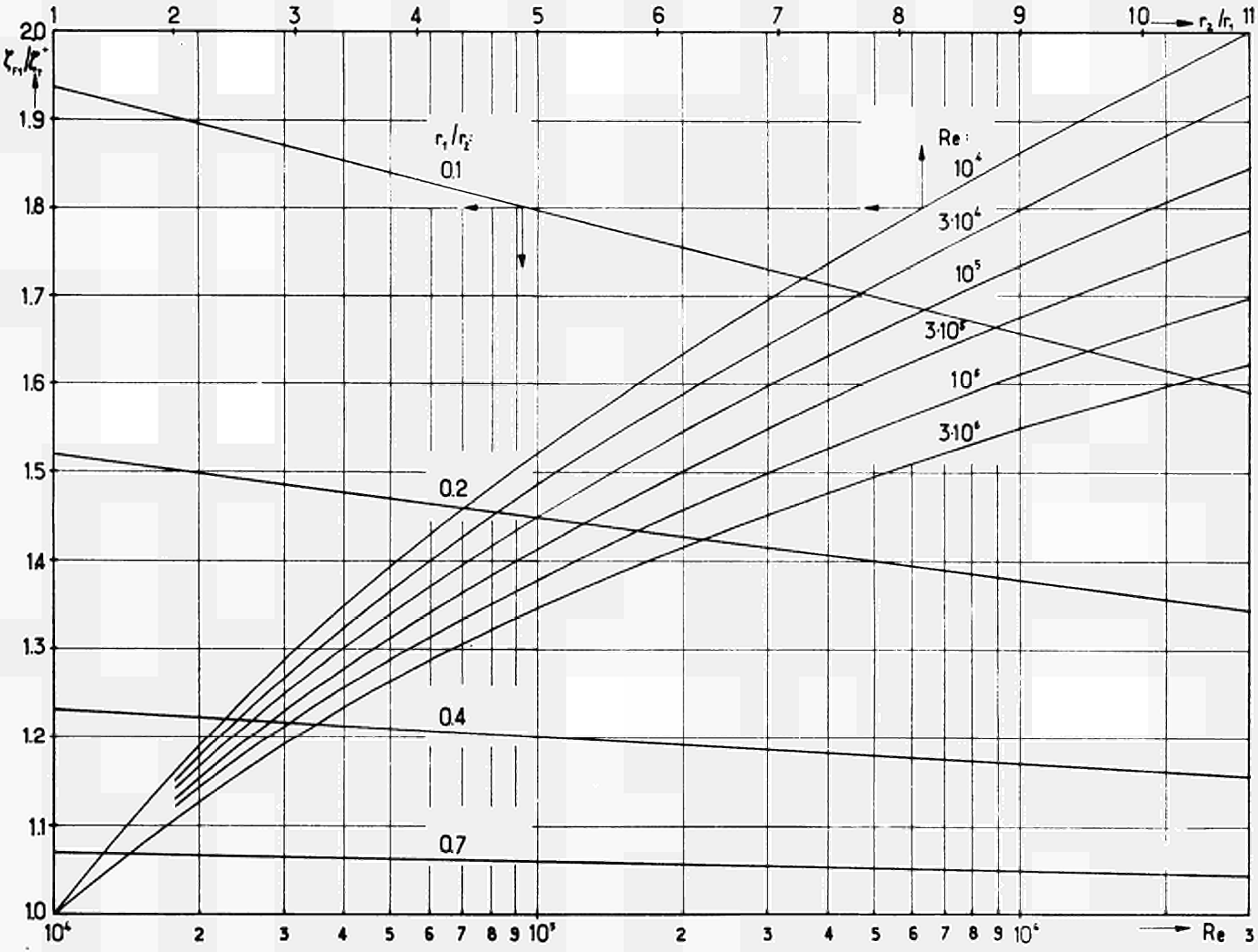


ABB.80. Fiktiver Widerstandsbeiwert $\zeta_{F1}/\zeta_T^+ = f(Re, r_1/r_2)$ zur angenäherten Wiedergabe der Nusselt-Zahlen in der Form $Nu = RePr^+(\zeta_{F1}/8)/[1+10(Pr^+-0{,}58)(Pr^+)^{-0{,}22}\sqrt{\zeta_{F1}/8}]$

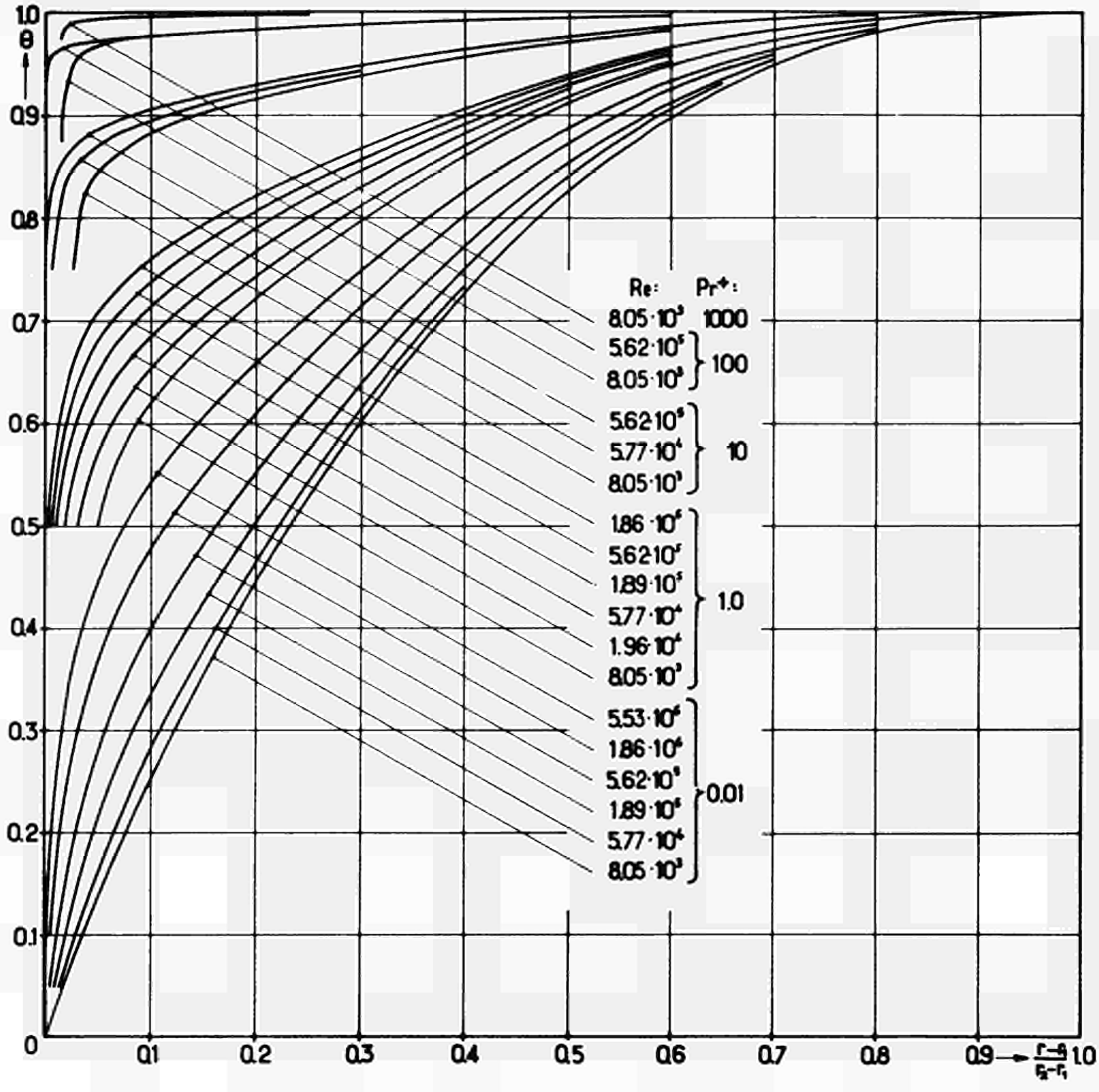


ABB.81. Temperaturverlauf $\Theta = f((r-r_1)/(r_2-r_1), Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst. und $r_1/r_2 = 0,40$

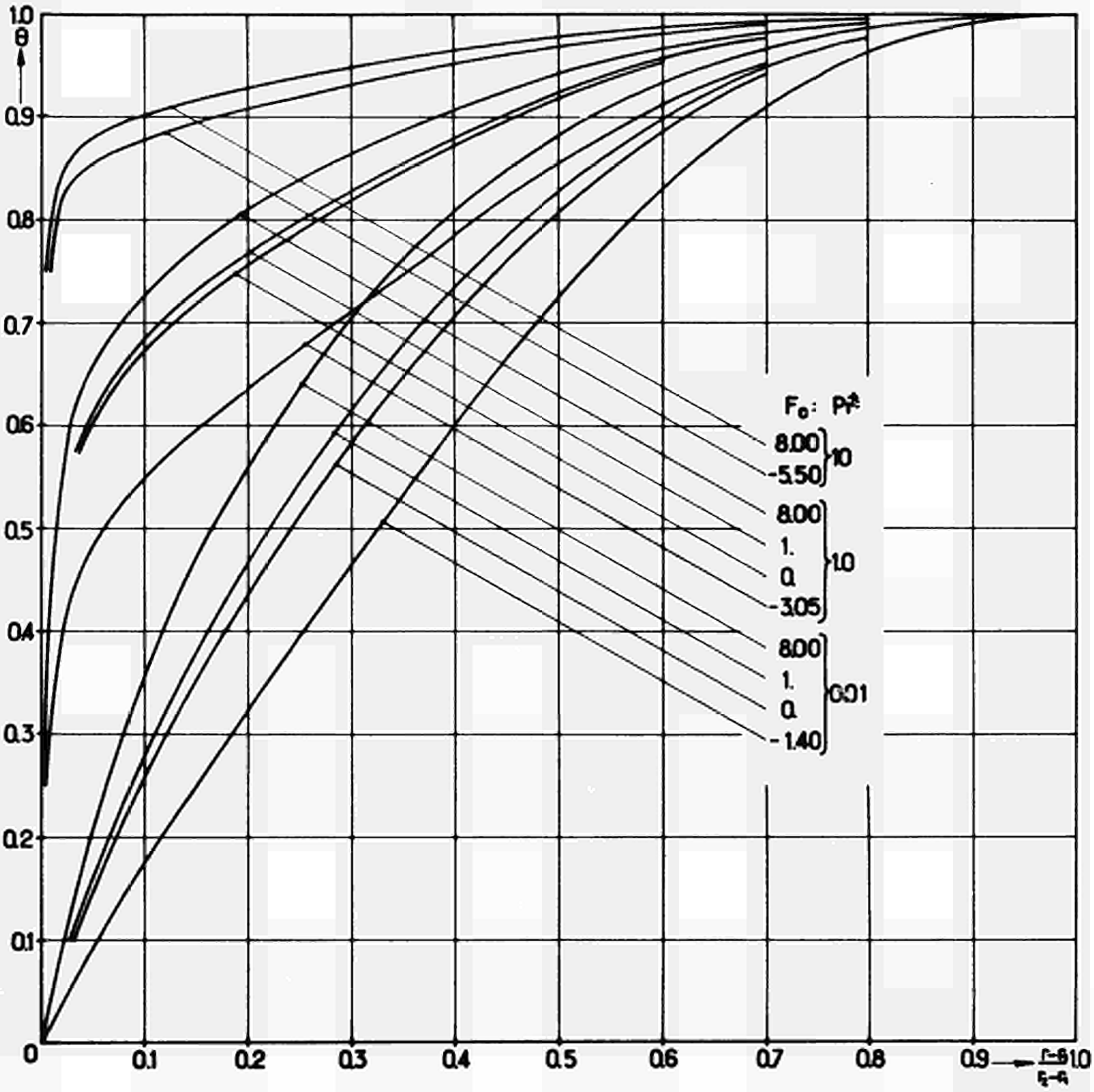


ABB.82. Temperaturverlauf $\Theta = f((r-r_1)/(r_2-r_1), Pr^+, F_o)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst., r_1/r_2=0,40 und Re=5,77·10^4

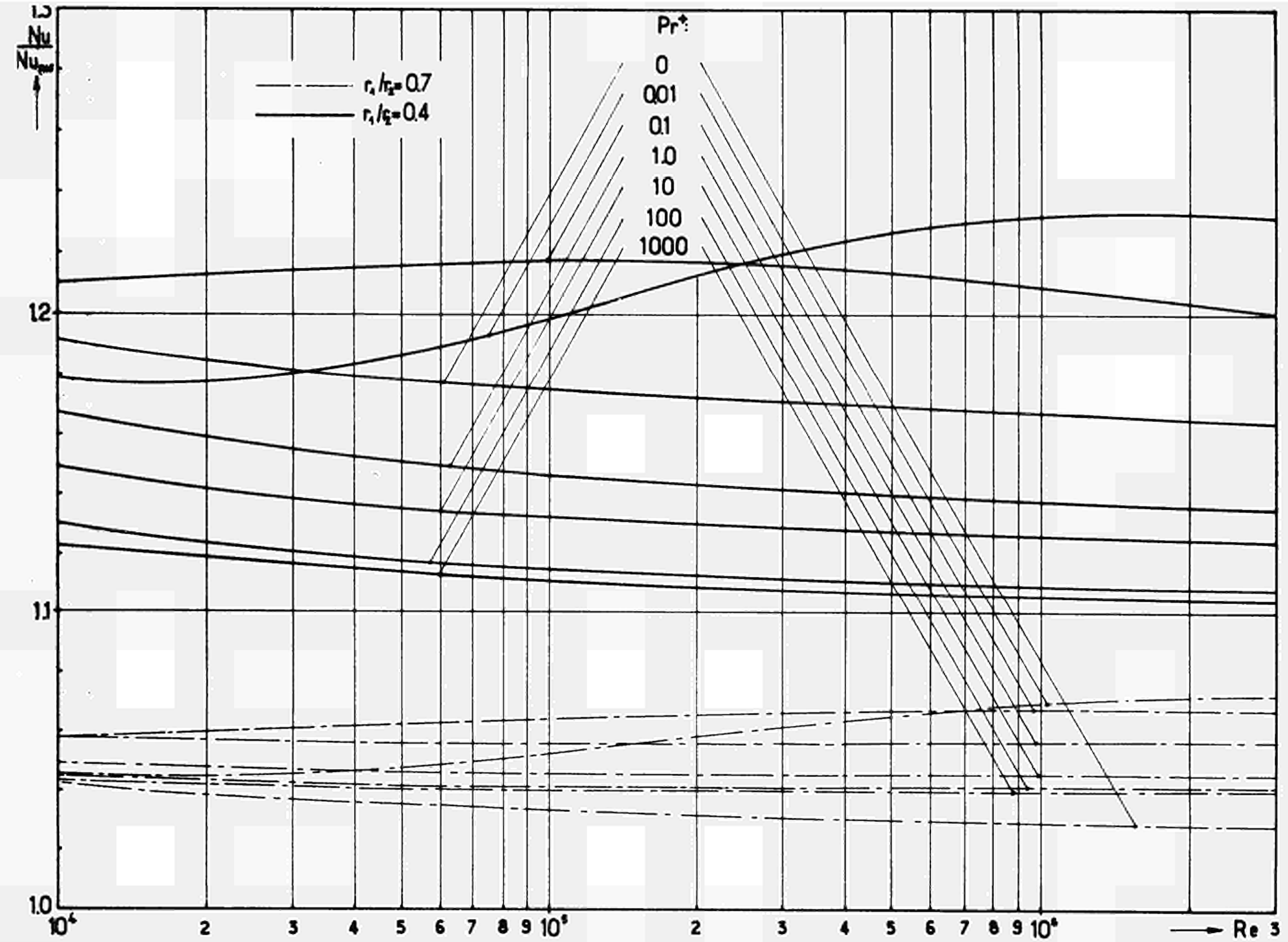


ABB.83. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(Re, Pr^{+}, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst.

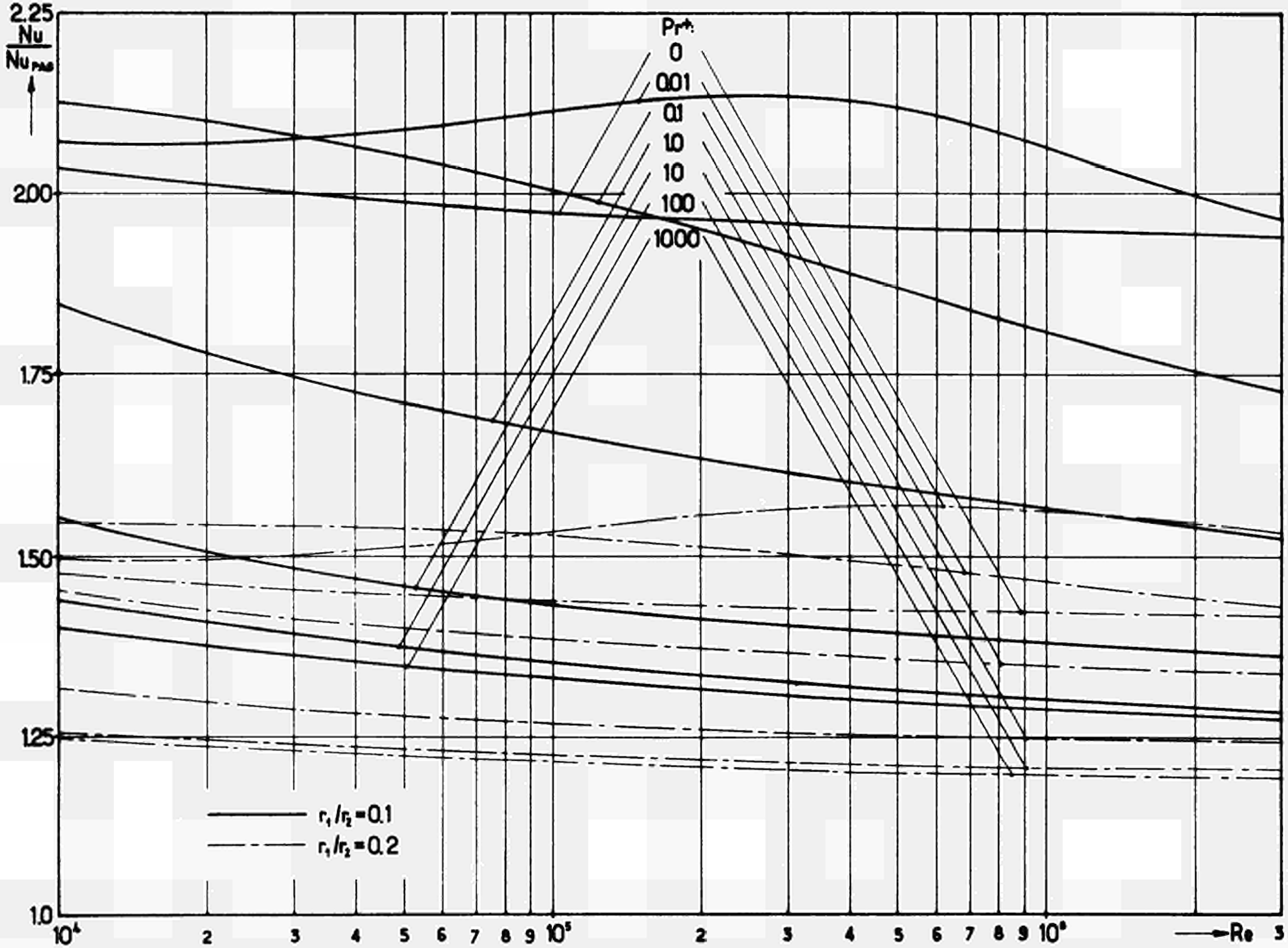


ABB.84. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(Re,Pr^+,r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst.

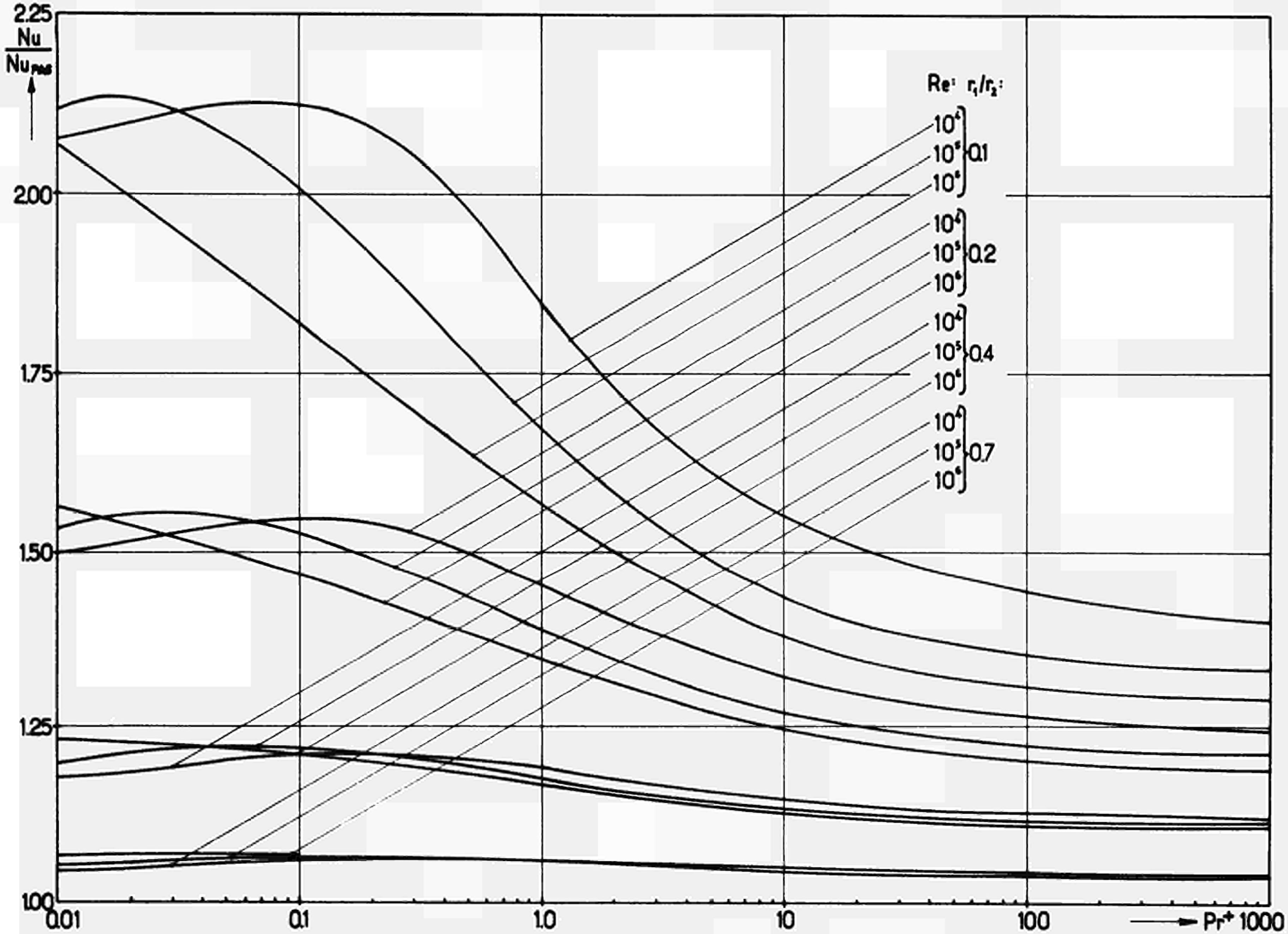


ABB.85. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(Pr^{+}, Re, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst.

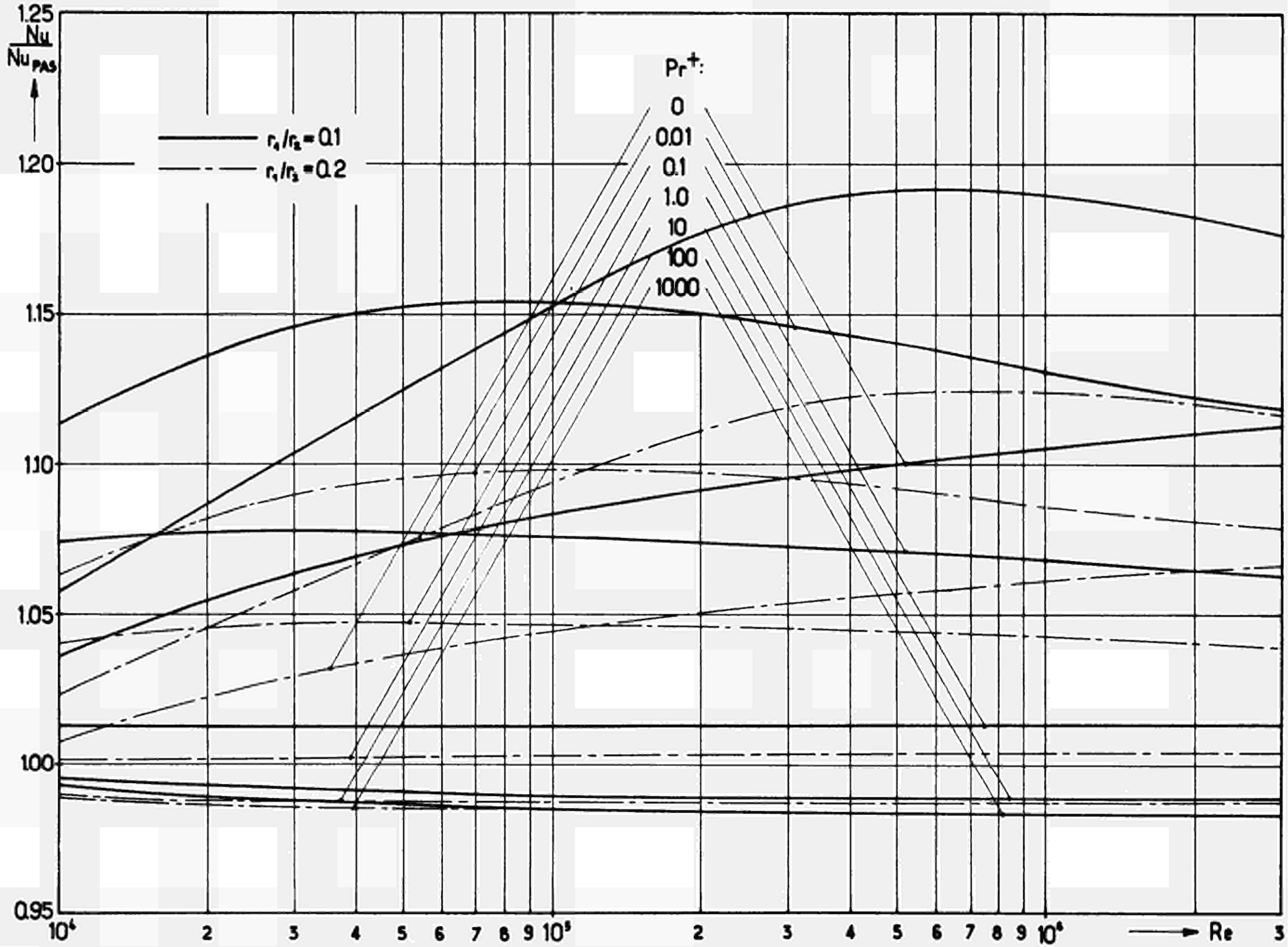


ABB.86. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(Re, Pr^{+}, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w2}=konst.

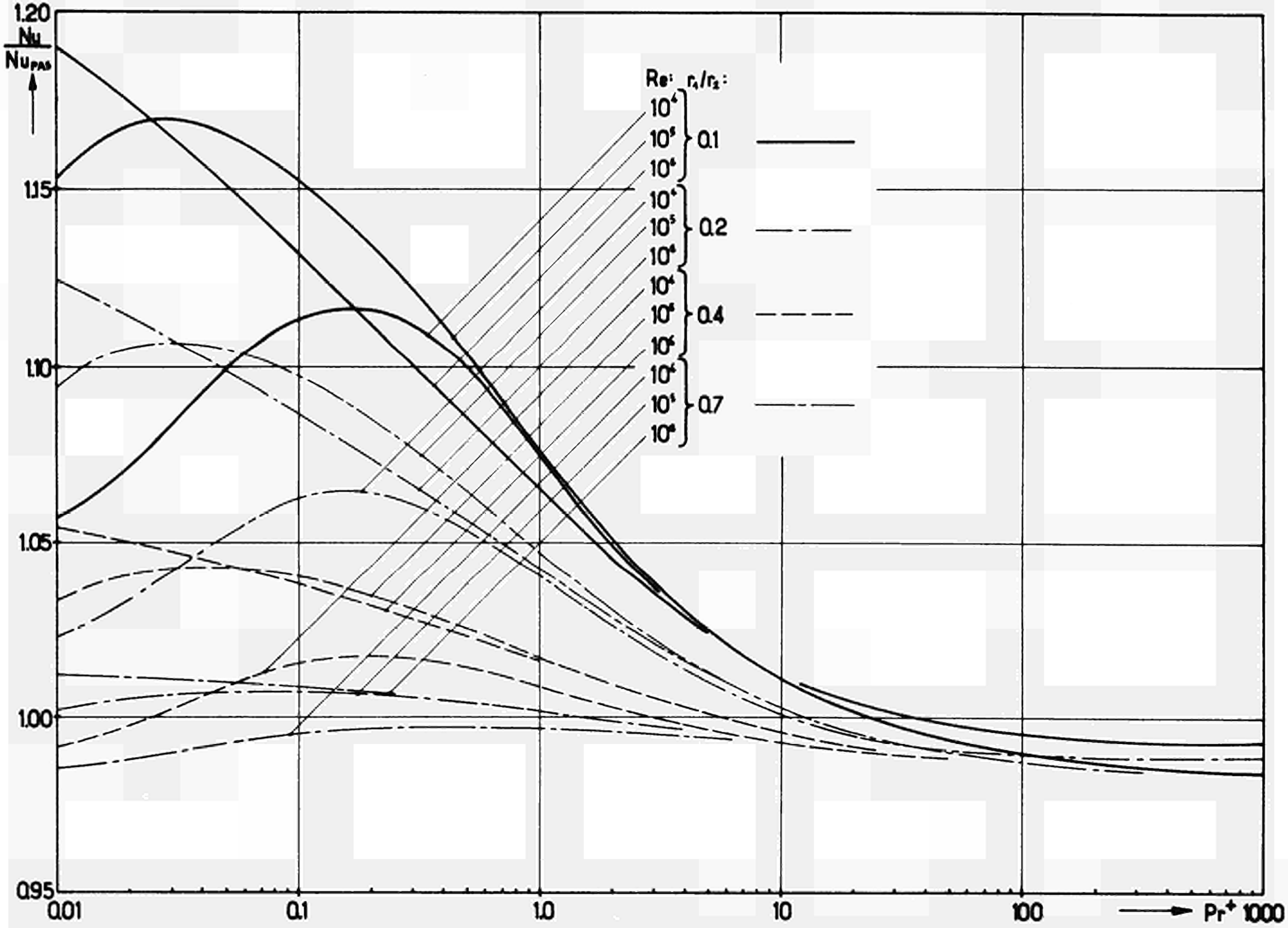


ABB.87. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(Pr^{+}, Re, r_1/r_2)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w2}=konst.

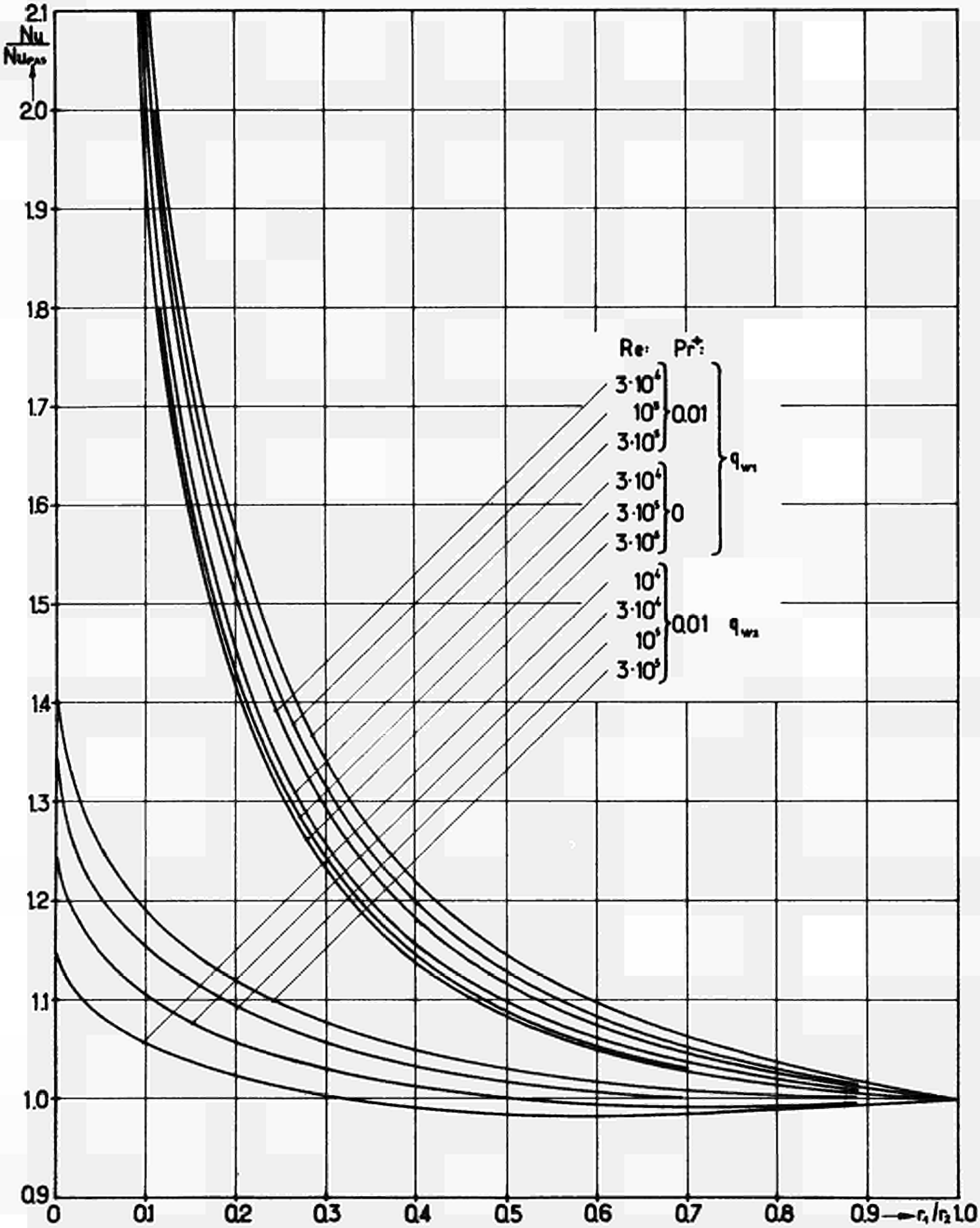


ABB.88. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS} = f(r_1/r_2, Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst. bzw. q_{w2}=konst.

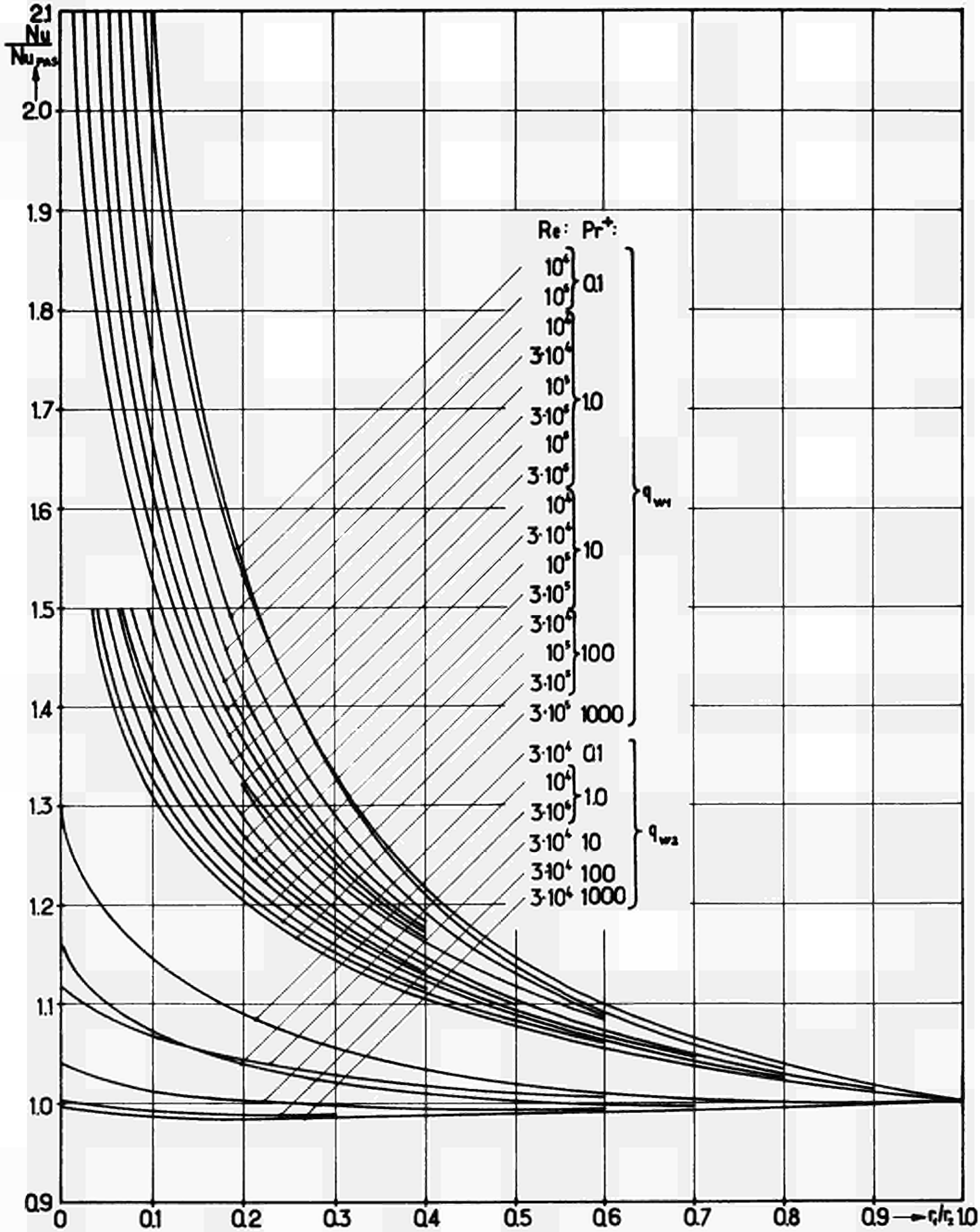


ABB. 89. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS} = f(r_1/r_2, Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst. bzw. q_{w2}=konst.

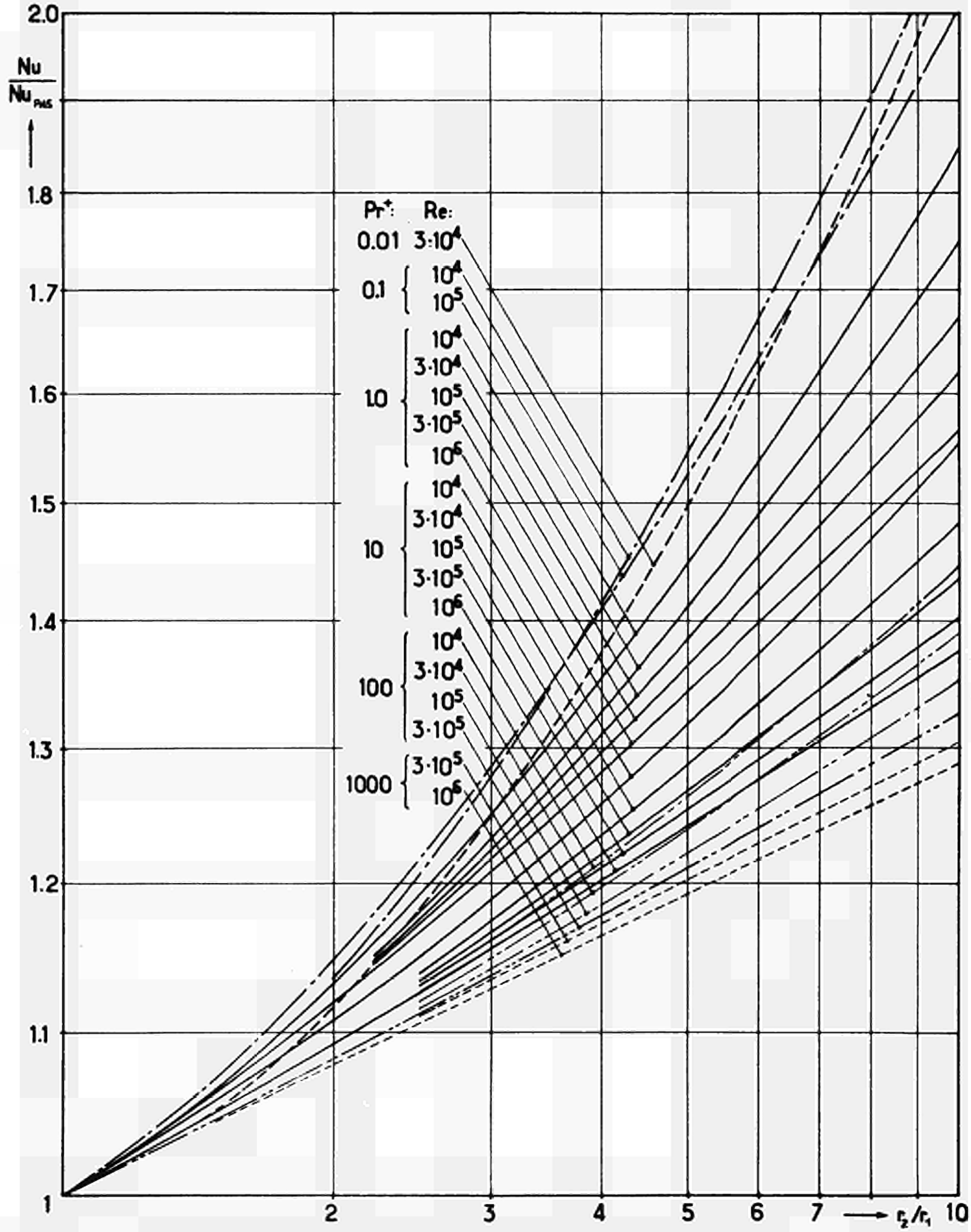


ABB.90. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_{PAS}=f(r_2/r_1, Re, Pr^+)$ bei der turbulenten Strömung im Ringspalt für q_{w1}=konst.

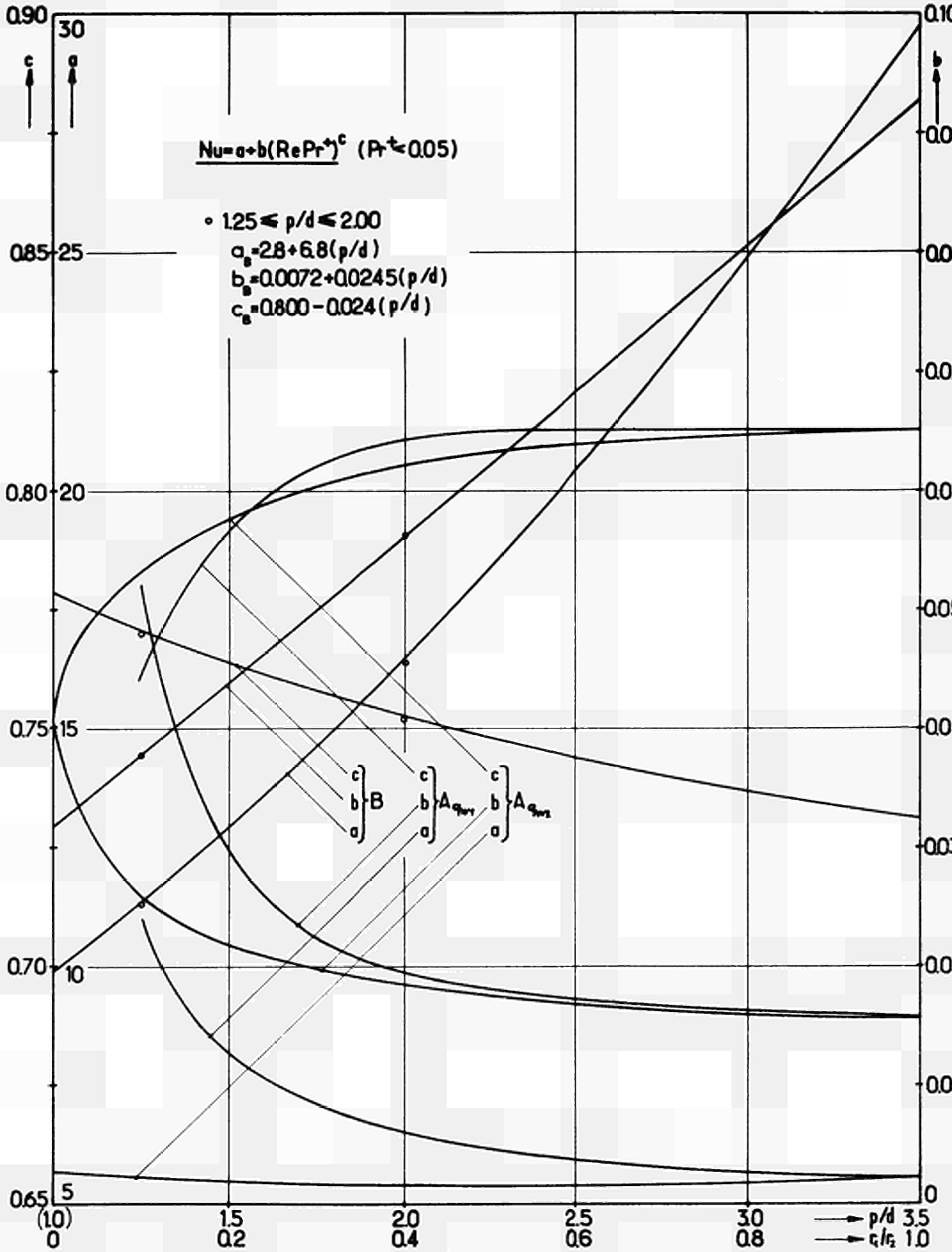


ABB.91. Koeffizienten a, b und c zur angenäherten Wiedergabe der Nußelt-Zahlen in der Form $Nu=a+b(RePr^{+})^{c}$ ($Pr^{+}<0{,}05$) in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r_1/r_2 beim Ringspalt bzw. vom Rohrmittenabstand p/d beim Rohrbündel (Dreieckanordnung) bei turbulenter Strömung für q_{w1}=konst. bzw. q_{w2}=konst.

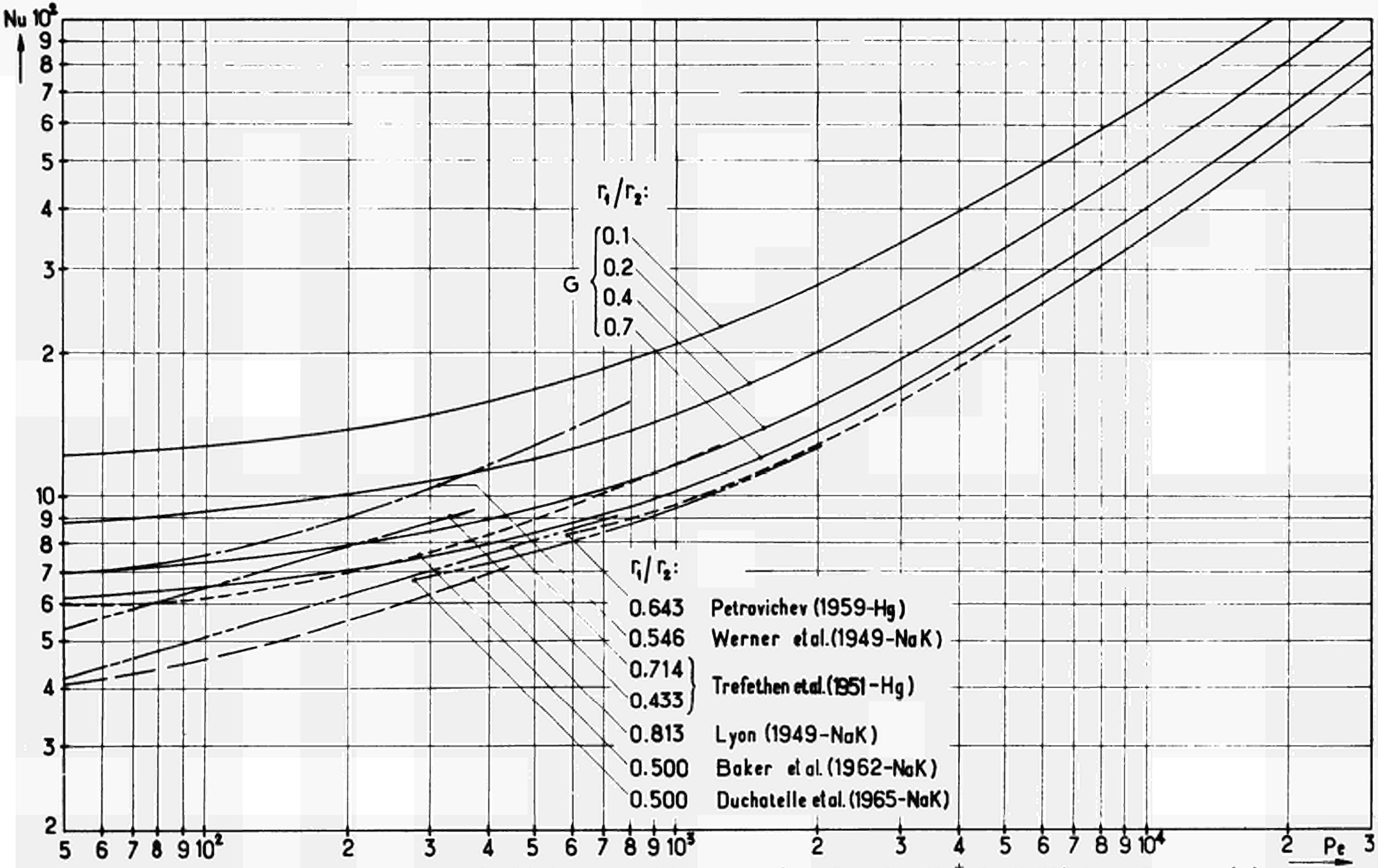


ABB.92. Vergleich der für die turbulente Strömung im Ringspalt (q_{W1}=konst.- $Pr^+=Pr=0{,}01$) berechneten (G) und an Flüssigmetallen experimentell ermittelten Nusselt-Zahlen Nu=f(Pe)

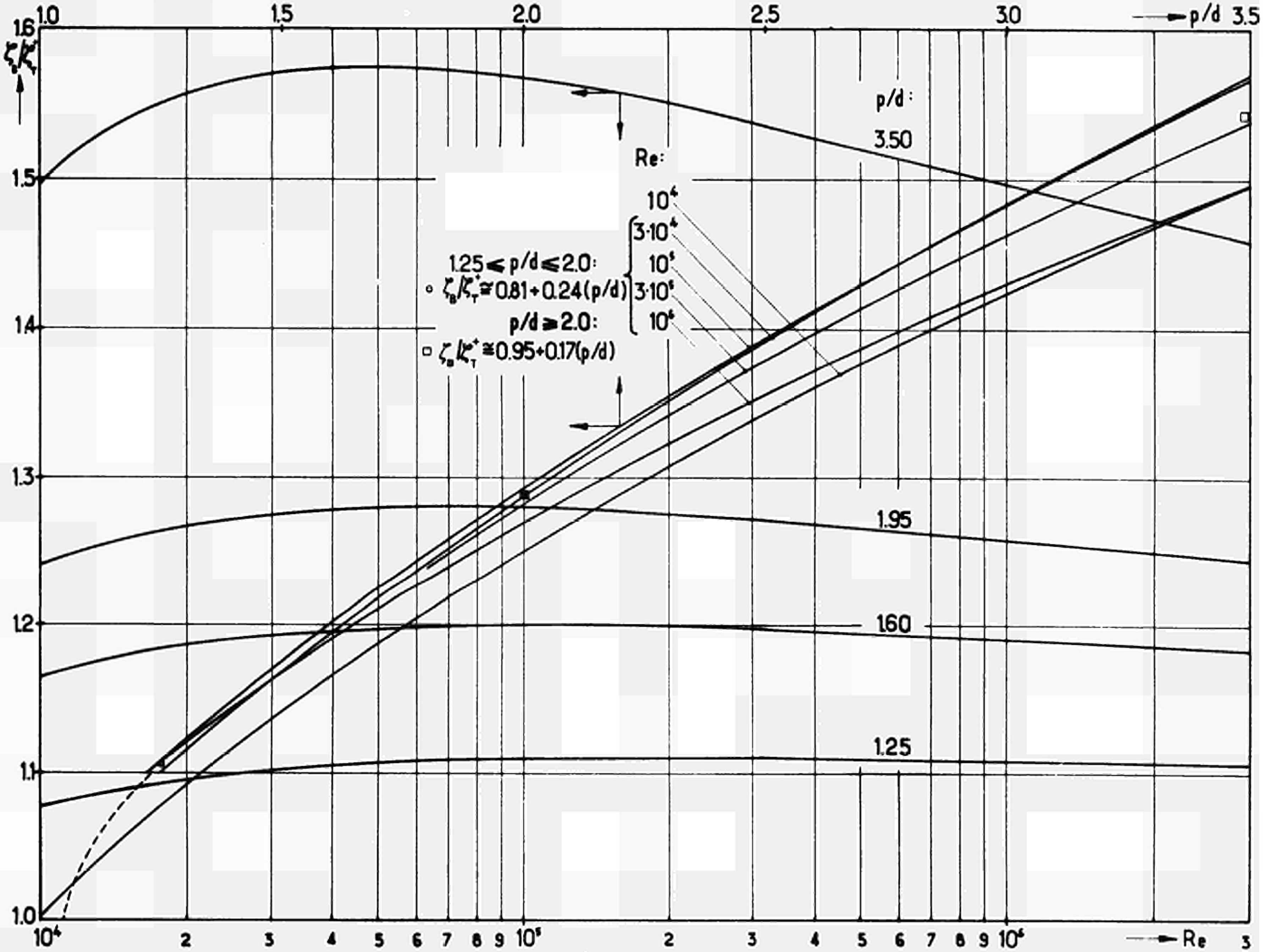


ABB.93. Verhältnis der Widerstandsbeiwerte $\zeta_B/\zeta_T{}^+ = f(Re, p/d)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung)

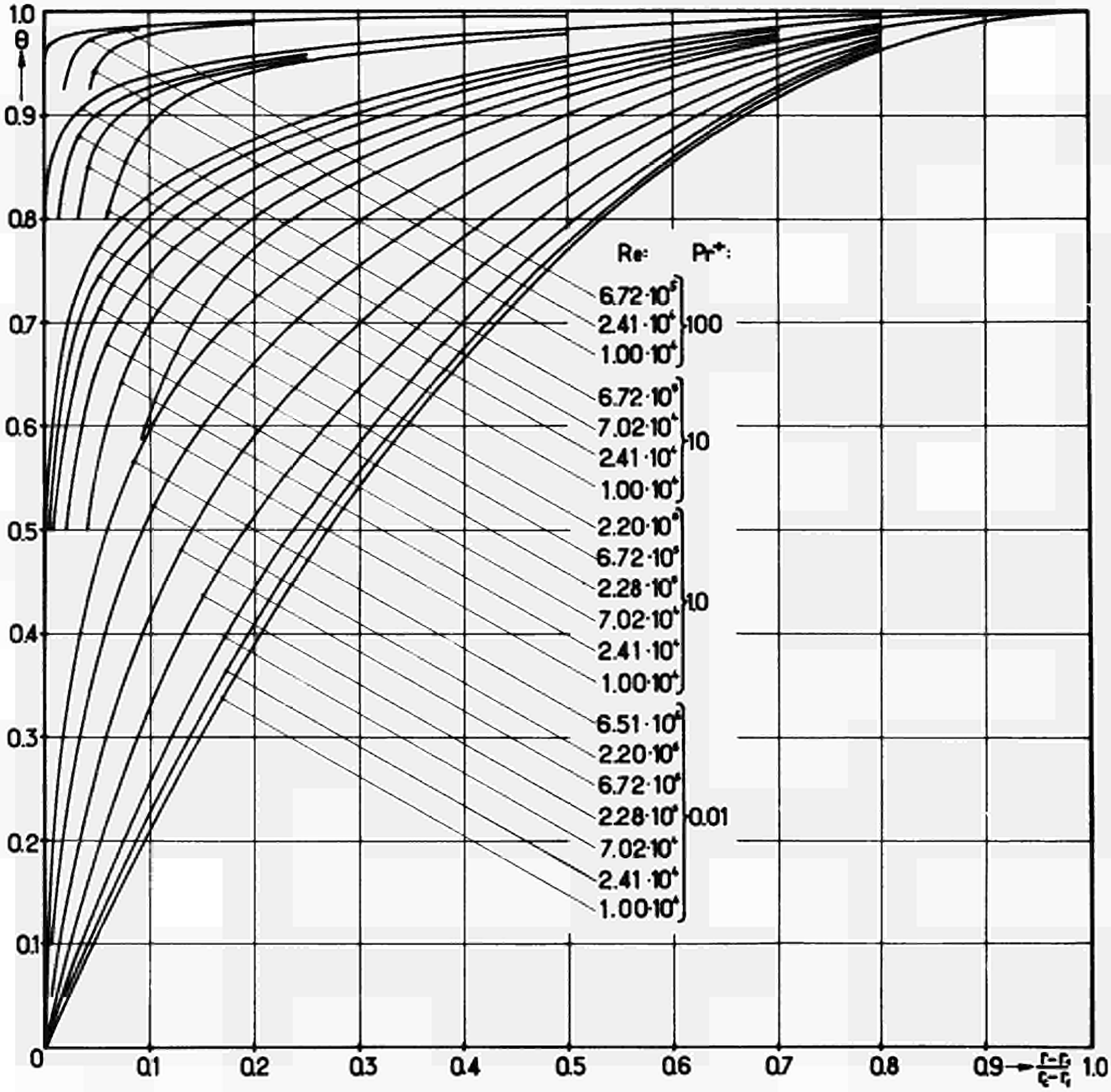


ABB.94. Temperaturverlauf $\Theta = f((r-r_1)/(r_c-r_1), Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für q_w=konst. und p/d=1,60.

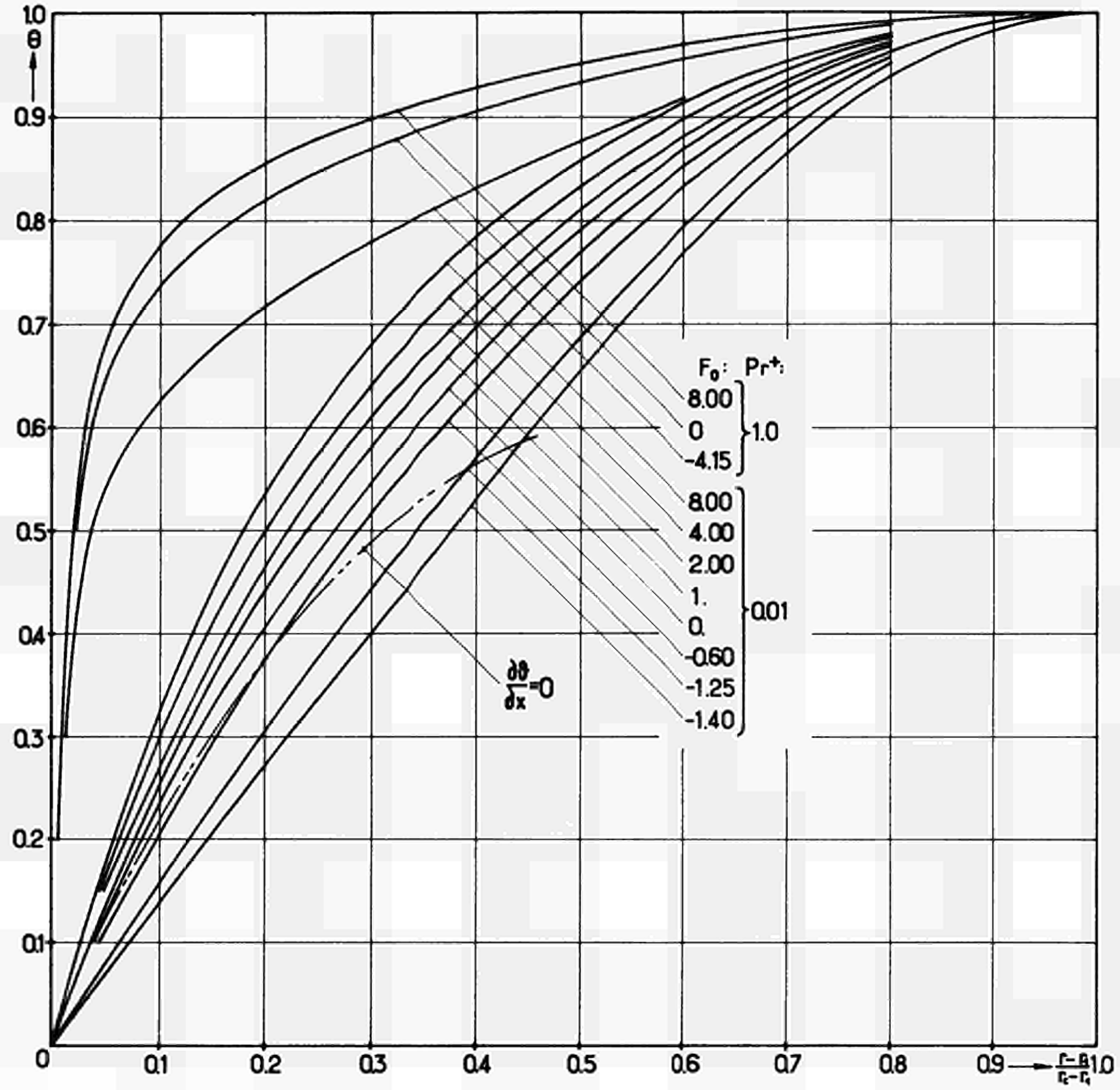


ABB.95. Temperaturverlauf $\Theta=f((r-r_1)/(r_c-r_1),Pr^+,F_o)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für q_w=konst., p/d=1,60 und Re=7,02.10^4.

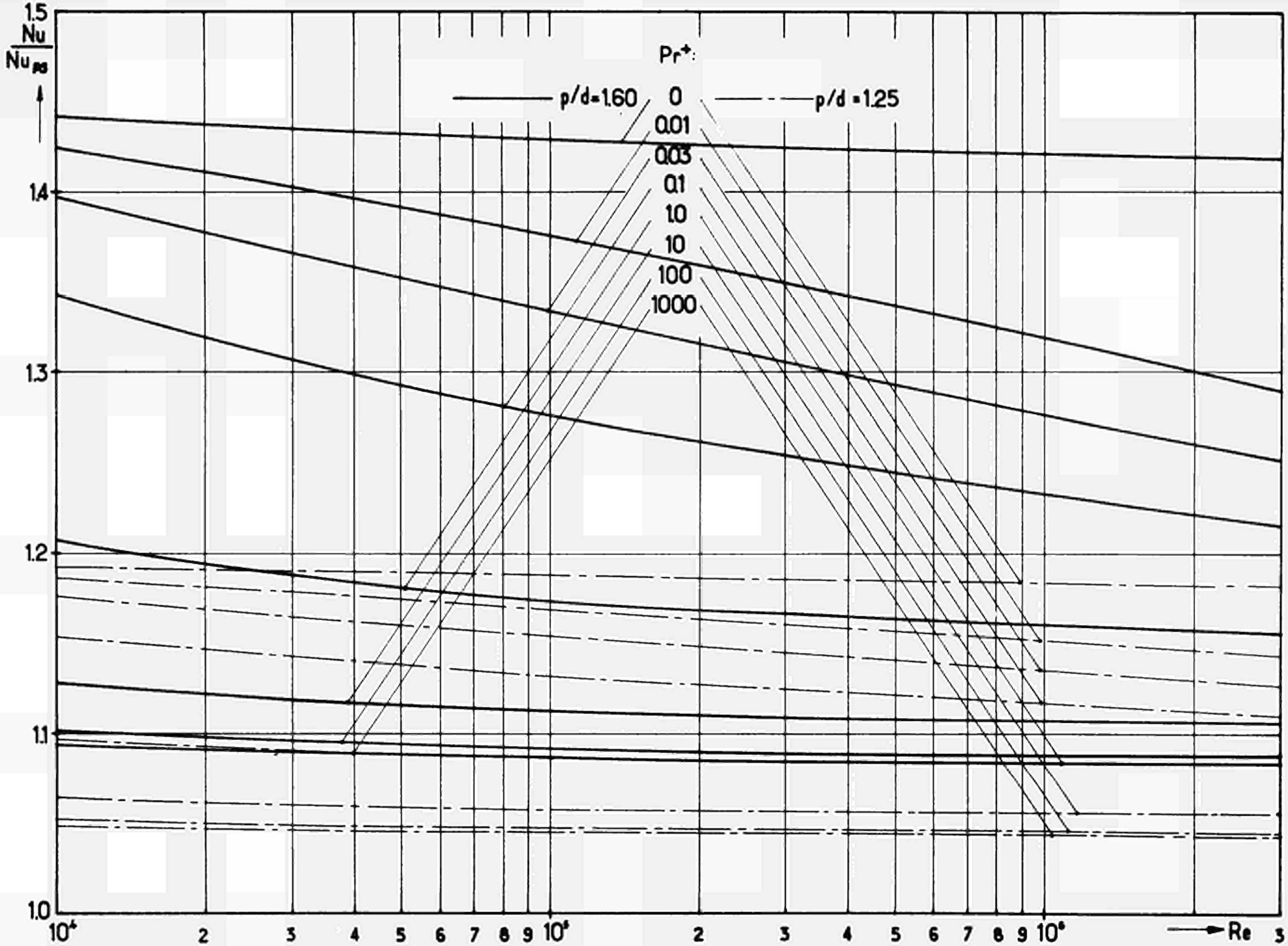


ABB.96. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PS}=f(Re,Pr^+,p/d)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreiecksanordnung) für q_w=konst.

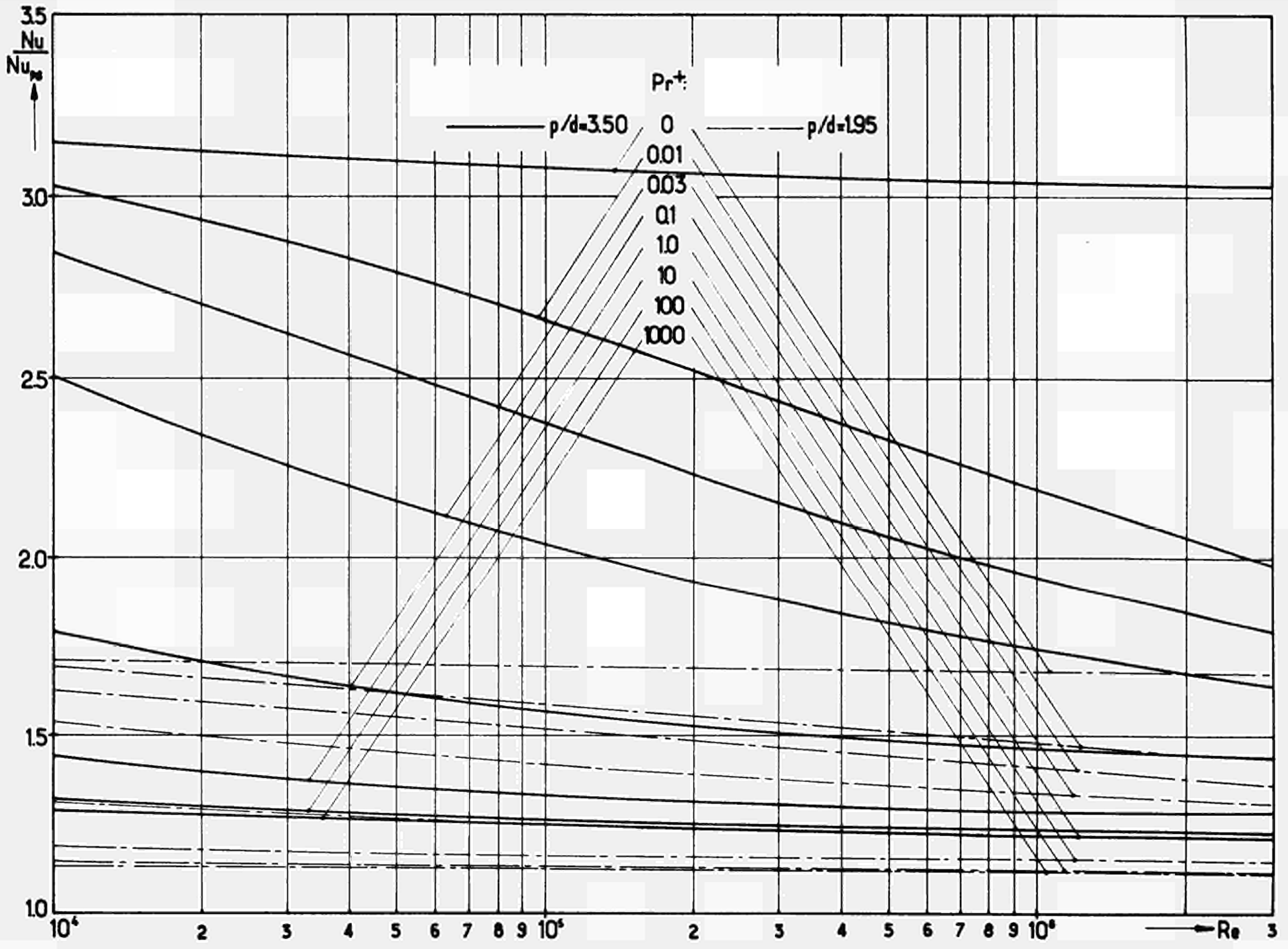


ABB.97. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PS}=f(Re,Pr^{+},p/d)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für q_w=konst.

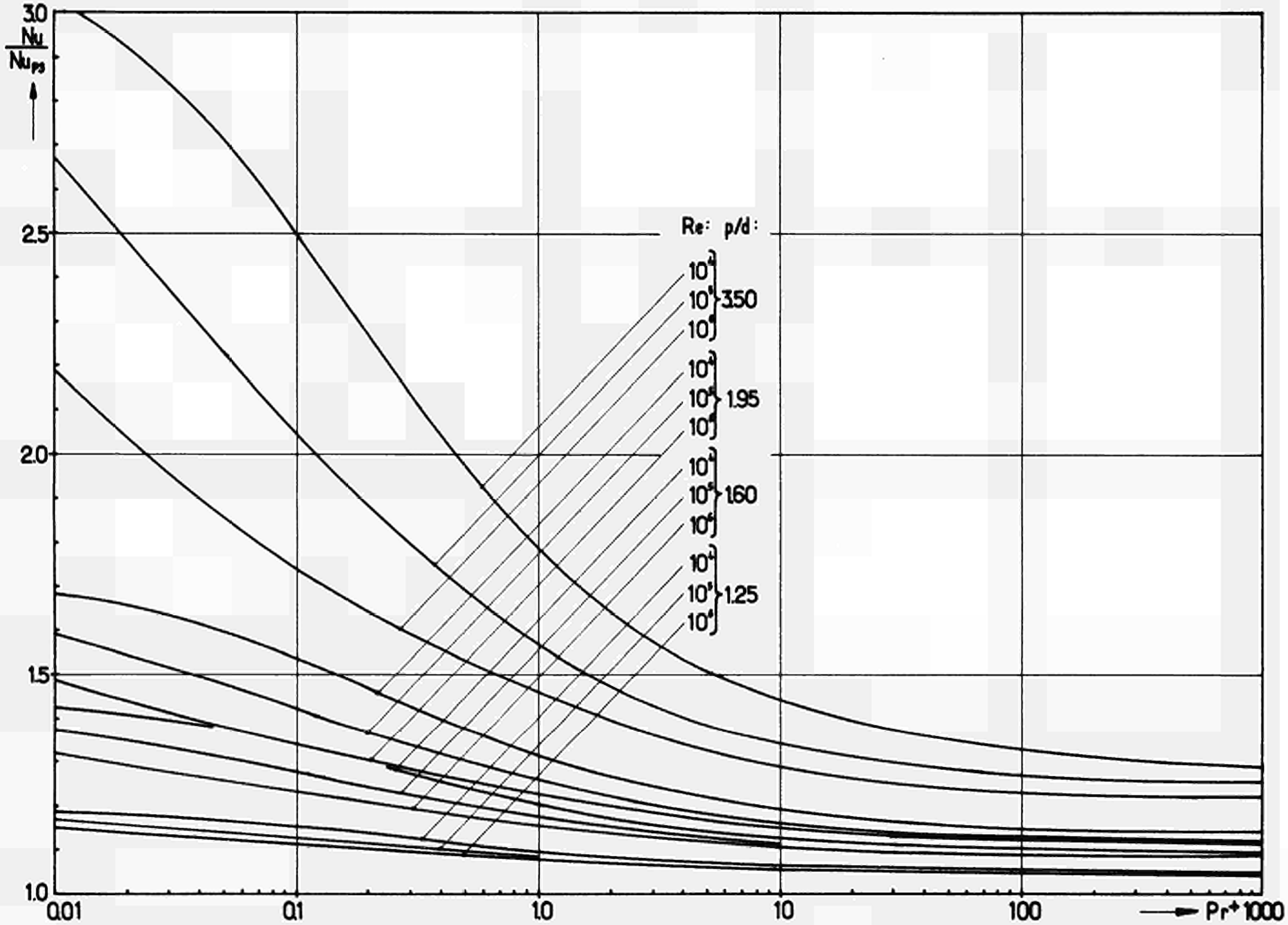


ABB.98. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PS}=f(Pr^{+},Re,p/d)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für q_w=konst.

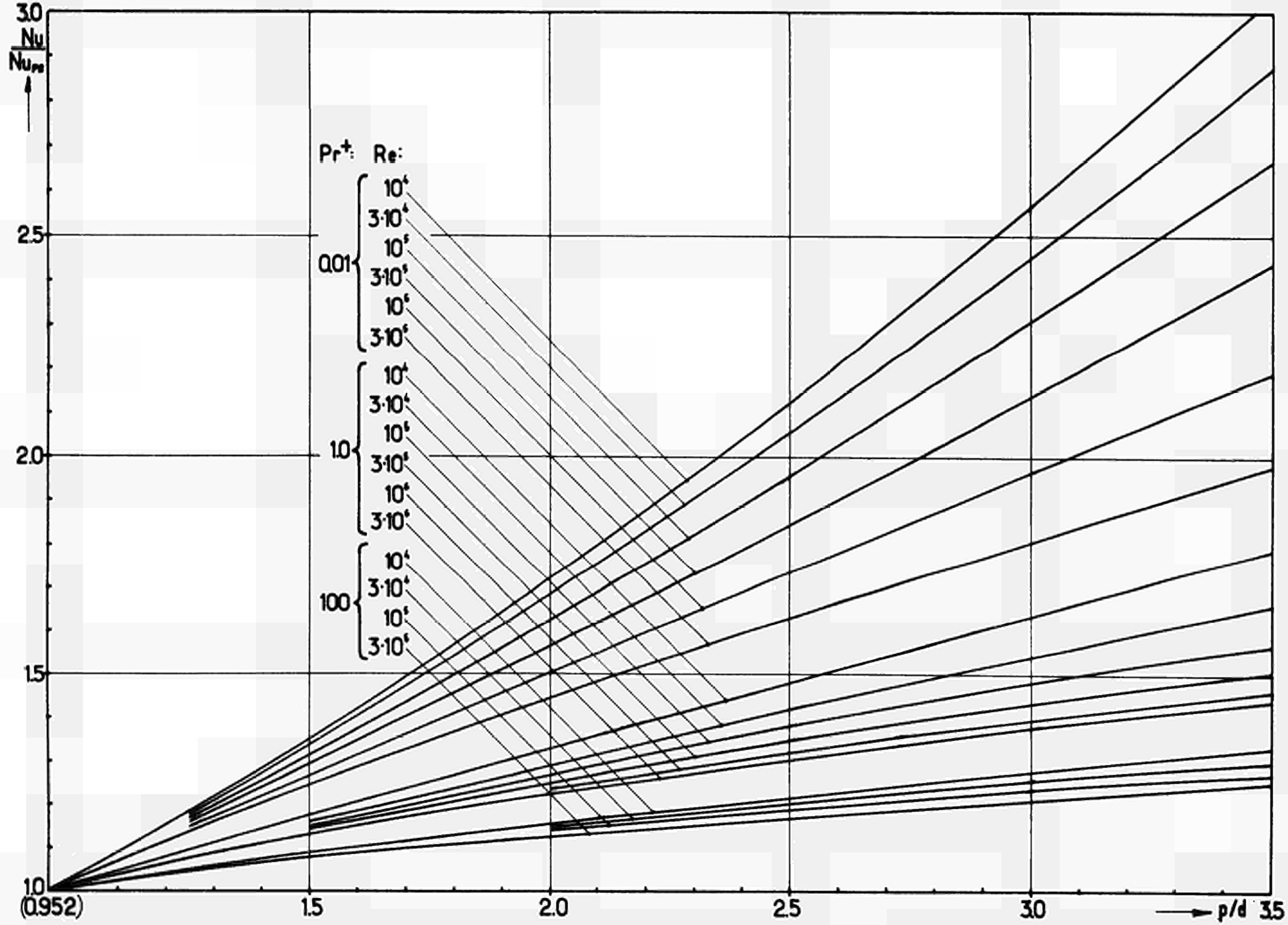


ABB.99. Verhältnis der Nusselt-Zahlen $Nu/Nu_{PS}=f(p/d, Pr^{+}, Re)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für $q_{..}$=konst.

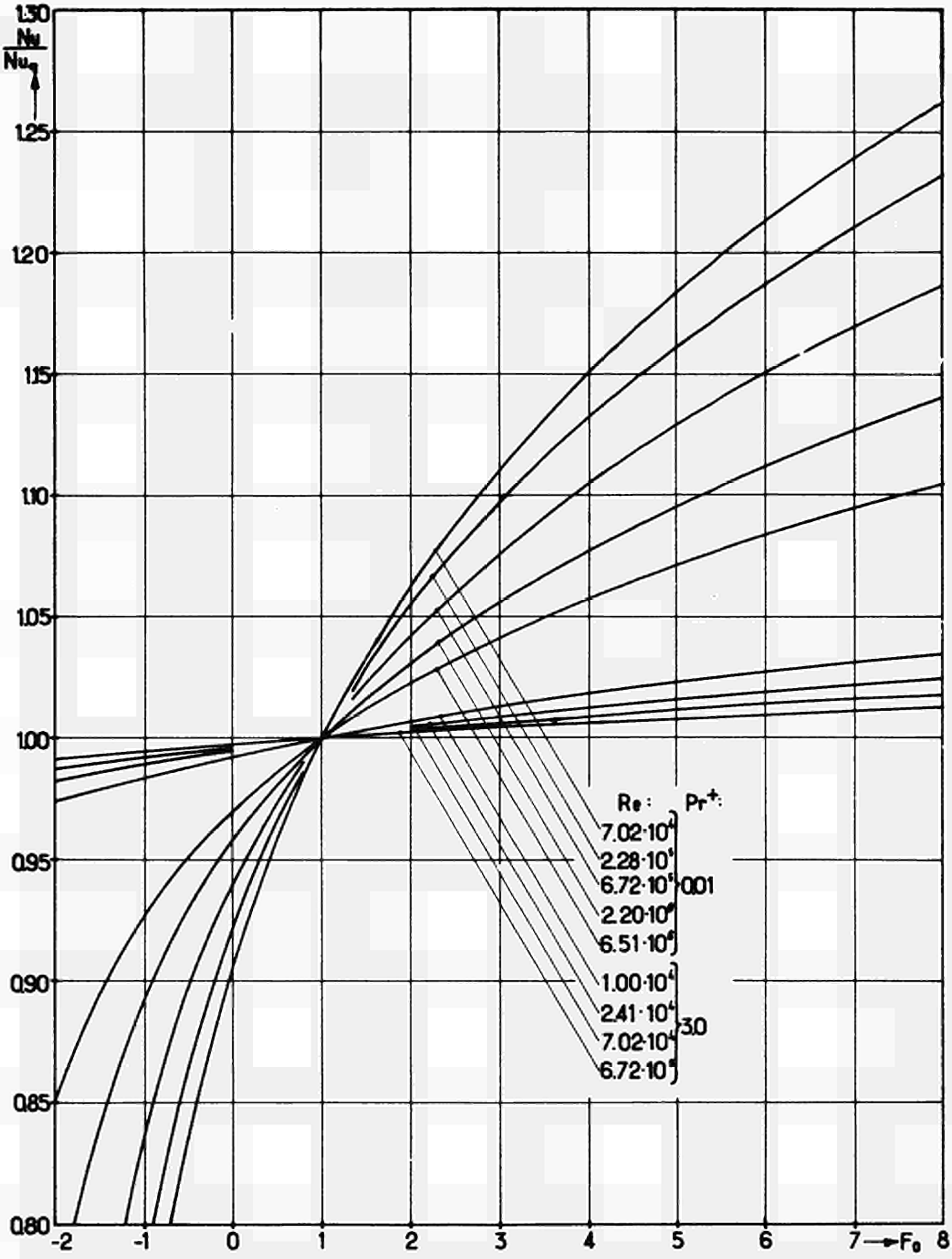


ABB. 100. Verhältnis der Nußelt-Zahlen $Nu/Nu_q = f(F_o, Pr^+, Re)$ bei der turbulenten Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung) für $Pr^+ = 0{,}01$ und $Pr^+ = 3{,}0$ ($p/d = 1{,}60$).

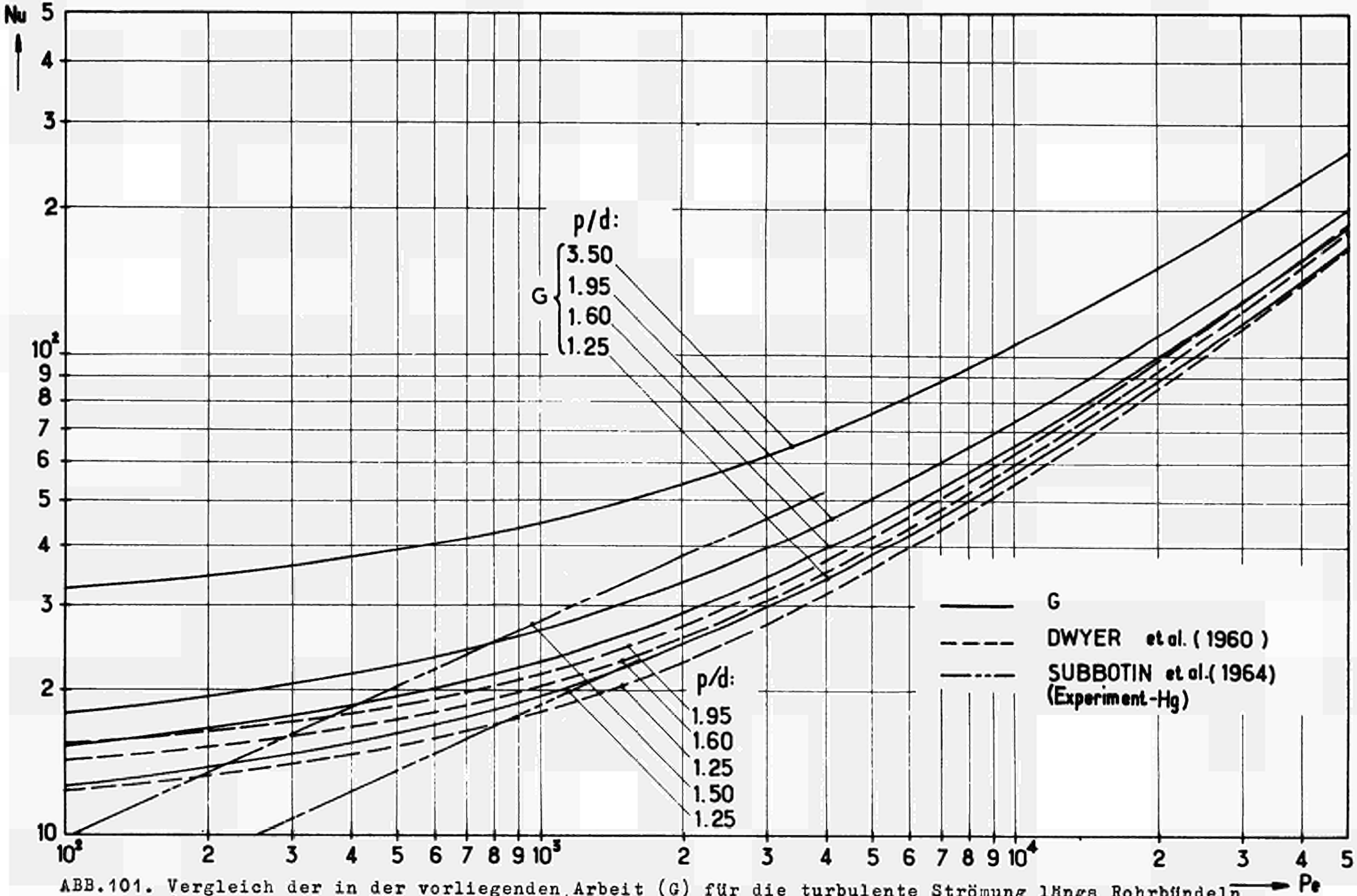


ABB.101. Vergleich der in der vorliegenden Arbeit (G) für die turbulente Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung - q_w=konst.- Pr^+=Pr=0,01) berechneten Nusselt-Zahlen Nu=f(Pe) mit theoretischen und an Flüssigmetallen experimentell gewonnenen Ergebnissen anderer Autoren

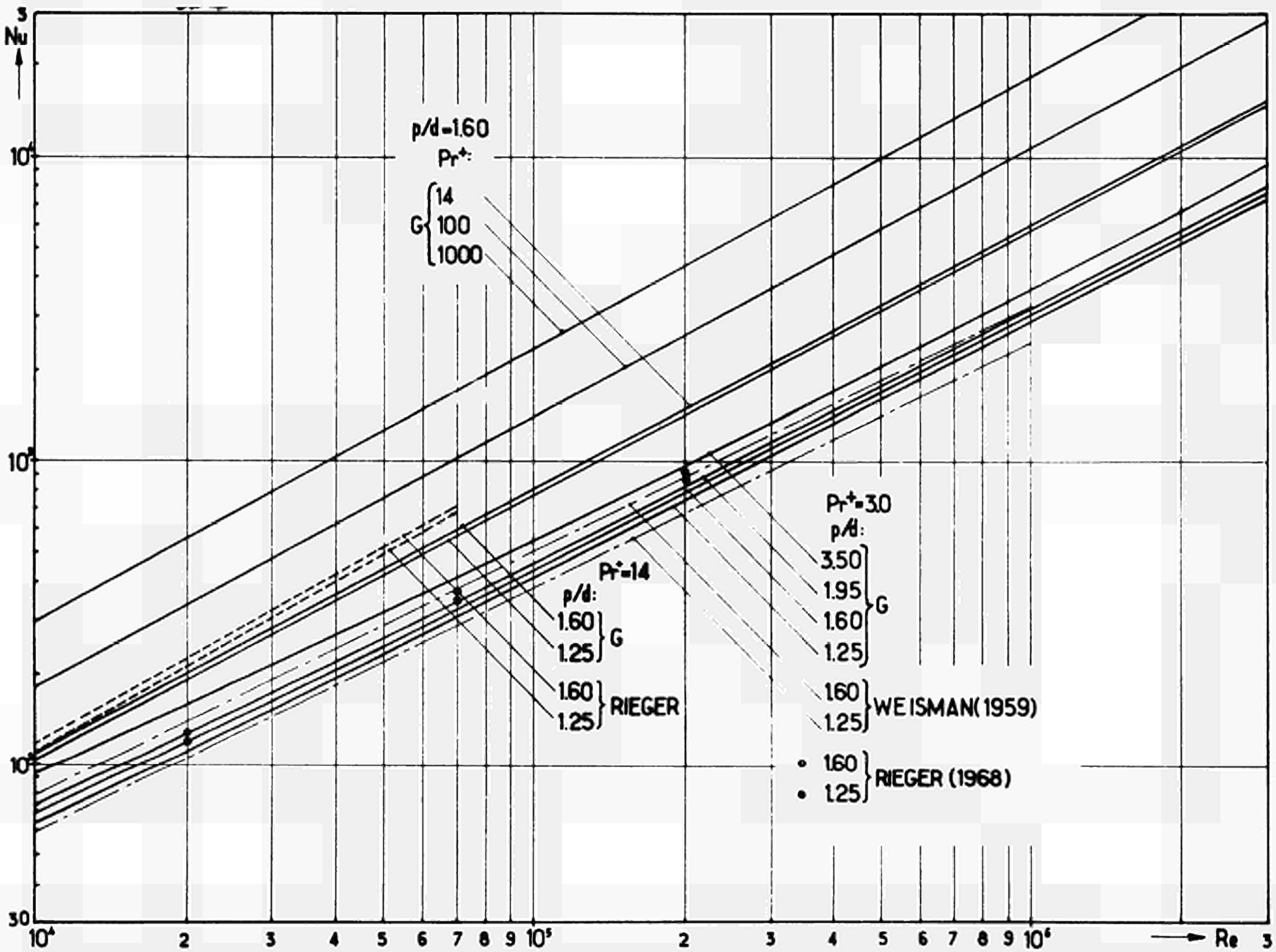


ABB.102. Vergleich der für die turbulente Strömung längs Rohrbündeln (Dreieckanordnung - q_W=konst.) in der vorliegenden Arbeit (G - Pr^+=Pr=3 - 14 - 100 - 1000) berechneten und a) von M.RIEGER an Wasser und an einem Wasser-Glykol-Gemisch gemessenen und b) nach der Formel von J.WEISMAN berechneten Nusselt-Zahlen Nu=f(Re,Pr,p/d)

AN UNSERE LESER

Alle Euratom-Berichte werden nach Erscheinen in der von der Zentralstelle für Information und Dokumentation (CID) herausgegebenen Monatszeitschrift **EURATOM INFORMATION** angezeigt. Abonnements (1 Jahr : DM 60) und Probehefte sind erhältlich bei :

Handelsblatt GmbH
"Euratom Information"
Postfach 1102
D-4 Düsseldorf (Deutschland)

oder

Centrale de vente des publications
des Communautés européennes
37, rue Glesener
Luxembourg

Erkenntnisse verbreiten ist soviel wie Wohlstand verbreiten — ich meine den allgemeinen Wohlstand, nicht den individuellen Reichtum — denn mit dem Wohlstand verschwindet mehr und mehr das Böse, das uns aus dunkler Zeit vererbt ist.

Alfred Nobel

VERTRIEBSSTELLEN

Alle Euratom-Berichte sind bei folgenden Stellen zu den auf der ersten Rückseite des Umschlags angegebenen Preisen erhältlich (bei schriftlicher Bestellung bitte die EUR-Nummer und den Titel, die beide auf der ersten Umschlagsseite jedes Bericht stehen, deutlich angeben).

CENTRALE DE VENTE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES
37, rue Glesener, Luxembourg (Compte chèque postal N° 191-90)

BELGIQUE — BELGIË
MONITEUR BELGE
40-42, rue de Louvain - Bruxelles
BELGISCH STAATSBLAD
Leuvenseweg 40-42 - Brussel

DEUTSCHLAND
BUNDESANZEIGER
Postfach - Köln 1

FRANCE
SERVICE DE VENTE EN FRANCE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES
26, rue Desaix - Paris 15e

ITALIA
LIBRERIA DELLO STATO
Piazza G. Verdi, 10 - Roma

LUXEMBOURG
CENTRALE DE VENTE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES
37, rue Glesener - Luxembourg

NEDERLAND
STAATSDRUKKERIJ
Christoffel Plantijnstraat - Den Haag

UNITED KINGDOM
H. M. STATIONERY OFFICE
P. O. Box 569 - London S.E.1

EURATOM — C.I.D.
29, rue Aldringer
Luxembourg